Universidad Austral de Chile
Conocimiento y Naturaleza

UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
SEDE PUERTO MONTT
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS

DETERMINANDO EL NIVEL DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO SEGÚN EL MODELO DE VAN HIELE, EN BASE A LA CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO

Profesor Patrocinante

Prof. Felipe Almuna Salgado

Seminario de Titulación para optar al título de
PROFESORA DE MATEMÁTICAS

SOFÍA CONSTANZA CARRASCO RAMOS

Puerto Montt, Chile
Diciembre 2018

V°B° DEL PROFESOR PATROCINANTE

Nombre
Completo : ____

Grado Académico o Título
Profesional : ________________________________

Institución : _________________ Ciudad : _____________________

Cargo : _________________ Teléfono : _____________________

E-mail : _________________________________

Fecha : _________________ Firma : _____________________

Firma estudiante: ______________________

HOJA DE CALIFICACIÓN.

En Puerto Montt, el_____de___________de 2018, los abajo firmantes dejan constancia que la estudiante Sofía Constanza Carrasco Ramos de la carrera Pedagogía en Matemáticas, ha aprobado el Seminario de Titulación para optar al título de Profesor de Matemáticas, con una nota de _____.

Nombre y firma profesor evaluador	Nombre y firma profesor evaluador

Nombre y firma profesor evaluador

Dedicatoria

El presente trabajo está dedicado a mi familia por haber sido mi apoyo a lo largo de toda mi carrera universitaria y a lo largo de mi vida. De manera especial a la profesora Angela Castro y a el profesor Felipe Almuna, por haberme guiado en la elaboración de este Seminario de Titulación y haberme brindado el apoyo para desarrollarme profesionalmente. A todas las personas especiales que me acompañaron en esta etapa, aportando a mi formación tanto profesional y como ser humano. A la Universidad Austral de Chile Sede Puerto Montt, por haberme brindado tantas oportunidades y enriquecerme en conocimiento.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Este Seminario de Titulación presenta un instrumento que pretende medir el Nivel Razonamiento Geométrico de los estudiantes de Primer Año Medio, basado en el Modelo de van Hiele. Para ello, (i) se realizó una progresión de los objetivos de aprendizaje propuestos en el eje de Geometría de Educación Básica según MINEDUC; (ii) se indicó los conocimientos claves que los estudiantes de Primer Año Medio deberían poseer al momento de finalizar la Educación Básica que tributan al Primer Año Medio; (iii) se compararon los conocimientos claves identificados con los conocimientos necesarios para el eje de Geometría según los programas de estudio Primer Año Medio; y finalmente (iv) se elaboraron preguntas basadas en los niveles de razonamiento de van Hiele para estudiantes de Primer Año Medio.

Esta propuesta pretende ofrecer una herramienta para que los docentes de Matemáticas de Primer Año Medio puedan determinar el Nivel de Razonamiento Geométrico con el que inician sus estudiantes la Educación Media, permitiéndoles así diseñar secuencias didácticas más eficaces, debido a que estarán contextualizadas al tipo de Razonamiento Geométrico predominante dentro de la sala de clases.

Palabras claves: Razonamiento Geométrico, Niveles de Razonamiento, Educación Media, Cuestionario.

ABSTRACT

This Reserch Proposal presents an instrument that aims to measure the level of geometric reasoning, based on the van Hiele model. For this, (i) a progression of the learning objectives proposed by the Chilean Ministry of Education in the Primary cycle of student's Education Geometry was carried out; (ii) key knowledge High School students should have at the time of completing their primary cycle of education was done; (iii) knowledge identified in (ii) was contrasted against key geometric knowledge presented in the curricular documents of the First Year of High School; (iv) questions were elaborated based on van Hiele's reasoning levels.

This proposal may offer a tool for High School teachers to determine the level of geometric reasoning with which their students start high school, allowing them to design more effective methodological sequences, as they may be contextualized to the type of predominant geometric reasoning within the classroom.

Keywords: Geometric reasoning, reasoning levels, high school, questionnaire.

CAPÍTULO I: Antecedentes del Problema y Justificación

1.1 Introducción y Planteamiento del Problema

Durante el transcurso de los años, uno de los mayores desafíos que enfrenta la Educación en el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas posee relación con el aprendizaje de la Geometría (Aravena & Caamaño, 2013). Las causas de estas dificultades son múltiples y complejas, tanto de tipo social como académico, pero una de ellas tiene su origen a partir del siglo XVII con el comienzo de la idealización, en el cual la imagen visual del objeto geométrico retrocedió en importancia y fue sustituida por lo algebraico y lo analítico, en consecuencia, a finales del siglo XIX la Geometría declaró su total independencia de la visualización, ya que la mayoría de los estudios apuntaron a que esta es un obstáculo para el desarrollo de los procesos de abstracción y la agilidad en el manejo de ideas y contenidos en el aprendizaje de la Geometría (Davis, 1993).

La visualización es el soporte inicial e intuitivo del aprendizaje de la Geometría, debido a que es la encargada de dar sentido y significado al aprendizaje, además de ser la encargada de generar razonamientos abductivos[1] (i.e., un tipo de razonamiento que a partir de la descripción de un hecho o fenómeno ofrece o llega a una hipótesis) y deductivos en los estudiantes, los cuales son fundamentales para generar habilidades lógico-matemáticas (Marmolejo & Vega, 2012). Tales como; comparar, clasificar, relacionar cantidades, cuestionar, experimentar, comprobar hipótesis y resolver problemas lógicos (Gardner, 1998). Pero, existen autores como el matrimonio holandés van Hiele que afirman que existe un orden dentro del Razonamiento Geométrico, el

[1] Para más información de razonamiento abductivo visitar http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/989873

cual comienza con la visualización y finaliza con el rigor (ver Tabla 5), tema el cual se profundizará en el Capítulo II.

Evidentemente, la razón mencionada en los párrafos anteriores no es única, ya que también es cuestionable la cantidad de horas dedicadas al eje de Geometría y la metodología empleada en su aprendizaje. Ejemplo de ello, es el estudio de Varas et al. (2018) en el cual se realizó una encuesta a los estudiantes chilenos de las carreras de Educación General Básica sobre sus percepciones acerca de la cantidad de cursos de didáctica de las Matemáticas presentes en sus mallas curriculares, esta encuesta determinó que un 79% de los estudiantes que completaron todos los cursos de didáctica de las Matemáticas piensan que sus cursos fueron insuficientes, un 21% que fueron suficientes y un 0% que fueron excesivos. Por consiguiente, esto invita a reflexionar sobre las prácticas pedagógicas empleadas por los docentes durante el ciclo de Enseñanza Básica, ya que la mayoría de los estudiantes de carreras de Educación General Básica declaran que sus conocimientos sobre didáctica no son los suficientes.

Por otro lado, los resultados alcanzados por los estudiantes de Enseñanza Básica en mediciones nacionales e internacionales evidencian que no se han desarrollado las competencias básicas en Matemáticas, tales como; la visualización, las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración, debido a que se prioriza el trabajo algebraico, sin aplicaciones ni contextos. (Aravena & Caamaño, 2013).

Ejemplo de lo anterior, es el Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias (TIMSS[2]) realizado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA, por sus siglas en inglés), en el que los estudiantes de Educación Básica chilenos históricamente han ratificado un bajo

[2] Para más información de TIMSS visitar https://www.agenciaeducacion.cl/estudios/estudios-internacionales/timss/

rendimiento en las mediciones de Matemáticas, ya que poseen resultados similares al de países con un Índice de Desarrollo Humano inferior (IDH[3]) (MINEDUC, 2003). Otro dato relevante en este estudio se evidenció el año 2015, ya que de un total de cuatro niveles que van desde el bajo hasta el avanzado (avanzado sobre 635 puntos, alto sobre 550, intermedio 475 puntos, bajo sobre 400 puntos y además, si los estudiantes no alcanzan los 400 puntos indica que poseen un rendimiento menor al que la medición describe), según la Agencia de Calidad de la Educación (2017b) los estudiantes chilenos que rindieron la evaluación obtuvieron en promedio 427 puntos en el nivel de Octavo Año Básico en la prueba de Matemáticas y específicamente en Geometría 428 puntos de un total de 1000, lo cual posiciona a Chile en un nivel bajo en Geometría y según MINEDUC (2017) ese nivel indica que no poseen todos los conocimientos matemáticos básicos. Además, el informe detalla que 1/3 de los estudiantes chilenos que rindieron la medición no son capaces de alcanzar los 400 puntos.

Otro estudio relevante por considerar es el Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA[4], por sus siglas en Inglés) en el cual se evalúa a los estudiantes según niveles de desempeño, los cuales van desde el 1 al 5 (nivel 1 sobre 358 puntos, nivel 2 sobre 420 puntos, nivel 3 sobre 482 puntos, nivel 4 sobre 545 puntos, nivel 5 sobre 607 puntos en la última modificación), y específicamente en el año 2015, se evidenció que un 23% de los estudiantes poseen un rendimiento menor al que la evaluación describe y un 26,3% se encuentran en el nivel 1, lo cual significa que no poseen todas las competencias básicas en Matemáticas, ya que solo son capaces de realizar procedimientos rutinarios, con instrucciones directas y en situaciones explícitas (Agencia de Calidad de la Educación, 2017a).

[3] Para más información de IDH visitar http://www.onu.cl/es/tag/idh/
[4] Para más información de PISA visitar http://www.oecd.org/pisa/pisaenespaol.htm

Las situaciones planteadas en los párrafos anteriores podrían evidenciar la necesidad de hacer un cambio en las metodologías de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, teniendo en cuenta que, además, en Chile al inicio de la Educación Media ocurre un cambio de ciclo de escolarización y en muchas ocasiones, los docentes se ven enfrentados a estudiantes que provienen de diversos contextos, con distintos conocimientos previos, habilidades y actitudes. Es por esto, que en este Seminario de Titulación se usa el modelo de van Hiele, el cual es un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría que permite elaborar evaluaciones y secuencias metodológicas adaptadas al Nivel de Razonamiento Geométrico que poseen los estudiantes. Específicamente, este Seminario de Titulación propone un instrumento que permita a los docentes que imparten clases en Primer Año Medio, medir el Nivel de Razonamiento Geométrico que posee cada uno de sus estudiantes al momento de finalizar la Educación Básica, para que así posteriormente, puedan diseñar secuencias didácticas contextualizadas y eficaces en el aprendizaje de la Geometría.

Si bien estudios anteriores han propuestos algunos instrumentos que buscan medir el nivel de Razonamiento Geométrico (Aravena & Caamaño, 2013; Cabello, 2013). Una revisión exhaustiva de la literatura evidenció que no existen, instrumentos que estén alineados con los nuevos programas de estudio que rigen al currículo chileno y tampoco están enfocados en el grado de Primer Año Medio. Por lo anterior, es que aldía de hoy se requiere de instrumentos actualizados a los nuevos programas de estudio que orienten una correcta planificación de la enseñanza en el eje de Geometría. De ahí la necesidad de realizar este Seminario.

1.2 Objetivos del Seminario de Titulación

A continuación, se presentan los objetivos del Seminario de Titulación.

1.2.1 Objetivo General

Diseñar un instrumento que permita medir el Nivel de Razonamiento Geométrico de los estudiantes que ingresan a Primer Año Medio, en relación con los los conocimientos adquiridos hasta el final de la Educación Básica en el eje de Geometría.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Determinar cuáles son los conocimientos claves en Geometría que los estudiantes de Primer Año Medio deberían poseer al final de la Educación Básica.
- Construir un instrumento basado en los Niveles de Razonamiento Geométrico de van Hiele que permita determinar los conocimientos claves que los estudiantes de Primer Año Medio deberían poseer tras haber finalizado la Educación Básica, en el eje de Geometría.

1.3 Delimitaciones y Fortalezas

A continuación, se dan a conocer las delimitaciones y fortalezas que dan sustento a este Seminario de Titulación.

1.3.1 Delimitaciones

- El instrumento elaborado es enfocado solamente en Primer Año Medio y en el Eje Temático de Geometría, debido a que en ese nivel educativo hay un cambio del ciclo de escolarización, por lo cual, los docentes en la mayoría de las ocasiones se ven enfrentados a estudiantes desconocidos.
- Es solo una propuesta, por lo cual no hay evidencia empírica que dé cuenta del real impacto del instrumento.

1.3.2 Fortalezas

- Una exhaustiva revisión de literatura basada en diversos autores vinculados al modelo de van Hiele, la cual permitió la elaboración del instrumento de evaluación.
- Una revisión de los Programas de estudio y las Bases curriculares actualizadas de Quinto Año Básico a Primer Año Medio, la cual permitió delimitar los contenidos a evaluar en el instrumento creado.

1.4 Organización del Seminario de Titulación

Este Seminario de Titulación se organiza de la siguiente manera: El segundo Capítulo, el marco teórico, presenta una revisión de la literatura en torno a diversos autores que da sustento a este Seminario, se profundizando en torno al aprendizaje de la Geometría, el modelo de van Hiele y a los instrumentos de evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes. En el tercer capítulo, se presenta el procedimiento realizado para la elaboración del instrumento. Finalmente, en el cuarto, se entregan las reflexiones obtenidas del Seminario de Titulación, así como también las conclusiones de esta propuesta.

1.5 Resumen del Capítulo

En este capítulo se ha dado a conocer el planteamiento del problema de Seminario de Titulación, el cual tiene como objetivo diseñar un instrumento que permita medir el nivel Razonamiento Geométrico de los estudiantes de Primer Año Medio, basado en los conocimientos adquiridos hasta el final de la Educación Básica en el eje de Geometría. Además, se han presentado las delimitaciones y fortalezas, como asimismo la organización de este Seminario de Titulación.

CAPÍTULO II: Marco Teórico

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta una revisión de la literatura que otorga sustento a este Seminario de Titulación, articulándose en dos apartados: en el primero describe la forma en que se produce el aprendizaje en Geometría, bajo las referencias de diversos autores y una revisión de la literatura del Currículo chileno en el eje de Geometría desde Quinto Año Básico hasta Primer Año Medio. Este se contrasta con los conocimientos y habilidades mostradas por el programa actual de Educación Básica de Chile. En el segundo apartado se presenta el modelo de van Hiele el cual contextualiza este Seminario de Titulación, se analizarán los niveles de Razonamiento Geométrico, los diferentes tipos de instrumentos existentes para medir el Nivel de Razonamiento Geométrico de los estudiantes y las pautas a seguir para realizar la medición de dichos niveles.

2.2 Aprendizaje de la Geometría

2.2.1 Procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de la Geometría

Diversos autores han focalizado sus investigaciones en la manera de como se produce el aprendizaje de los conceptos geométricos, el estudio elaborado por Vinner (2002), hace hincapié en las grandes diferencias existentes entre la imagen del concepto y su definición; la primera hace referencia a una representación visual del concepto y las experiencias, la segunda refiere exclusivamente a algo verbal totalmente arbitrario. Este autor, destaca que una correcta articulación de estos elementos resulta fundamental para la comprensión de un concepto geométrico, ya que en la actualidad los conceptos se adquieren principalmente sólo por medio de las definiciones y eso implica diversos problemas en los estudiantes, debido a que saber de memoria la definición del concepto no garantiza su comprensión, pero sí ayuda a la correcta formación de la imagen del concepto.

Con respecto al aprendizaje de la Geometría, su comprensión se basa en una formalización extensa de distintos niveles crecientes de comprensión, abstracción y rigor. Específicamente Duval (1998) y Marmolejo & Vega (2012) afirman que la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría involucran tres tipos de actividades cognitivas: la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento relacionado con procesos discursivos y la visualización, cuya atención recae en las representaciones espaciales. Si bien cada una puede ser adquirida, aprendida o enseñada de manera independiente o separada, la articulación entre ellas es requisito ineludible para asegurar el aprendizaje de la Geometría.

2.2.2 Razonamiento Geométrico

Razonar involucra aquellas actividades cognitivas necesarias para realizar deducciones basadas en reglas y supuestos específicos es por ello por lo que, se infiere que para razonar los estudiantes deben manejar ciertos conocimientos, los cuales son considerados como conceptos, redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones (MINEDUC, 2015).

Con respecto al Razonamiento Geométrico, Torres (2005) afirma que nace de la noción del espacio geométrico en los estudiantes, la cual se adquiere a través de dos momentos: uno de forma directa a través de la intuición geométrica, de naturaleza visual, que es creativo y subjetivo; y otro que se realiza en forma reflexiva, lógica de naturaleza verbal, que es analítico y objetivo. Resulta de gran importancia considerar ambos momentos, debido a que, aunque sean muy distintos ambos son complementarios, ya que la visualización permite la construcción de las relaciones espaciales, y dicha construcción resulta necesaria para lograr un análisis deductivo lógico. En este sentido, diversos autores han focalizado sus investigaciones en la visualización y el Razonamiento Geométrico (Duval, 1998; Fischbein, 1993; Gutiérrez & Jaime, 1998). Un marco que describe precisamente su completo desarrollo es el modelo de enseñanza y aprendizaje de van Hiele, el cual está constituido por la idea de que, a lo largo del proceso de aprendizaje de la Geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno, los cuales son enumerados del 1 al 5 (ver Tabla 5) según su grado de complejidad y van desde la visualización de los objetos geométricos hasta el rigor; estos serán analizados en el apartado 2.3.2.

En base a los párrafos anteriores y a lo planteado por Gutiérrez & Jaime (1998), se concluye que el Razonamiento Geométrico es aquel que involucra todas aquellas actividades cognitivas basadas en la realización de los procesos de reconocimiento y descripción, uso o formulación de definiciones, clasificación y demostración necesarios para realizar deducciones en Geometría.

2.2.3 Currículo chileno

Las Bases Curriculares constituyen, de acuerdo a la Ley General de Educación Ley N° 20.370 (LGE[5]), el documento principal del currículo nacional, en ellas se describen las bases para las asignaturas de Lengua y Literatura, Matemáticas, Ciencias Naturales, Historia Geografía y Ciencias Sociales, Inglés, Educación Física y Salud, Música, Artes Visuales, Orientación y Tecnología, para los cursos desde Séptimo Año Básico a Segundo Año Medio. Específicamente, para la asignatura de Matemáticas se espera que los estudiantes adquieran una sólida comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales mediante un

[5] Para más información de LGE, visitar https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1006043

trabajo deductivo y el pensamiento abstracto, dándole así sentido a sus experiencias a partir de premisas o símbolos matemáticos (MINEDUC, 2015).

El actual Currículo chileno posee una organización curricular basada en tres focos: las habilidades, actitudes y conocimientos. Con respecto a las habilidades, se espera que los estudiantes desarrollan cuatro habilidades en la asignatura de Matemáticas (i.e., resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar), las cuales se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 1: Habilidades Matemáticas

Habilidad	Definición
Resolver Problemas	El estudiante debe ser capaz de solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir.
Representar	Se plantea que los estudiantes transiten fluidamente desde la representación concreta hacia la pictórica para luego avanzar hacia un lenguaje simbólico.
Modelar	Es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla.
Argumentar y Comunicar	Se desarrolla principalmente al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos.

Fuente: Adaptada de MINEDUC (2015).

De acuerdo con la tabla anterior, MINEDUC (2015) afirma que estas habilidades se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de los nuevos conceptos matemáticos aprendidos. Además de ellas, dentro de las Bases Curriculares de Matemáticas también se promueve un conjunto de actitudes que derivan de los Objetivos de la Ley General de Educación y de los Objetivos de Aprendizaje Transversales, las cuales se orientan en el desarrollo social y moral de los estudiantes, siendo éstas:

Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.

Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.
Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.
Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.
Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones Matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.
Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas (MINEDUC, 2015, p. 101).

Las actitudes descritas anteriormente son objetivos de aprendizaje que se deben desarrollar de forma integrada con los conocimientos y las habilidades de la asignatura Matemáticas (MINEDUC, 2015). Con respecto a los conocimientos, se organizan de acuerdo con los niveles, por ejemplo, de Quinto a Sexto Año Básico se organizan en cinco Ejes Temáticos (Números y Operaciones, Patrones y álgebra, Geometría, Medición y Datos y probabilidades) y de Séptimo Año Básico a Primer Año Medio en cuatro Ejes Temáticos (Números, Álgebra y funciones, Geometría y Probabilidad y Estadística). Además, dentro de cada uno de estos ejes, se puede desarrollar cada una de las habilidades descritas en Tabla 1.

A continuación, se presenta una tabla con los conocimientos matemáticos de Primero a Sexto Año Básico dividido según sus Ejes Temáticos.

Tabla 2: Conocimientos de Primero a Sexto Año Básico según eje temático

Eje	Descriptor
Números y operaciones	Se espera que desarrollen estrategias de cálculo mental y que aproximen números racionales. Además, se espera que reemplacen la representación pictórica por símbolos.
Patrones y Álgebra	Los estudiantes deben explicar y describir relaciones entre números, formas, objetos y conceptos. También, representar patrones en forma concreta, pictórica y simbólica, además de transportar de una forma de representación a otra.
Geometría	Se espera que reconozcan, visualicen, dibujen y describan características y propiedades de las figuras en 2D y 3D. Además, se busca que desarrollen el pensamiento espacial mediante la reflexión, traslación y rotación.
Medición	Se pretende que identifiquen características de los objetos y los cuantifiquen para posteriormente compararlos y ordenarlos.
Datos y probabilidades	Los estudiantes deben registrar, clasificar y leer información dispuesta en tablas y gráficos.

Fuente: Adaptado de MINEDUC (2012).

La tabla presentada anteriormente, es una versión simplificada de los descriptores de cada Eje Temático presentado en las Bases Curriculares. Profundizando en el eje de Geometría, se espera que los estudiantes aprendan a reconocer, visualizar y dibujar figuras, y a describir las características y propiedades de figuras 3D y figuras 2D. A continuación, se presenta una tabla con los conocimientos matemáticos de Séptimo Año Básico a Segundo Año Medio dividido según sus Ejes Temáticos.

Tabla 3: Conocimientos de Séptimo a Primer Año Medio según eje temático

Eje	Descriptor
Números	Los estudiantes trabajan la compresión de números y las operaciones entre ellos. Progresan desde los números enteros hasta los números reales.
Álgebra y Funciones	Se espera que los estudiantes comprendan la importancia del lenguaje algebraico para expresarse en Matemáticas.
Geometría	Se espera que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les permiten comprender el espacio y sus formas.
Probabilidad y estadística	Los estudiantes deberán realizar análisis, inferencias y obtener información a partir de datos estadísticos.

Fuente: Adaptado de MINEDUC (2015).

La tabla presentada anteriormente, es una versión simplificada de los descriptores de cada eje temático presentado en las Bases Curriculares. Enfatizando en el eje de Geometría, se espera los estudiantes específicamente deben ser capaces de comparar, medir, estimar magnitudes, analizar propiedades y características de diferentes figuras en 2D y 3D. Además de describir posiciones y movimientos utilizando coordenadas y vectores en el plano cartesiano, calcular perímetros, áreas y volúmenes.

Los programas de estudio proponen al docente una organización de los Objetivos de Aprendizaje dentro del año escolar, específicamente son una estimación aproximada que puede ser adaptada, de acuerdo con la realidad de los estudiantes y de su establecimiento educacional, con el propósito de facilitar al docente su quehacer en el aula. En la tabla 4, se presenta una versión simplificada de los contenidos para el eje de Geometría de Quinto Año Básico a Primero Año Medio, según los programas de estudio.

Tabla 4: Conocimientos geométricos según los programas de estudio vigentes de MINEDUC

Nivel	Contenidos
5°	Cálculo de áreas de triángulos y cuadriláteros, concepto de ángulo sexagesimal, representación de vértices de triángulos y cuadriláteros en el plano cartesiano y medición de ángulos y longitudes.
6°	Concepto de área y volumen en paralelepípedos, construcción de ángulos y determinación en rectas paralelas cortadas por una transversal, identificación de ángulos opuestos por el vértice y realización de teselados.
7°	Cálculo y desarrollo de las fórmulas de área de triángulos, paralelogramos, círculos y trapecios, perímetro del círculo e identifican vectores de forma concreta.
8°	Cálculo y estimación de área y volumen de prismas rectos y cilindros, explicar la validez del Teorema de Pitágoras, posición y movimiento de figuras en 2D y composición de rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio.
I°	Cálculo del área y volumen del cono, área de sectores y segmentos circulares, aplicación del Teorema de Tales, criterios de semejanza y de la homotecia en el plano cartesiano.

Fuente: Adaptado de (MINEDUC, 2013a, 2013b, 2016a, 2016b, 2016c)

En la tabla anterior, se puede apreciar una progresión de los contenidos desde Quinto Año Básico hasta Primer Año Medio, en la cual hay contenidos que se trabajan en distintos cursos, pero con un enfoque distintos, por ejemplo, el cálculo de áreas de figuras 2D y 3D se trabaja en los cinco niveles de la tabla, pero se enfoca a distintos tipos de figuras y distintos procesos (cálculo directo mediante fórmulas, desarrollo de las fórmulas y estimación de áreas utilizando otras figuras geométricas).

2.3 El modelo de van Hiele

En el año 1957, el matrimonio holandés formado por Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, observó que las tareas o problemas que proponían a sus estudiantes requerían, a veces, el uso de un vocabulario o propiedades que iban más allá de su nivel de razonamiento (Prat, 2016). Es por ello por lo que, en sus trabajos de tesis doctorales, presentaron, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría (van Hiele, 1957) y su respectiva aplicación (van Hiele-Geldof, 1957) logrando así desarrollar un modelo en el que “explican cómo el estudiante va recorriendo cinco niveles en su compresión de la Geometría y en cada uno de ellos establecen unas fases que permiten analizar el aprendizaje de dicha materia” (Cabello, 2013, p. 42).

El modelo diseñado por el matrimonio holandés básicamente es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, que está constituida bajo la idea de que, a lo largo del proceso de aprendizaje, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de cinco niveles secuenciales y ordenados. Además, cada uno de estos niveles requiere de la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se ve reflejado en una manera diferente de interpretarlos, definirlos y clasificarlos (Jaime, 1993). Según Jaime & Gutiérrez (1990) el modelo de Van Hiele consta, de dos aspectos fundamentales uno es el descriptivo, en el cual se establecen los niveles en los que progresa el razonamiento de los estudiantes (ver tabla 5), y otro el prescriptivo, en el que plantea a los docentes las directrices para ayudar a los estudiantes a progresar en los Niveles de Razonamiento Geométrico, llamadas fases de aprendizaje.

Durante el transcurso de los años, el modelo de los van Hiele fue teniendo una gran repercusión a nivel internacional, en donde la Unión Soviética fue una de las primeras en utilizar el modelo como base para el diseño de su currículo de Matemáticas, posteriormente, otros países hicieron diversos proyectos y adecuaciones curriculares en base al modelo, tales como Holanda, Estados Unidos, España, entre otros (Jaime, 1993). Dentro de los proyectos más importantes, está el Proyecto de Brooklyn (Fuys, Geddes, & Tischler, 1988), el cual fue fundamental para el desarrollo de las demás investigaciones a nivel internacional, ya que fueron los encargados de traducir los documentos de los van Hiele del holandés al inglés (Jaime, 1993).

Es importante hacer hincapié en que este modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría ha presentado bastantes variaciones con el transcurso de los años, debido a que el modelo que se conoce en la actualidad difiere bastante del presentado por los van Hiele en sus trabajos de tesis doctorales (van Hiele, 1957; van Hiele-Geldof, 1957). Existen cambios en la cantidad de niveles, la numeración y en su aplicación, debido a los constantes estudios realizados a nivel internacional (Aravena y Caamaño, 2013; van Hiele, 1957; van Hiele-Geldof, 1957).

2.3.1 Niveles de Razonamiento Geométrico

No existe unanimidad en cuanto a la numeración de los niveles, debido a que en algunas publicaciones los niveles van del 0 al 4, mientras que otros hablan de los niveles del 1 al 5 (Cabello, 2013). Además, en los estudios (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2016) solo se suele utilizar los primeros 4 niveles, ya que se ha demostrado que por lo general es extremadamente complejo lograr el último nivel (Jaime, 1993).

Además, en una etapa inicial el modelo comenzó siendo de carácter *discreto*, en otras palabras, solo de admitía la idea de estar en un nivel o en otro, pero con el transcurso de los años, diversos estudios cambiaron esa primera noción del modelo y descubrieron que en realidad los niveles de razonamiento tenían un carácter continuo (Crowley,1989).

A continuación, se presenta una tabla de cada nivel de Razonamiento Geométrico de van Hiele.

Tabla 5: Niveles de Razonamiento Geométrico de van Hiele

Nivel	Nombre	Descripción
1	Visualización	Realizan una descripción de los objetos en base a su aspecto físico, sin distinguir explícitamente sus componentes ni propiedades Matemáticas.
2	Análisis	Reconocen los componentes y propiedades Matemáticas de un objeto o concepto. Además, establecen relaciones entre objetos y componentes, pero de manera experimental. No pueden hacer descripciones formales, sólo generalizaciones.
3	Deducción Informal	Realizan una relación lógica entre propiedades Matemáticas y siguen razonamientos deductivos, pero no entienden la función de los elementos de un sistema axiomático matemático (axiomas, definiciones, etc.)
4	Deducción Formal	Realizan razonamientos deductivos, entienden la función de axiomas, hipótesis, definiciones, etc. Sin embargo, los estudiantes siguen sin adquirir una visión global de los sistemas axiomáticos y no entienden la necesidad de un razonamiento riguroso.
5	Rigor	Los estudiantes entienden la necesidad de razonamiento, son capaces de escribir pruebas abstractas en diferentes sistemas axiomáticos, analizar y comparar dos sistemas axiomáticos.

Fuente: Adaptado de Gutiérrez & Jaime (1998) y Burger & Shaughnessy (1986)

En la tabla anterior, se presentó una versión simplificada de los descriptores de cada nivel de Razonamiento Geométrico según el modelo de van Hiele, en base a los trabajos de Gutiérrez & Jaime (1998) y Burger & Shaughnessy (1986). Con respecto al nivel de visualización, se infiere que un estudiante solo es capaz de describir figuras en base a sus atributos físicos, tales como el tamaño, medir con instrumentos, identificar formas de figuras geométricas o la cantidad de lados de una figura, pero sin identificar las propiedades matemáticas determinantes de cada una, ya que solo puede basarse en atributos físicos. En relación con el nivel de análisis, ya ocurre un cambio significativo con respecto al nivel anterior, ya que aquí ya son capaces de identificar los componentes y las propiedades matemáticas de cada figura, pero aún no puede realizar razonamientos deductivos. Con respecto al nivel 3 de deducción informal y al nivel 4 de deducción formal, se observa que los estudiantes ya son capaces de articular todos aquellos componentes y propiedades matemáticas de las figuras y realizar razonamientos deductivos, pero no son capaces de comparar los distintos sistemas axiomáticos, la única diferencia entre ambos niveles es que en el 3 se utiliza un lenguaje informal y en el 4 uno formal. Finalmente, en el nivel de rigor, ya son capaces de realizar comparaciones de distintos sistemas axiomáticos y captan la Geometría en forma abstracta. Ejemplos de estos niveles serán dados en el Capítulo III.

A continuación, se presenta una tabla de las características de los procesos matemáticos presentes en cada nivel de Razonamiento Geométrico desde el 1 al 4.

Tabla 6: Características de los procesos matemáticos presentes en cada nivel

Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento y descripción	De atributos físicos	De propiedades Matemáticas		
Uso de definiciones		Definiciones con estructura simple	Definiciones con cualquier estructura	Se acepta la equivalencia de definiciones
Formulación de definiciones	Listado de propiedades físicas	Listado de propiedades Matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Se demuestra la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusiva basada en atributos físicos	Inclusiva (exclusiva) si la estructura lógica es simple (compleja)	Inclusiva o exclusiva de acuerdo con las definiciones usadas	
Demostración		Empírica, verificación en ejemplos	Deductiva, abstracta, informal	Deductiva, abstracta, lógico-formal

Fuente: Extraído de Aravena et al. (2016)

Las espacios en blanco de la tabla 6 corresponden a aquellos procesos matemáticos que no tienen características específicas en esos niveles de razonamiento. Con respecto a los procesos presentes en la tabla anterior, el de reconocimiento y descripción se asocia solo a los niveles 1 y 2, ya que en los niveles 3 y 4 se asume este proceso como conocimiento previo a los procesos propios del nivel. En relación con la formulación de definiciones, aplica para todos los niveles desde el 1 al 4, sólo varía en que en el nivel 1 las definiciones se forman en base a aspectos físicos, en el 2 en base a propiedades matemáticas de estructura simple, en el 3 en base a las propiedades matemáticas, pero en forma de conjunto y en el 4 en que pueden demostrar la equivalencia de distintas definiciones. Con respecto al proceso de clasificación, está descrito desde el nivel 1 hasta el 3, en el 1 sólo se hace referencia a clasificaciones de tipo exclusivas, ya que solo pueden considerar atributos físicos y no propiedades matemáticas, en el 2 pueden realizar los mismos tipos de clasificaciones que en el nivel 1, pero además, pueden realizar clasificaciones de tipo inclusivas si la estructura lógica es simple y no compleja, en el nivel 3, pueden realizar cualquier tipo de clasificación independiente si poseen estructura lógica simple o no. Finalmente, en relación a el proceso de demostración, solo está descrito desde el nivel 2 al 4, ya que en el 1 no conocen propiedades matemáticas y por ello no podrían generar demostraciones, en el nivel 2 solo pueden realizar demostraciones y verificaciones en base a ejemplos, en el nivel 3 realizan razonamientos deductivos con lenguaje informal y en el 4 realizan demostraciones con un razonamiento deductivo y un lenguaje formal propio del nivel.

2.3.2 Resumen de la literatura sobre la continuidad de los niveles de Razonamiento Geométrico de van Hiele

Al comienzo se pensaba que los niveles de Razonamiento Geométrico de van Hiele tenían un carácter discreto, y que sólo se podía estar en un nivel o en otro, pero con el paso de los años distintos investigadores comenzaron a identificar ciertos inconvenientes en sus investigaciones, los cuales se resumirán a continuación en base a lo planteado por Jaime (1993).

Para Usiskin (1982) el problema principal de su investigación radicó en la forma de asignar niveles a sus estudiantes, debido a que la decisión del criterio debía ser referente al número mínimo de respuestas correctas que se exigía para considerar que un estudiante había alcanzado un cierto nivel de Razonamiento Geométrico, es por ello que en esta investigación se plantea la posibilidad de la existencia de la transición de los niveles, por ejemplo "del nivel 2 al 3 podría estar caracterizada por alcanzar un criterio alto en los niveles 1 y 2 y algún criterio intermedio en el nivel 3" (Usiskin, 1982, p. 33).

En Fuys et al. (1988) también se observó dos niveles consecutivos por parte de algunos de sus estudiantes, los cuales por lo general respondían a los criterios de nivel inferior ante una situación que les provocara inseguridad. La conclusión de los investigadores fue que no está claro que el paso de un nivel a otro sea discreto, aunque según ellos sí se producen momentos de salto o avance brusco. Así, utilizaron el símbolo 2-3 para indicar la transición entre los niveles 2 y 3 ya que "los estudiantes formularon propiedades y dieron algunos argumentos deductivos simples (usualmente con la guía del entrevistador), pero no fueron capaces de hacer demostraciones por sí mismos" (Fuys et al. 1988, p.82).

En consecuencia, Crowley (1989) planteó que el diseño de ítems para un test de evaluación del nivel de razonamiento debe contemplar el paso de un nivel al siguiente (carácter discreto de los niveles) o la transcición (carácter contínuo). En este último caso, indica que "eso querría decir que un estudiante debe demostrar una proporción mucho mayor de la actividad asociada con un nivel antes de que se considere que lo domina" (Crowley, 1989, p. 212). También el investigador fue el primero en proponer para futuros estudios la necesidad de investigar la cantidad de adquisición de cada nivel. Así, también Burger & Shaughnessy (1990) observaron que algunos estudiantes fluctuaban en sus respuestas dos niveles consecutivos de Razonamiento Geométrico, siendo clasificados como estudiantes en transición entre los dos niveles.

2.3.3 Instrumentos de evaluación de los Niveles de Razonamiento Geométrico de Van Hiele

Según García, Ramos, Díaz de León & Olvera (2007) los instrumentos, son herramientas utilizadas para la recolección de información, estos resultan fundamentales para la medición de conocimientos, la cual constituye una actividad presente en la práctica docente, ésta a su vez aproxima al monitoreo y evaluación del proceso educativo.

Debido al alcance que posee la Geometría en el currículo, es que adquiere gran importancia diseñar instrumentos válidos y confiables que permitan cuantificar el nivel de Razonamiento Geométrico alcanzado por los estudiantes. Además, es importante elegir bien el tipo de instrumento a seleccionar, debido a que la entrevista clínica demora demasiado en su aplicación y revisión, entonces no se podría aplicar a una muestra grande de individuos, de este modo, el cuestionario podría ser una mejor opción, ya que se puede aplicar al mismo tiempo a todos los individuos en estudio.

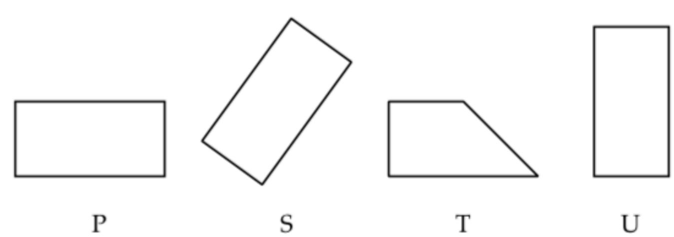
De acuerdo con varios autores, existe un consenso en que las entrevistas clínicas son aquellas que suministran mayor información en cuanto al nivel de Razonamiento Geométrico, la razón radica básicamente en que se considera que la interacción social del estudiante lo llevará a realizar discusiones en las cuales se ve obligado a realizar diversas habilidades. Algunos ejemplos de entrevistas clínicas son las utilizadas por Burger & Shaughnessy (1986) y la utilizada por Fuys et al. (1988). Sin embargo, debido al tiempo que consumen, las entrevistas clínicas sólo se pueden realizar en aquellos estudios que posean pocos estudiantes a estudiar, es por ello por lo que en la gran mayoría de los estudios han utilizado cuestionarios escritos, debido a que el enfoque es aplicarla a un gran número de estudiantes. En relación con los cuestionarios de selección múltiple, poseen grandes ventajas a la hora de su corrección y a que se puede aplicar fácilmente a un gran número de estudiantes. Algunos ejemplos claves de este tipo de test se ven reflejado en los trabajos de Usiskin (1982) y el de Gutiérrez & Jaime (1987). Las desventajas de este tipo de test, comienza al momento de asignar previamente un nivel de Razonamiento Geométrico a una pregunta, debido a que existen casos en que el estudiante puede elegir la respuesta correcta, pero utilizando un tipo de razonamiento que no corresponde al asignado previamente para esa pregunta, incluso puede existir la posibilidad del azar en el cual no se emplea ningún tipo de razonamiento. Es por ello, que varios autores pusieron en duda la fiabilidad de este tipo de instrumentos como fue el caso de Crowley (1989) en donde concluye que resultaría muy complejo diseñar un test de selección múltiple que realmente sirva para medir con exactitud los niveles de Razonamiento Geométrico de van Hiele, sin embargo, en las mediciones PISA y TIMMS utilizan un sistema de herramientas psicométricas y análisis de Rasch que permiten disminuir ambigüedades en las respuestas. Además, existen cuestionarios escritos mixtos, como es el caso de Mayberry (1983) y Gutiérrez, Jaime & Fortuny (1991).

Ejemplificando lo anterior, Usiskin (1982) realizó un instrumento de tipo test de selección múltiple en el que a cada pregunta se le asigna un único nivel de razonamiento. El inconveniente de este tipo de test radica en que no reflejan la razón por la cual el estudiante escoge una de las alternativas, entonces en algunos casos, surgen estudiantes que eligen la respuesta correcta sin utilizar el nivel de Razonamiento Geométrico correspondiente al previamente establecido para esa pregunta (Jaime, 1993).

A continuación, se presenta parte del cuestionario de selección múltiple elaborado por Gutiérrez & Jaime (1987).

Figura 1: Extracto de cuestionario de Gutiérrez & Jaime (1987)

¿Cuál de las siguientes figuras no es un rectángulo?



a) S no es rectángulo
b) U no es rectángulo
c) T no es rectángulo
d) S y T no son rectángulos
e) P y U no son rectángulos

Fuente: Adaptado de Jaime (1993)

Con respecto a la figura anterior es un ítem de nivel 1, en el cual se pedía identificar los rectángulos entre los siguientes cuadriláteros y la alternativa c) era la correcta ya que hacía alusión a que T no es rectángulo, pero Fuys (1987) comentó que se puede elegir la alternativa c) en base a niveles distintos de razonamiento, ya que un razonamiento de nivel 1 sería que simplemente diga que no tiene forma de rectángulo, una de nivel 2 que no posee todos sus ángulos rectos y una de nivel 3 sería decir que es un trapecio y los trapecios no son rectángulos, ya que no cumplen con las propiedades necesarias de los rectángulos. Posterior a ello, se empezó a cuestionar la fiabilidad de este tipo de instrumentos y se comenzó sólo a utilizar entrevistas clínicas y cuestionarios con preguntas de tipo abiertas.

Con respecto a la evaluación de los instrumentos, de un comienzo se seguía la idea de que poseían carácter discreto, entonces a cada pregunta se le atribuía un único nivel y se evaluaba de acuerdo con si la respuesta era correcta o incorrecta, pero con el transcurso de los años esta idea perdió fuerza, ya que los estudios realizados dieron cuenta de la continuidad de los niveles. Por lo anterior, se comenzó a utilizar el método de grados de adquisición de Jaime (1993), el cual admite la continuidad de los niveles.

2.3.4 Método de grados de adquisición

El método de grados adquisición de Jaime (1993) fue diseñado con el fin de ampliar y clasificar la información obtenida sobre los Niveles de Razonamiento Geométrico en los instrumentos de evaluación aplicables al modelo de van Hiele, en él se describen los tipos de respuestas esperadas en la aplicación de un instrumento, los distintos tipos de grados de adquisición, su respectiva ponderación y cómo hacer el cálculo matemático. Este método puede ser aplicado en instrumentos con respuestas libres, tales como cuestionarios o entrevistas clínicas, en ellos el evaluador primero deberá calcular la ponderación de cada respuesta según los siete tipos de respuesta que se describirán en Tabla 7, posteriormente calcular una media de las ponderaciones en cada nivel e interpretar las medias obtenidas según el grado de adquisición de acuerdo con Tabla 8.

A continuación, se muestra una tabla con los tipos de respuestas esperadas según el método de grados de adquisición y su respectiva ponderación asignada, en base a los trabajos realizados por Jaime (1993) y Aravena & Caamaño (2013).

Tabla 7: Tipos de respuestas según el método de grados de adquisición

<table>
<tr><th>Tipo</th><th>Correcto</th><th>Incorrecto</th><th>Grado de adquisición</th><th>Ponderación (%)</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">No es codificable o no es contestada</td><td>Nulo</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>Inconsistente y muy incompleta</td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Breve y con escasos argumento (muy incompleta)</td><td></td><td>Bajo</td><td>25</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">Refleja dos niveles de razonamiento</td><td>Intermedio</td><td>50</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>Posee errores matemáticos o siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución, pero con un proceso de razonamiento válido</td><td rowspan="2">Alto</td><td>75</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Respuesta completa, pero faltan algunos argumentos</td><td></td><td>80</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Respuesta completa. Da solución al problema.</td><td></td><td>Completo</td><td>100</td></tr>
</table>

Adaptado de Aravena & Caamaño (2013) y Jaime (1993).

En la tabla anterior, se muestran los siete tipos posibles de respuesta, los cuales están clasificados de acuerdo con si está correcta la respuesta (i.e es acorde o adecuado a las condiciones planteadas) o incorrecta (i.e no es acorde a lo esperado, ya que posee algunas faltas y errores), por otro lado, los espacios en blanco indican que no hay ponderación de puntaje para ese descriptor. La respuesta tipo 1, refleja un grado de adquisición nulo y entrega un 0% de ponderación, se refiere principalmente a aquellas que no poseen respuesta, con respuestas no codificables o que no proporcionan ninguna información sobre su nivel de razonamiento. El tipo 2, refleja un grado de adquisición bajo y entrega un 20% de ponderación, son aquellas respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero que, si tienen indicios de la utilización de algún nivel de Razonamiento Geométrico, por lo general son muy breves o no contestan directamente la pregunta planteada. Las respuestas del tipo 3, reflejan un grado de adquisición bajo y entregan un 25% de ponderación, se refieren a aquellas respuestas que son matemáticamente correctas, pero muy incompletas. Las de tipo 4, poseen un grado de adquisición intermedia y entrega un 50% de ponderación, son aquellas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos, pueden estar correctas o incorrectas, pero son bastante completas sus respuestas. El tipo de respuesta 5, poseen un grado de adquisición alto y entrega un 75% de ponderación, y hacen referencia a aquellas respuestas que están bastante completas, pero poseen algún error matemático. Las respuestas de tipo 6 poseen un grado de adquisición alto y entrega un 80% de ponderación, corresponden aquellas que están matemáticamente correctas y están casi completas. Finalmente, las respuestas de tipo 7 poseen un grado de adquisición completo y entregan un 100% de ponderación, corresponden a aquellas que son matemáticamente correctas, completas y reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado (Jaime, 1993). Ejemplo de lo anterior, se encuentra en el Anexo 1.

A continuación, se muestra una tabla con las características de los grados de adquisición, las cuales permitirán al evaluador interpretar los datos obtenidos en el cálculo de las medias de las ponderaciones de cada nivel, según Jaime (1993).

Tabla 8: Caracterización de los grados de adquisición

Ponderación (%)	Grado de Adquisición	Características
[0, 15[	Nula	No se emplean las características de este nivel de razonamiento.
[15, 40[	Baja	Menciona las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero de manera incompleta. Es frecuente que recurra al nivel inferior de razonamiento.
[40, 60[	Intermedia	El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que en algunas ocasiones hay saltos frecuentes entre 2 niveles de razonamiento.
[60, 85[	Alta	Nivel habitual de trabajo, en él se produce con poca frecuencia un retroceso de nivel, pero si se utiliza en ocasiones herramientas inadecuadas a este nivel de razonamiento.
[85, 100]	Completa	Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios de este nivel de razonamiento.

Adaptado de Jaime (1993).

En la tabla anterior, se muestra una ponderación distinta a la de Tabla 7, debido a que el entrevistador deberá utilizar esta tabla después de calcular la media de las ponderaciones y en base a eso verificar en cuál de los rangos se encuentran las medias obtenidas. En el caso de una media de ponderaciones que se encuentre entre [0, 15[, se tiene que el grado de adquisición en ese nivel es nulo, ya que no emplea las características propias del nivel. Entonces lo más probable es que no comprenda clases en este nivel. Para una ponderación que se encuentre entre [15, 40[, se tiene que el grado de adquisición en ese nivel es bajo, ya que emplea algunas de las características propias del nivel, pero con frecuencia recurre a niveles inferiores de razonamiento, entonces lo más probable es que no comprenda clases en este nivel. En el caso de una ponderación que se encuentre entre [40, 60[, se tiene que el grado de adquisición en ese nivel es intermedio, entonces emplean varias las características propias del nivel y del nivel anterior, por lo tanto, se puede interpretar que están en tránsito entre ambos niveles, por ellos probablemente comprendan bastantes elementos de clases enfocados en ambos niveles. Para una ponderación que se encuentre entre [60, 85[, se tiene que el grado de adquisición en ese nivel es alto, ya que emplean la mayoría de las características propias del nivel, entonces lo más probable es que entiendan clases en ese nivel. Y finalmente, en el caso de una ponderación que se encuentre entre [85, 100], se tiene que el grado de adquisición en ese nivel es completo, porque emplean todas las características propias del nivel, entonces comprenderían completamente las clases en ese nivel.

Por otro lado, si un estudiante se encuentra por ejemplo en el nivel 3 con un 60% de adquisición, también indica que se encuentra con un 100% de adquisición en el nivel 1, un 100% de adquisición en el nivel 2, un 0% de adquisición en el nivel 4 y un 0 % de adquisición en el nivel 5, ya que el método admite la secuencialidad de los niveles.

2.4 Resumen de Capítulo

En esta sección se describe, de manera global, las diferentes perspectivas teóricas que dan sustento al Seminario de Titulación, en particular aquellas sobre los procesos cognitivos que hay detrás del aprendizaje de la Geometría, el Currículo chileno vigente y diversas investigaciones en torno al modelo de van Hiele, el cual es un método de enseñanza y aprendizaje de la Geometría que posee una serie de niveles y fases que permiten medir y elevar el nivel de Razonamiento Geométrico de los estudiantes.

CAPÍTULO III: Diseño del cuestionario

3.1 Introducción

En el presente capítulo se describirá y justificará el diseño utilizado en la creación del cuestionario de este Seminario de Titulación, específicamente, se mostrará en detalle el enfoque y diseño, las pautas seguidas para la elaboración y diseño del instrumento y finalmente se detallará sobre el tipo de validación seleccionada y el proceso de este mismo.

3.2 Proceso de elaboración del cuestionario

La elaboración del cuestionario se realizó en base al Modelo de van Hiele (van Hiele-Geldof, 1957; van Hiele, 1957) el cual es utilizado para medir el nivel de Razonamiento Geométrico que poseen los estudiantes.

Los contenidos de Geometría en que se basa la construcción de la evaluación son extraídos a partir de los programas de estudio de Matemáticas que propone el ministerio de educación (MINEDUC, 2013a, 2013b, 2016a, 2016b, 2016c) para Quinto, Sexto, Séptimo y Octavo Año Básico (Ver Anexo 2), es importante destacar que no se considerarán los contenidos de Primero a Cuarto Año Básico, debido a que estos contenidos forman parte de los aprendizajes esperados necesarios para que los estudiante se enfrenten a estos cursos de ciclo superior.

Posteriormente, se realizó una progresión de contenidos (ver Anexo 3), con el objetivo de determinar cuál es la progresión del desarrollo de los contenidos claves de Geometría a través del ciclo de la Educación Básica.

A partir de lo anterior, se determinaron cuáles son los contenidos que articulan este eje y seguidamente se determinaron cuáles son los conocimientos claves que están presentes para el programa de Primer Año Medio y se compararon con los que se habían obtenido del análisis anterior. De acuerdo con esta revisión, se identificaron los siguientes contenidos como conocimientos claves que se deben adquirir durante el ciclo de Educación Básica y que son necesarios para iniciar la Educación Media:

- Describir propiedades y clasificaciones de figuras 2D y 3D.
- Calcular de áreas de figuras 2D y 3D.
- Estimar y calcular el volumen de figuras 3D.
- Identificar semejanza de figuras.
- Realizar y componer transformaciones isométricas de forma pictórica y con vectores.
- Comprender la suma de los ángulos interiores de un polígono regular.
- Aplicar y explicar la validez del Teorema de Pitágoras.

A partir de lo anterior, se elaboró un instrumento compuesto por 5 ítems con preguntas de tipo abiertas, cada uno se compone por distintas preguntas que abarcan los contenidos del Currículo chileno, según la progresión de contenidos elaborada (Ver Anexo 3), las cuales se resumen en la siguiente tabla según su contenido y nivel de Razonamiento Geométrico de van Hiele.

Tabla 9: Preguntas del cuestionario según contenidos

Ítem	n°	Contenido	Niveles	Autor
1	1.1	Describir propiedades de figuras 2D y 3D	1 y 2	Adaptada de (Jaime, 1993)
	1.2	Describir propiedades y clasificaciones de figuras 2D y 3D	1 y 2	Adaptada de (Jaime, 1993)
2	2.1	Cálculo del área de figuras 2D	2	Elaboración propia
	2.2	Cálculo del área de figuras 2D	2	Elaboración propia
	2.3	Cálculo del área y volumen de figuras 3D	2	Elaboración propia
	2.4	Desarrollar fórmulas de área y volumen de figuras 3D	2	Elaboración propia
	2.5	Desarrollar fórmula de volumen de figuras 3D	3 y 4	Elaboración propia
	2.6	Estimar fórmula de volumen de figuras 3D	2 y 3	Elaboración propia
3	3.1	Identificar semejanza de figuras	1	Adaptada de Aravena & Caamaño (2016)
	3.2	Identificar ejes de simetría	2	Adaptada de (Jaime, 1993)
	3.3	Realizar traslaciones	2	Elaboración propia
	3.4	Utilizar vectores para la traslación	3	Elaboración propia
	3.5	Componer transformaciones isométricas en el plano	3	Elaboración propia
	3.6	Componer transformaciones isométricas en el plano	3	Elaboración propia
4	4.1	Conocer la suma de los ángulos interiores de un triángulo	2	Elaboración propia
	4.2	Conocer la suma de los ángulos interiores de un cuadrado	2	Elaboración propia
	4.3	Conocer la suma de los ángulos interiores de un hexágono	2	Elaboración propia
	4.4	Comprender las relaciones entre ángulos interiores polígonos	3	Elaboración propia
5	5.1	Aplicar el Teorema de Pitágoras	1 y 2	Elaboración propia
	5.2	Aplicar el Teorema de Pitágoras	2	Elaboración propia
	5.3	Comprender la validez del Teorema de Pitágoras	3	Elaboración propia

En la tabla posterior, se pueden apreciar los contenidos y los Niveles de Razonamiento Geométrico presentes en 21 preguntas, distribuidas en 5 ítems distintos según la progresión de contenidos realizada (ver Anexo 3), de esas preguntas 4 fueron adaptadas de otros cuestionarios (Aravena & Caamaño, 2016; Jaime, 1993) y el resto fue de elaboración propia, las cuales fueron analizadas y corregidas en dos congresos.

3.3 Cuestionario

El instrumento presentado en este Seminario de Titulación se espera que en un futuro sea aplicado por docentes de Matemáticas dentro del aula de clases, por lo cual se optó por un instrumento que no requiera de demasiado tiempo en su aplicación y posterior corrección, pues será el /la docente de asignatura quien deberá corregir y determinar niveles, es por ello, que la entrevista clínica no es un instrumento pertinente dentro del contexto planteado. Además, se debió reducir al mínimo la posibilidad de generar preguntas que admitan ambigüedades, es por ello que no se utilizó un cuestionario de tipo cerrado sino un cuestionario tipo abierto (ver Anexo 4) con su respectiva pauta para su aplicación (ver Anexo 5).

Además, se optó por el curso de Primer Año Medio, ya que se considera que es un curso que presenta un gran desafío para los docentes que imparten clases, debido a que hay cambio en el ciclo de escolarización y por ello, los docentes por lo general se ven enfrentados a una gran diversidad dentro del aula de clase, tanto en contextos como en niveles de razonamiento, por lo cual este tipo de instrumento facilita la labor del docente, ya que así podrá elaborar secuencias metodológicas más atingentes al nivel de Razonamiento Geométrico de los estudiantes.

A continuación, se presenta una tabla con la cantidad de preguntas del cuestionario asociadas a cada nivel de Razonamiento Geométrico de van Hiele.

Tabla 10: Cantidad de preguntas asociadas a cada nivel de Razonamiento Geométrico de van Hiele

Niveles	Cantidad de preguntas
1	4
2	14
3	7
4	1
5	0

En la tabla anterior, se aprecia una clara diferencia entre la cantidad de preguntas asociadas a cada nivel de Razonamiento Geométrico y esto se debe a que, el cuestionario se enfocó en el currículo chileno y éste no desarrolla todos sus contenidos en base a los cinco Niveles de Razonamiento, entonces al momento de diseñar el cuestionario la mayoría de las preguntas estuvieron focalizadas en el nivel 2. Con respecto al nivel 4 y 5, se tiene que para el nivel 4 sólo hay un contenido que se desarrolla hasta el nivel 4 y no hay ninguno que llegue al nivel 5. Pero se trató de seguir la idea de tener al menos 4 preguntas de cada nivel de razonamiento distintos.

A continuación, se presenta una tabla que relaciona cada pregunta con el nivel de escolarización en que se debió haber estudiado cada contenido.

Tabla 11: Preguntas asociadas a niveles de escolarización

Nº de pregunta	Nivel de escolarización	Contenidos	Nivel de Razonamiento Geométrico
1.1	5º	Describir propiedades de figuras 2D y 3D	1 y 2
1.2	5º y 7º	Describir propiedades y clasificar figuras 2D y 3D	1 y 2
2.1	5º	Cálculo del área de figuras 2D	2
2.2	6º	Cálculo del área de figuras 2D	2
2.3	6º	Cálculo del área y el volumen de figuras 3D	2
2.4	8º	Desarrollar fórmulas de área y volumen de figuras 3D	2
2.5	8º	Desarrollar fórmula de volumen de figuras 3D	3 y 4
2.6	8º	Estimar fórmula de volumen de figuras 3D	2 y 3
3.1	5º	Identificar semejanza de figuras	1
3.2	5º	Identificar ejes de simetría	2
3.3	5º	Realizar traslaciones	2
3.4	7º	Utilizar vectores para la traslación	3
3.5	8º	Componer trasformaciones isométricas en el plano	3
3.6	8º	Componer transformaciones isométricas en el plano	3
4.1	6º	Conocer la suma de los ángulos interiores de un triángulo	2
4.2	6º	Conocer la suma de los ángulos interiores de un cuadrado	2
4.3	7º	Conocer la suma de los ángulos interiores de un hexágono	2
4.4	7º	Comprender las relaciones entre los ángulos interiores de un polígono	3
5.1	8º	Aplicar el Teorema de Pitágoras	1 y 2
5.2	8º	Aplicar el Teorema de Pitágoras	2
5.3	8º	Comprender la validez del Teorema de Pitágoras	3

La tabla anterior, resulta de gran utilidad para el docente, debido a que éste podrá además identificar el nivel de escolarización real y eso podría permitir un mejor alineamiento de las instituciones educativas, ya que se podría trabajar en forma conjunta con otros docentes y analizar porque hay problemas en ciertos contenidos.

A continuación, se mostrará un ejemplo de una de las preguntas del cuestionario (Figura 2) y sus posibles respuestas (Figura 3) dependiendo del nivel de Razonamiento Geométrico.

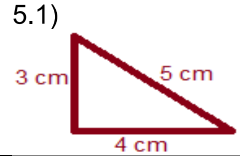
Figura 2: Pregunta 5.1 del cuestionario

Dibuje un bosquejo de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean de 3cm y 4cm. Luego, calcule el tercer lado del triángulo rectángulo e identifique su nombre.

En la pregunta enunciada en la Figura 3 se le solicita al estudiante que dibuje un bosquejo de la situación descrita y que encuentre la medida del lado que falta del triángulo, pero no necesariamente se hace alusión al uso del Teorema de Pitágoras, ya que el estudiante también podría encontrar el lado faltante utilizando solo una regla.

A continuación, se detallan los descriptores de respuestas, ejemplos de respuestas asociadas a cada descriptor, una justificación de la asignación de nivel de y el nivel de Razonamiento Geométrico.

Figura 3: Rúbrica de Pregunta 5.1

Descriptor	**Nivel**	**Justificación**	**Idea de respuestas esperadas**
Reconocimiento Uso de definiciones	1	Determina experimentalmente, haciendo un dibujo y mediante el uso de instrumentos (regla) el tercer lado del triángulo rectángulo.	5.1) 
Reconocimiento Uso de definiciones y fórmulas.	2	Determina el valor del tercer lado del triángulo rectángulo mediante la aplicación de la fórmula del Teorema de Pitágoras.	5.1) $x^2 = 4^2 + 3^2$ $x^2 = 16 + 9$ $x^2 = 25$ $x = 5$

En la figura anterior, se pueden observar dos de las respuestas más típicas a este tipo de preguntas, la primera se justifica como nivel 1, ya que el descubrimiento del tercer lado fue descubierto de forma empírica y sin conocer propiedades matemáticas. Luego en la respuesta de nivel 2, se puede justificar la existencia de ese nivel debido a que el estudiante necesita conocer la fórmula del Teorema de Pitágoras para poder encontrar el valor del tercer lado.

3.4 Evaluación e interpretación del cuestionario

Para la evaluación del cuestionario presentado en este Seminario de Titulación, es necesario que el docente utilice las “Pautas para la evaluación e interpretación de los niveles de Razonamiento Geométrico” (ver Anexo 6), la “Rúbrica de respuestas esperadas” (ver Anexo 7) y el “Reporte final de cada estudiante” (ver Anexo 8), ya que dentro de ellos encontrará toda la información necesaria para evaluar e interpretar las respuestas obtenidas en cada cuestionario.

Específicamente, dentro del Anexo 6 el docente se encontrará con una serie de pasos para la evaluación de los niveles, de los cuales el primero hace referencia a la determinación de los niveles de Razonamiento Geométrico de van Hiele, mediante descriptores de acuerdo con los cuatro tipos de procesos presentes en el Razonamiento Geométrico, los cuales se profundizaron en el apartado 2.3.2, y además, explica que hacer en el caso de tener preguntas con respuestas de 2 o más Niveles de Razonamiento Geométrico. Por ejemplo, si las respuestas de la de la pregunta 5.1 hacen alusión a el nivel 1 y 2 de razonamiento y un estudiante responde en base a el nivel 2, se le otorga un 100% de adquisición en el nivel 1 y un N% de adquisición en el nivel 2.

Posteriormente, en el Anexo 6 se explica la ponderación y grado de adquisición de cada respuesta, la cual fue explicada en el apartado 2.4.3 y además se explican ejemplos, tales como, si un estudiante responde la pregunta 1.1 en base a propiedades matemáticas con un proceso de razonamiento válido, pero con algunos errores, se deberá asumir que posee un grado de adquisición completo para el nivel 1 en ese contenido, ya que su argumento es en base a atributos matemáticos (nivel 2) y no físicos (nivel 1) y se deberá realizar el análisis del tipo de respuesta según el nivel 2, el cual posee un 75% de ponderación y se asocia a un grado de adquisición alta del nivel.

Luego, se le pide al docente que complete el "Reporte final de cada estudiante" (ver Anexo 8), en el cual deberá anotar las ponderaciones de cada pregunta según nivel y realizar una media de esas ponderaciones por cada Nivel de Razonamiento. A continuación, la Figura 9 representa un ejemplo de cómo contestar la rúbrica.

Figura 4: Ejemplo del reporte

NIVEL 3

Pregunta	Ponderación (%)
2.5	80
2.6	50
3.4	0
3.5	25
3.6	20
4.4	50
5.3	25
Media ponderaciones nivel 3	**35,71**

La figura anterior, representa un ejemplo de las tablas que deberá rellenar el evaluador, en este caso se colocaron ponderaciones aleatorias, ya que solo es un ejemplo. Para el cálculo de la media de todas las ponderaciones de las preguntas asociadas al nivel 3 de Razonamiento Geométrico, se tiene que realizar una suma de todas las ponderaciones asociadas al nivel y dividir el resultado por la cantidad de preguntas (en este caso son 7), lo cual da un resultado final un 35,71%. Posteriormente, se deberá realizar una interpretación de los datos obtenidos, los cuales se resumen en la Tabla 8 ubicada en el Capítulo II, y para este caso indican que hay una adquisición baja del nivel 3 de Razonamiento Geométrico de van Hiele y que el estudiante probablemente no será capaz de comprender todas las características, métodos y exigencias propias del nivel, por lo tanto, no comprenderá en su totalidad las clases en ese nivel y será más adecuado realizarle clases en nivel 2.

3.5 Resumen de Capítulo

En este capítulo se ha presentado una descripción del diseño del cuestionario, el cual detallaba su proceso de elaboración, la justificación del tipo de instrumento elegido, parte del cuestionario y su respectiva rúbrica, las pautas para medir los grados de adquisición de los niveles de Razonamiento Geométrico de van Hiele y finalmente, cómo interpretar los datos obtenidos.

CAPÍTULO IV: Discusión y Conclusión

El motivo de esta propuesta surgió porque al inicio de la Educación Media chilena, ocurre un cambio de ciclo de escolarización (de Enseñanza Básica a Enseñanza Media) y en la mayoría de las ocasiones, los docentes se ven enfrentados a estudiantes que provienen de diversos contextos, con distintos conocimientos previos, habilidades y actitudes. Entonces, podría resultar muy complejo para el docente elaborar secuencias didácticas que realmente se adapten a los conocimientos y habilidades que poseen sus estudiantes, de hecho, es posible que el docente no logre generar aprendizajes, ya que podría estar elaborando sus secuencias metodológicas en base a un nivel de razonamiento superior del que poseen sus estudiantes. Si bien existen algunos cuestionarios basados en el modelo de van Hiele, ninguno está enfocado en los programas de estudio actualizados.

Es por ello, que el objetivo principal del presente Seminario de Titulación fue diseñar un instrumento alineado con los programas de estudio actualizados y que permita a los docentes de Matemáticas de Enseñanza Media medir el nivel Razonamiento Geométrico de los estudiantes que ingresan a Primer Año Medio, basado en los conocimientos adquiridos hasta el final de la Educación Básica en el eje de Geometría. Para ello, se realizó una progresión de los objetivos de aprendizaje propuestos en el eje de Geometría de Educación Básica, luego, se seleccionaron los conocimientos claves para el eje de Geometría según los programas de estudio, posteriormente, se compararon esos conocimientos con los conocimientos de Primer Año medio y finalmente, se elaboraron las preguntas del cuestionario según el modelo de van Hiele.

El cuestionario presentado es resultado de una exhaustiva revisión de la literatura vinculada tanto al modelo de van Hiele como al Currículo chileno, pero al ser solo una propuesta no posee evidencia empírica de su verdadero impacto, es por ello, que es pertinente y necesaria su aplicación, ya que podría ayudar a mejorar parte de la metodología empleada en las clases de Matemáticas de Chile.

Por otro lado, el cuestionario presentado posee algunas limitaciones con respecto a los ítems, tanto en la cantidad de preguntas elaboradas como en los contenidos, ya que dentro del currículo chileno, hay contenidos en los cuales no se completan todos los niveles de Razonamiento Geométrico, existiendo así, algunos contenidos que como máximo logran alcanzar un nivel 2, entonces resulta imposible elaborar un cuestionario que pueda abarcar todos los niveles de Razonamiento Geométrico en cada contenido. Es por ello, que se optó por elaborar un cuestionario que abarque mayoritariamente preguntas con un nivel de razonamiento entre el 1, 2 y 3, ya que de nivel 4 sólo hay un contenido que puede aplicar según el Currículo chileno. De igual modo, también resulta una limitación que el método de evaluación de los niveles solo considere la media de las ponderaciones, debido a que al tratarse de contenidos distintos resultaría interesante además realizar un análisis de la desviación estándar obtenida y así poder visualizar que tan dispersos están los niveles de Razonamiento Geométricos según contenidos, ya que para solo utilizar la media deberían haber mayor cantidad de preguntas de cada contenido y eso no es sencillo de aplicar en las clases de Matemáticas chilenas debido al tiempo que utilizaría su aplicación.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación (2017a). Informe de resultados PISA 2015 Competencia científica, lectora y matemática en estudiantes de quince años en Chile Agencia de Calidad de la Educación. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/INFORME_DE_RESULTADOS_PISA_2015.pdf

Agencia de Calidad de la Educación. (2017b). Resultados TIMSS Chile 2015 Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS_presentacion_BAJA.pdf

Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de Razonamiento Geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule: Talca, Chile. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16*(2),179-211. doi: 10.12802/relime.13.1621

Aravena, M., Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en nonos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 34*(1), 107-128. doi: 10.1007/BF01273369

Burger, W. F., & Shaughnessy, M. (1986). *Assessing children's intellectual growth in geometry*: Oregon State University.

Cabello, A. B. (2013). *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la Geometría en Primero de la Educación Secundaria Obligatoria a partir de Cabri* (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca. Salamanca, España.

Crowley, M. L. (1989). *The desing an evaluation of an instrument for assessing mastery van Hiele levels of thinking about quadrilaterals*. Ann Arbor, E.E.U.U.: Univ. Microfilms.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 333-344. doi:10.1007/bf01273369

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C Mammana y V. Villani (Ed),.*Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-51). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Fuys, D. (1987): *Comunicación personal.*

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 3*. Reston, E.E.U.U.: N.C.T.M.

García, A. J., Ramos, G., Díaz de León, M. A., & Olvera, A. (2007). Instrumentos de evaluación. *Revista mexicana de anestesiología, 30*(3), 158-164.

Gardner, H. (1998). *Inteligencias múltiples*. Paidós: Barcelona.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1987). Estudio de las características del modelo de Van Hiele. *Paper presented at the Proceedings of the XI International Conference for the P.M.E*. 3, 131- 137.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on learning problems in mathematics, 20*(2/3), 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education, 21*(3), 237-251.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano: la evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis Doctoral). Universitat de València. Valencia, España.

Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En Linares, S; Sánchez M. V. (Ed), *Paper presented at the Teoría y práctica en educación matemática* (pp.295-384). Sevilla, España: Alfar.

Marmolejo, G. A., & Vega, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática. 24*(3), 7-32.

Mayberry, J. W. (1983). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* 14(1), 58- 69.

MINEDUC. (2003). Resumen Ejecutivo Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMSS. Recuperado de http://www7.uc.cl/sw_educ/educacion/grecia/plano/html/pdfs/biblioteca/LIBROS/BL012.pdf

MINEDUC. (2012). Bases Curriculares Matemática 1° a 6°. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-21321_programa.pdf

MINEDUC. (2013a). Matemática Programa de Estudio para Quinto Año Básico. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18980_programa.pdf

MINEDUC. (2013b). Matemática Programa de Estudio para Sexto Año Básico. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18981_programa.pdf

MINEDUC. (2015). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

MINEDUC. (2016a). Matemática Programa de Estudio Octavo Básico. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18983_programa.pdf

MINEDUC. (2016b). Matemática Programa de Estudio Primero Medio. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34359_programa.pdf

MINEDUC. (2016c). Matemática Programa de Estudio Séptimo Básico. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18982_programa.pdf

MINEDUC. (2017). Evaluación Estandarizada Evaluaciones Internacionales TIMMS. Santiago de Chile: *Educar Chile.* Recuperado de http://ww2.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=217419

Prat, M. (2016). *Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área* (Tesis Doctoral). Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

Torres, S. L. (2005). *Propuesta Metodológica de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, aplicada en escuelas críticas* (Tesis Doctoral). Universidad de Chile. Santiago de Chile, Chile.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. Columbus, E.E.U.U.

van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School* (Tesis Doctoral). Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda. (Traducción al inglés en Fuys, 1-206).

van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (Tesis Doctoral). Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y et al. 1991).

Varas, L., Felmer, P., Gálvez, G., Lewin, R., Martínez, C., Navarro, S., Ortiz, A., y Schwarze, G. (2018). Oportunidades de preparación para enseñar matemáticas de futuros profesores de educación general básica en Chile. *Calidad en la Educación,*(29), 64-88. doi: 10.31619/caledu.n29.188

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed), *Advanced mathematical thinking* (pp.65-81). Dordrecht, Holanda: Springer. doi: 10.1007/0-306-47203-1_5

ANEXOS

Anexo 1: Ejemplo de tipos de respuestas según el método de grados de adquisición

Mencione los tipos de triángulos que conoce según sus clasificaciones de ángulos y lados, luego describa cada tipo de triángulo.

Tipo de respuesta	Ponderación (%)	Respuesta esperada
1	0	
2	20	Rectángulo: Todos sus ángulos son rectos Acutángulo: Tiene un ángulo agudo Escaleno: Tiene un ángulo distinto
3	25	Equilátero: Sus 3 lados son iguales Isósceles: 2 de sus lados son iguales Escaleno: Todos sus lados son distintos
4	50	Según sus ángulos Rectángulo: Tienen un ángulo de 90° Acutángulo: Tienen ángulos más pequeños Obtusángulo: Tienen ángulos más grandes Según sus lados Equilátero: Sus 3 lados tienen igual medida Isósceles: 2 de sus lados tienen igual media y el otro lado se llama base Escaleno: Todos sus lados tienen distinta medida
5	75	Según sus lados Rectángulo: Tiene un ángulo recto y dos agudos Acutángulo: Tiene todos sus lados agudos Obtusángulo: Tiene un ángulo obtuso y dos agudos Según sus ángulos Equilátero: Sus 3 lados tienen igual medida Isósceles: 2 de sus lados tienen igual media y el otro lado se llama base Escaleno: Todos sus lados tienen distinta medida
6	80	Según sus ángulos Rectángulo: Tiene un ángulo recto y dos agudos Acutángulo: Tiene todos sus lados agudos Obtusángulo: Tiene un ángulo obtuso y dos agudos Según sus lados Equilátero: Sus 3 lados tienen igual medida Isósceles: 2 de sus lados tienen igual media y el otro lado se llama base
7	100	Según sus ángulos Rectángulo: Tiene un ángulo recto y dos agudos Acutángulo: Tiene todos sus lados agudos Obtusángulo: Tiene un ángulo obtuso y dos agudos Según sus lados Equilátero: Sus 3 lados tienen igual medida Isósceles: 2 de sus lados tienen igual media y el otro lado se llama base Escaleno: Todos sus lados tienen distinta medida

Rojo: Respuesta incorrecta

Azul: Respuesta correcta

Anexo 2: Contenidos del eje de Geometría en los programas de Quinto al Octavo Año Básico

Curso	Contenidos
Quinto Básico	• Cálculo de áreas en triángulos. • Cálculo de áreas en cuadriláteros. • Concepto de ángulo sexagesimal. • Concepto de plano cartesiano. • Representación de vértices de triángulos y cuadriláteros en el plano cartesiano. • Medición de ángulos con el transportador. • Medición de longitudes, usando unidades estandarizadas. • Transformación de unidades de longitud.
Sexto Básico	• Concepto de área de superficie. • Cálculo de áreas de superficies en paralelepípedos. • Cálculo de volúmenes en paralelepípedos. • Construcción de ángulos. • Determinación de ángulos en rectas paralelas cortadas por una transversal. • Identificación de ángulos opuestos por el vértice. • Realización de teselados.
Séptimo Básico	• Área de triángulos, paralelogramos y trapecios. • Perímetro del círculo. • Área del círculo. • Vectores.
Octavo Básico	• Área de superficies y volumen de prismas rectos con diferentes bases. • Área de superficies y volumen de cilindros. • Teorema de Pitágoras. • La posición y el movimiento de figuras 2D. • Movimientos de figuras 2D. • Composición de rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio.

Anexo 3: Progresión de contenidos según los objetivos de aprendizaje.

Nivel	Relaciones en figuras 2D y 3D	Áreas y Volúmenes	Plano cartesiano y Transformaciones isométricas	Ángulos y Objetos geométricos	Teorema de Pitágoras
5°	Describir y dar ejemplos de figuras 3D y 2D.	Construir rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos y sacar conclusiones. Estimar áreas de triángulos, paralelogramos, trapecios.	Identificar y dibujar puntos en el primer cuadrante Comprender el concepto de congruencia, utilizando traslación, reflexión y rotación.		
6°	Construir y comparar triángulos de acuerdo con la medida de sus lados y sus ángulos.	Comprensión y cálculo del área y volumen de cubos y paralelepípedos.	Realizar teselados de figuras 2D, usando reflexión, traslación y rotación	Construir ángulos obtusos, rector, extendidos y completos. Identificar ángulos opuestos por el vértice y ángulos complementarios. Medir ángulos usando transportador. Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y de un cuadrilátero 360°	
7°	Conocer relaciones entre el radio, diámetro.	Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios. Estimar el área y el perímetro del círculo	Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta y pictórica.	Descubrir las relaciones que involucran ángulos interiores o exteriores de diferentes polígonos. Construcción de líneas tales como; paralelas, perpendiculares, bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros. Construcción de puntos, tales como el punto medio, centro de gravedad.	
8°		Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros. Estimando de manera intuitiva y posteriormente aplicando fórmulas.	Definir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, utilizando; vectores para la traslación, ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión y puntos del plano para las rotaciones. Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio y aplicar a las simetrías de polígonos y poliedros.		Explicación de la validez del Teorema de Pitágoras y resolución de problemas.

Anexo 4: Cuestionario de Geometría

Geometría
CUESTIONARIO - Primer Año Medio

Nombre: ____

Curso:____________________

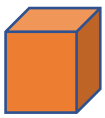
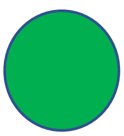
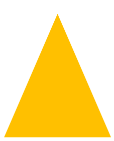
Contenidos a observar:

- ✓ Describir propiedades y clasificaciones de figuras 2D y 3D.
- ✓ Calcular de áreas de figuras 2D y 3D.
- ✓ Estimar y calcular el volumen de figuras 3D.
- ✓ Identificar semejanza de figuras.
- ✓ Realizar y componer transformaciones isométricas de forma pictórica y con vectores.
- ✓ Comprender la suma de los ángulos interiores de un polígono regular.
- ✓ Aplicar y explicar la validez del Teorema de Pitágoras.

Antes de contestar el cuestionario, lee las siguientes instrucciones:

- ✓ La evaluación es de carácter individual.
- ✓ Lee cada pregunta con cuidado.
- ✓ Usa sólo lápiz grafito para contestar la prueba
- ✓ Puedes utilizar transportador, compás y regla.
- ✓ Escucha y lee atentamente las indicaciones de cada pregunta y responde.
- ✓ Intenta contestar todas las preguntas de la prueba, incluso si no estás completamente seguro de tu respuesta.
- ✓ No olvides de justificar todas tus respuestas en el espacio que se te entrega.
- ✓ Si necesitas más espacio para responder las preguntas puedes anexar hojas en blanco a tu prueba indicando el número de la pregunta.
- ✓ Si tienes alguna duda sobre cómo contestar, levanta la mano y pregunta al docente.
- ✓ Revisa antes de entregar tu evaluación.
- ✓ El tiempo de duración es de 75 minutos.

1) Observa las siguientes imágenes
1.1) Marca con una cruz si corresponden a una figura 2D, 3D o a un polígono (puedes marcar más de una opción) y justifica tu elección en el recuadro que dice “justificación”
1.2) En el recuadro “características” escribe todas las características, clasificaciones y/o propiedades que recuerdes de cada figura.

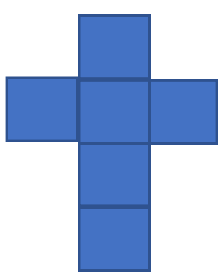
Figura	2D	3D	Polígono	Justificación	Características
					
					
					

2) Dado un cuadrado de lado 2 cm.

2.1) Calcule el área

	Realice aquí su cálculo

2.2) Calcule el área de la siguiente figura geométrica.

	Realice aquí su cálculo

2.3) Calcule el área y volumen un cubo de lado 2cm.

2.4) ¿Existe alguna relación entre el cálculo del área de la pregunta **2.2)** y el de la pregunta **2.3)**? Justifica tu respuesta.

2.5) Si tenemos dos edificios con igual base, pero distinta altura tal como se ve en la siguiente imagen:

¿La razón de sus volúmenes será igual a la razón de sus alturas? Justifique su respuesta.

2.6) Según las imágenes que aparecen a continuación, indique con cual de ellas se podría realizar una mejor estimación del volúmen del cilindro inscrito. Establezca una conjetura con respecto a la cantidad de lados de las bases y la estimación del volumen del cilindro y justifique su respuesta.
Nota: Las bases de los prismas son polígonos regulares.

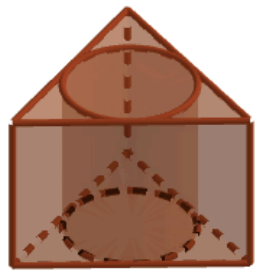


Fig 1

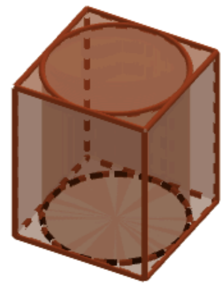
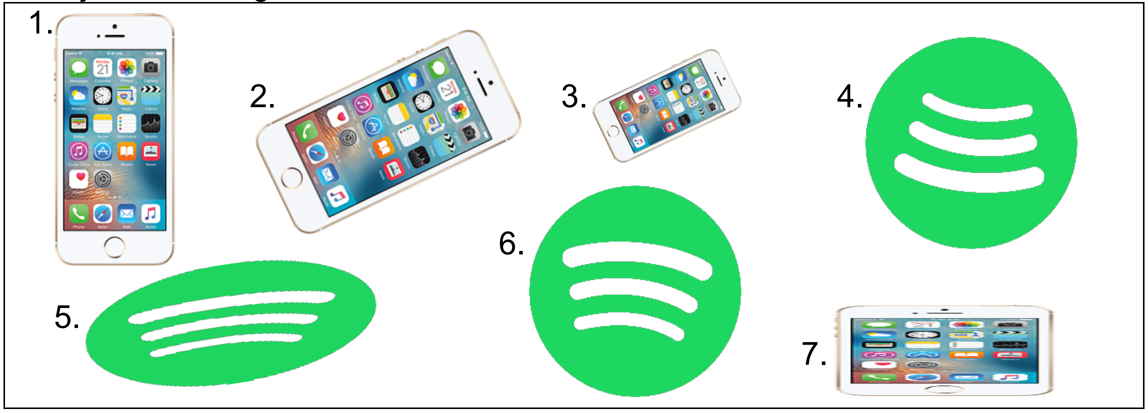


Fig 2

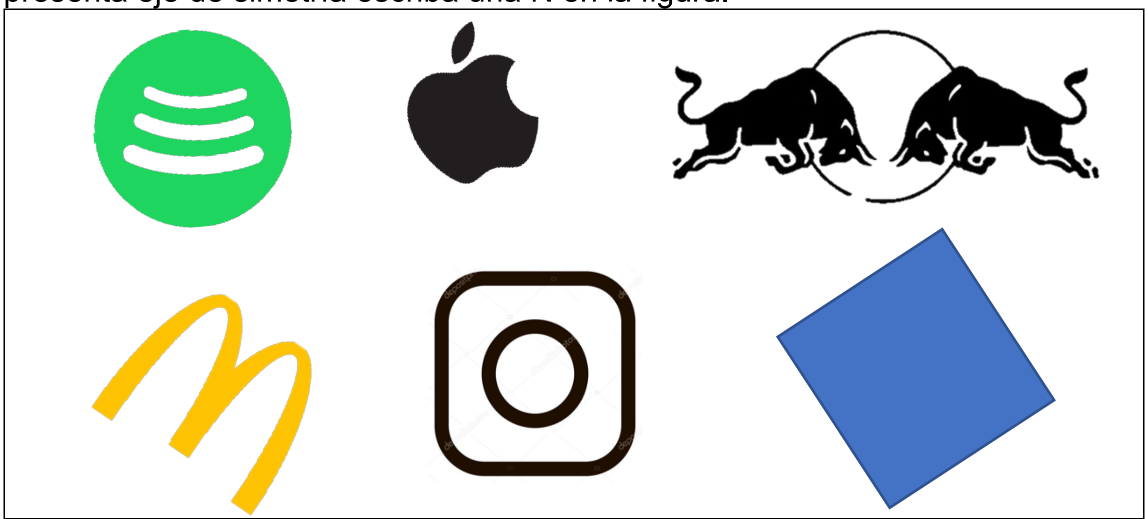
3) Posición y movimiento de figuras 2D

3.1) Observando las figuras, agrupa aquellas que tú crees que son semejantes y explica por qué. De acuerdo con la agrupación que has realizado, ¿cuándo son semejantes dos figuras?

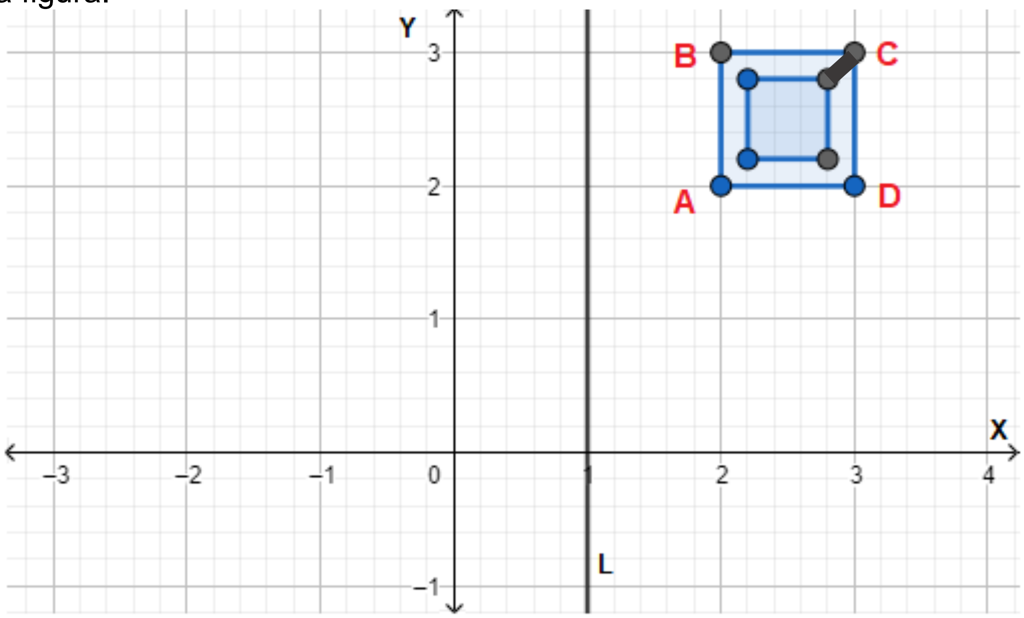


Respuesta:

3.2) Dibuje todos los ejes de simetría de las figuras dadas, si alguna figura no presenta eje de simetría escriba una N en la figura.



3.3) Dada la siguiente figura, dibuje su imagen producto de una simetría axial en torno al Eje L. Luego, identifique de los cuadrantes del plano cartesiano presentes en la figura.



3.4) Si el punto A de la figura anterior se traslada a las coordenadas (11,-7) ¿cuál fue su vector de traslación?

3.5) En base a los resultados obtenidos en la pregunta 3.3), ¿es posible obtener exactamente la misma imagen reflejada utilizando sólo una traslación. Justifique su respuesta.

3.6) ¿Es posible obtener exactamente la misma imagen reflejada utilizando 2 tipos de transformaciones isométricas distintas? Justifique su respuesta.

4) Suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

Recuerda que un ángulo interior o ángulo interno es un ángulo formado por dos lados de un polígono que comparten un vértice común y está contenido dentro del polígono.

4.1) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo?

4.2) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un cuadrado?

4.3) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un hexágono?

4.4) A partir de las respuestas anteriores, calcula cuanto mide la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados. Plantea un enunciado general (conjetura) y demuéstralo.

5) Teorema de Pitágoras.

Recuerda que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medidahipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

5.1) Dibuje un bosquejo de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean de 3cm y 4cm. Luego, calcule el tercer lado del triángulo e identifique su nombre.

5.2) Comprueba que con los números 6, 8 y 10 se puede formar una terna pitagórica.

5.3) A partir de la pregunta anterior, ¿puedes demostrar la validez del Teorema de Pitágoras para todo triángulo rectángulo? Justifica tu respuesta.

Anexo 5: Pautas para la aplicación del cuestionario de Geometría para el docente

Pautas para la aplicación del cuestionario de Geometría

- Antes de comenzar con el cuestionario, el monitor deberá proporcionar a cada estudiante los materiales necesarios para realizarlo (lápices, hojas adicionales para realizar cálculos, goma de borrar, transportador, compás, escuadra y regla).
- Dentro de la sala donde se aplique el cuestionario debe existir un reloj visible a todos los estudiantes.
- En voz alta se deberá nombrar a cada estudiante y explicarles que el test que se les aplicará posee 21 preguntas, de las cuales se espera que puedan responder todas y que no posee una calificación, ya que es sólo un pre-test que será utilizado para medir su nivel de Razonamiento Geométrico.
- Indicar a los estudiantes que despejen sus escritorios y solo dejen sobre la mesa los materiales proporcionados por el docente.
- Luego, entregar el test y leer los contenidos y las instrucciones que aparecen en la primera hoja del test entregado a los estudiantes.
- Posterior a la lectura de los contenidos y las instrucciones, se deberá leer cada pregunta y reiterar que deben tratar de responder todo.
- Luego, se dará comienzo a la medición.
- Mientras los estudiantes realicen el cuestionario, el docente debe verificar que intenten completar las 21 preguntas.
- Finalmente, el docente deberá recoger todos los cuestionarios.

Anexo 6: Pautas para la evaluación e interpretación de los niveles de Razonamiento Geométrico

Pautas para la evaluación e interpretación de los niveles de Razonamiento Geométrico

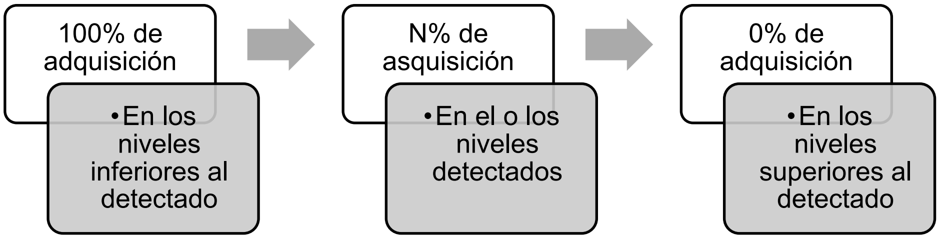
I. Determinación de los niveles de Razonamiento Geométrico de van Hiele

Dentro del cuestionario, existen preguntas a las cuales se les asocia más de un nivel de Razonamiento Geométrico, ya que un estudiante puede pasar por distintos procesos para encontrar la solución al problema. A continuación, se muestra una tabla con los descriptores de cada proceso de razonamiento según niveles.

Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento y descripción	De atributos físicos	De propiedades Matemáticas		
Uso de definiciones		Definiciones con estructura simple	Definiciones con cualquier estructura	Se acepta la equivalencia de definiciones
Formulación de definiciones	Listado de propiedades físicas	Listado de propiedades Matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Se demuestra la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusiva basada en atributos físicos	Inclusiva (exclusiva) si la estructura lógica es simple (compleja)	Inclusiva o exclusiva de acuerdo con las definiciones usadas	
Demostración		Empírica, verificación en ejemplos	Deductiva, abstracta, informal	Deductiva, abstracta, lógico-formal

Dentro de la tabla anterior, se presentan cuatro tipos de procesos distintos en el Razonamiento Geométrico y sus respectivos descriptores según cada nivel. Además, se puede apreciar en la tabla que existen espacios en blanco, los cuales indican que es imposible realizar el proceso descrito en un nivel determinado. Por ejemplo, es imposible realizar una demostración con nivel 1, debido a que en ese nivel no se reconocen propiedades matemáticas, las cuales son necesarias para realizar cualquier tipo de demostración.

En el caso de las preguntas que posean más de un nivel de Razonamiento Geométrico asociado, se deberá otorgar la ponderación que aparece en la siguiente figura.



De acuerdo con la figura anterior, si la pregunta está asociada a preguntas con dos posibles niveles de Razonamiento Geométrico se deberá revisar la tabla con los descriptores de cada proceso de razonamiento o ver la “Rúbrica de respuestas esperadas” y determinar a qué nivel de respuestas se ajusta lo respondido por el estudiante. Posteriormente, se deberá otorgar una ponderación de 100% a todos los niveles inferiores del nivel de Razonamiento Geométrico detectado y un 0% de adquisición a todos los niveles posteriores.

II. Ponderación y grado de adquisición de cada respuesta

Dentro del modelo de Jaime, se identifican 7 tipos de posibles respuestas, las cuales poseen distintos porcentajes de ponderación y grados de adquisición, las cuales se describen en la tabla que aparece a continuación.

Tabla 2: Tipos de respuesta

Tipo	Correcto	Incorrecto	Grado de Adquisición	Ponderación (%)
1	No es codificable o no es contestada		Nulo	0
2		Inconsistente y muy incompleta		20
3	Breve y con escasos argumento (muy incompleta)		Bajo	25
4	Refleja dos niveles de razonamiento		Intermedio	50
5		Posee errores matemáticos o siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución, pero con un proceso de razonamiento válido	Alto	75
6	Respuesta completa, pero faltan algunos argumentos			80
7	Respuesta completa. Da solución al problema.		Completo	100

En la tabla anterior, se describe la ponderación y el grado de adquisición otorgado según tipo de respuesta. Por ejemplo, si un estudiante responde la pregunta 1.1 en base a propiedades matemáticas con un proceso de razonamiento válido, pero con algunos errores, se deberá asumir que posee un grado de adquisición completo para el nivel 1 en ese contenido, ya que su argumento es en base a atributos matemáticos (nivel 2) y no físicos (nivel 1) y se deberá se realiza el análisis del tipo de respuesta según el nivel 2, el cual según Tabla 2 posee un 75% de ponderación y se asocia a un grado de adquisición alta del nivel.

III. Cálculo de la media de las ponderaciones

En el “reporte final”, se presentarán distintas tablas en las cuales deberá anotar la ponderación correspondiente a cada respuesta según cada nivel. Recuerde que si una pregunta presenta dos niveles de Razonamiento Geométrico según la rúbrica, usted deberá elegir sólo uno según los descriptores de Tabla 1, por ejemplo si un estudiante realiza descripciones de atributos físicos (nivel 1) y además señala algunas propiedades matemáticas (nivel 2), se le debe otorgar un 100% de ponderación en el nivel 1, un N% de ponderación para el nivel 2 según el tipo de respuesta de Tabla 2 y un 0% de adquisición para los niveles posteriores (nivel 3 y 4), debido a que en el modelo de van Hiele se admite la secuencialidad de los niveles.

A continuación, se presenta un ejemplo:

NIVEL 1

Pregunta	Ponderación (%)
1.1	100
1.2	100
3.1	100
5.1	100
Media ponderaciones nivel 1	**100**

NIVEL 2

Pregunta	Ponderación (%)
1.1	100
1.2	80
2.1	80
2.2	75
2.4	50
3.2	75
3.3	50
4.1	100

4.2	100
4.3	100
5.1	80
5.2	75
Media ponderaciones nivel 2	**80,41$\overline{6}$**

NIVEL 3

Pregunta	Ponderación (%)
2.5	80
2.6	50
3.4	0
3.5	25
3.6	20
4.4	50
5.3	25
Media ponderaciones nivel 3	**35,71**

NIVEL 4

Pregunta	Ponderación (%)
2.5	0
Media ponderaciones nivel 4	**0**

IV. Interpretación de los datos obtenidos

En base a los datos obtenidos, se pueden realizar diversas interpretaciones, ya que el cuestionario resume los contenidos de cuatro niveles educativos (5º, 6º, 7º y 8º Año Básico). Siguiendo con el uso de las medias de las ponderaciones de cada nivel de Razonamiento Geométrico se pueden obtener distintos grados de adquisición, los cuales se dividen en base a la ponderación obtenida, la cual se resume en la siguiente tabla.

Ponderación	Grado de Adquisición	Características
[0, 15[	Nula	No se emplean las características de este nivel de razonamiento.
[15, 40[	Baja	Menciona las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero de manera incompleta. Es frecuente que recurra al nivel inferior de razonamiento.
[40, 60[	Intermedia	El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que en algunas ocasiones hay saltos frecuentes entre 2 niveles de razonamiento.
[60, 85[	Alta	Nivel habitual de trabajo, en él se produce con poca frecuencia un retroceso de nivel, pero si se utiliza en ocasiones herramientas inadecuadas a este nivel de razonamiento.
[85, 100]	Completa	Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios de este nivel de razonamiento.

De acuerdo con la información recopilada en la tabla 3, se tiene por ejemplo que si un estudiante que obtiene un 100% de ponderación en el nivel 1, comprendería en totalidad las clases en nivel 1. Además, si en el nivel 2, posee un 80,4% de ponderación, tiene un grado de adquisición alta y también comprendería clases en nivel 2 pero en ocasiones utilizando herramientas inadecuadas. De igual modo, en el nivel 3 se obtiene un 35% de ponderación, lo que implica un grado de adquisición baja y en consecuencia no comprendería clases con este nivel de Razonamiento Geométrico. Y en el caso del nivel 4, con un 0% de ponderación, se interpreta que los estudiantes no emplean las características podrías de este nivel de razonamiento, por lo tanto, no comprenderían clases con ese nivel de Razonamiento Geométrico. A continuación, se presenta una tabla con el ejemplo descrito.

INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS

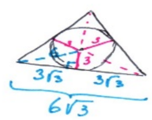
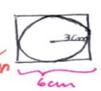
Nivel	Comprende clases	No comprende clases
1	X	
2	X	
3		X
4		X

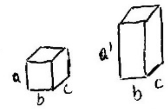
En la tabla descrita anteriormente se muestran los resultados obtenidos en base al ejemplo anterior, pero si el resultado fuera un 50% de ponderación se interpreta que el estudiante está en tránsito entre dos niveles de Razonamiento Geométrico, por lo cual podría comprender partes de una clase enfocada en el nivel determinado, pero necesitaría de un refuerzo en el nivel anterior, ya que los niveles son secuenciales y se necesita de una adquisición al 100% del nivel anterior.

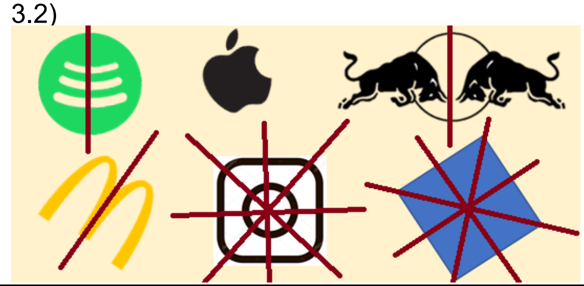
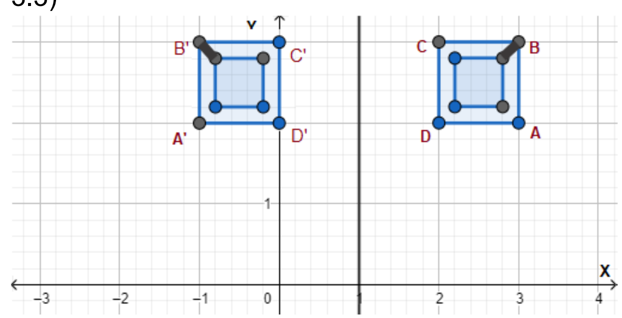
Anexo 7: Rúbrica de respuestas esperadas

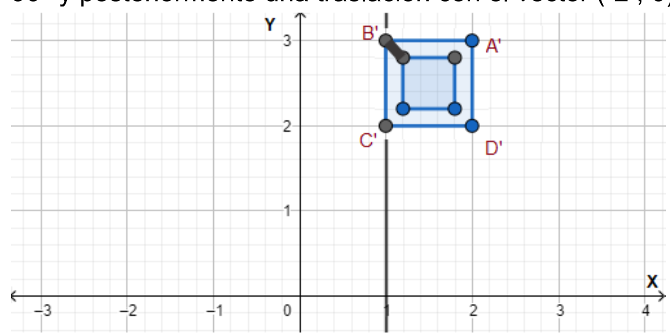
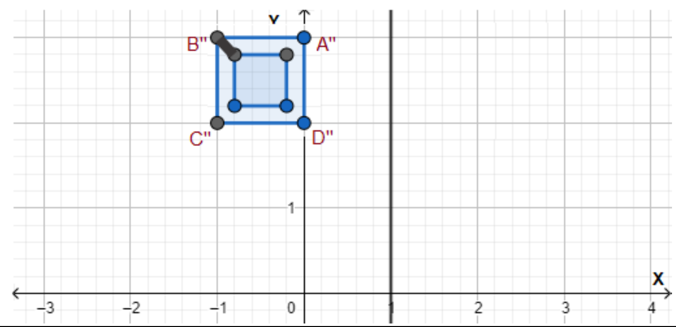
Rúbrica de respuestas esperadas

ÍTEM 1: Relaciones de figuras en 2D y 3D (Niveles que abarca N1-N2)			
Descriptor	**Nivel**	**Justificación**	**Idea de respuestas esperadas**
Reconocimiento Uso de definiciones Clasificación basada en atributos físicos	1	Lista de atributos físicos de las figuras geométricas	Para el cubo: Es una figura 3D y no 2D, ya que no es plana. No es un polígono, ya que no es plano. Sus principales características son tener 8 vértices, 6 caras y 12 aristas. Para el círculo: Es una figura 2D y no 3D, ya que es plana. Es un polígono, ya que la figura está cerrada. Sus principales características son no tener vértices, 1 cara plana circular y no tiene lados rectos. Para el triángulo: Es una figura 2D y no 3D, ya que es plana. Es un polígono, ya que la figura está cerrada. Sus principales características son tener 3 vértices, 1 cara triangular y 3 lados rectos.
Reconocimiento Uso de definiciones Clasificación basada en atributos matemáticos	2	Utiliza las propiedades, fórmulas y definiciones de las figuras geométricas	Para el cubo: Es una figura 3D y no 2D, ya que emplea las tres dimensiones del espacio, específicamente el ancho, el largo y la profundidad. No es un polígono, ya que al ser una figura 3D no cumple con los criterios de las figuras 2D. Dentro de las propiedades tenemos que el área es 6 por el área del cuadrado. Para el círculo: Es una figura 2D y no 3D, ya que sólo emplea dos de las tres dimensiones del espacio, específicamente el ancho y el largo, pero no la profundidad. Es un polígono, ya que la figura está limitada por infinitas rectas, además de infinitos ángulos y vértices. Dentro de las propiedades tenemos que el área es Pi por el radio elevado al cuadrado. Para el triángulo: Es una figura 2D y no 3D, ya que sólo emplea dos de las tres dimensiones del espacio, específicamente el ancho y el largo, pero no la profundidad. Es un polígono, ya que la figura está limitada por 4 rectas y tiene 4 ángulos y vértices. Dentro de las propiedades tenemos que el área es base por altura dividido en 2.

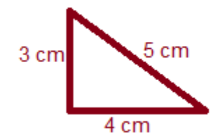
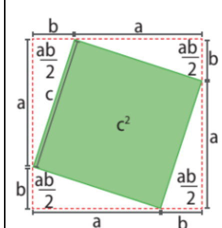
ÍTEM 2: Áreas y volúmenes (Niveles que abarca N2-N4)			
Descriptor	**Nivel**	**Justificación**	**Idea de respuestas esperadas**
Reconocimiento Uso de definiciones	2	Reconocimiento y aplicación de fórmulas.	2.1) $A = 2 \cdot 2 = 4cm^2$ 2.2)$A = 4 \cdot 6 = 24cm^2$ 2.3)$A = 4 \cdot 6 = 24cm^2$ y $V = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8cm^3$ 2.4) Sí, tienen la misma área, ya que 2.2) es la red del cubo de lado 2 cm. 2,5) La Fig. 2, porque quedan menos espacios.
Uso de definiciones con estructura matemática Realiza conjeturas Demostración lógica informal	3	Conjetura que la razón entre el volumen y la altura es igual argumentando matemáticamente. Realiza una demostración informal	2.5) $$\frac{V}{V\prime} = \frac{a \cdot b \cdot c}{a\prime \cdot b \cdot c}$$ Simplificando, $\frac{V}{V\prime} = \frac{a}{a\prime}$, entonces si se cumple 2.6) Si el cilindro tiene un $r = 3cm$ y $h = 4cm$. Entonces: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 4$ $V = \pi \cdot 9 \cdot 4$ $V = 3{,}14 \cdot 36 \approx \boxed{113\ cm^3}$ Fig. 1  $V_{prisma\ \Delta} = A_\Delta \cdot h$ $= \frac{6\sqrt{3} \cdot 9}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2}$ → Aprox $\sqrt{\ }$ $= 108\sqrt{3} \approx \boxed{216\ cm^3}$ Fig. 2. Mejon estimación  $V_{prisma\ \square} = A_\square \cdot h$ $= 6^2 \cdot 4$ $= 36 \cdot 4$ $= \boxed{144\ cm^3}$ Entonces a mayon cantidad de lados, mejor es la estimación.

Reconocimiento Uso de definiciones Clasificación basada en atributos matemáticos	4	Conjetura que la razón entre el volumen y la altura es igual argumentando matemáticamente. Realiza una demostración formal.	Sea  Tenemos que la razón de los volúmenes de 2 ortoedros es igual a la razón de los productos de sus tres dimensiones, tenemos que: $\frac{V}{V'} = \frac{abc}{a'bc}$ y simplificando $\frac{V}{V'} = \frac{a}{a'}$ como se quería demostrar. 2.5)

ÍTEM 3: Posición y movimiento de figuras 2D (Niveles que abarca N1-N3)			
Descriptor	**Nivel**	**Justificación**	**Idea de respuestas esperadas**
Reconocimiento Uso de definiciones Clasificación basada en atributos físicos	1	Reconocimiento y descripción de atributos físicos de las figuras semejantes.	3.1) Dos figuras son semejantes cuando son proporcionales. 
Reconocimiento Uso de definiciones Clasificación basada en atributos matemáticos	1	Utiliza las propiedades y definiciones de las transformaciones isométricas en las figuras dadas.	3.2) 
Reconocimiento Uso de definiciones Clasificación basada en atributos matemáticos	2	Utiliza las propiedades y definiciones de las transformaciones isométricas en las figuras dadas.	3.3)  3.4) $\vec{v} = (11-2, -7-2)$ $\vec{v} = (9, -9)$

Uso de definiciones con estructura matemática Realiza conjeturas Demostración lógica informal	3	Conjetura que no es posible realizar una traslación argumentando matemáticamente. Realiza una demostración informal	3.5) No, ya que en una traslación isométrica se desplaza cada punto de la figura con el mismo un vector y en este caso los Puntos A, B, C y D no fueron trasladados con igual vector.
Uso de definiciones con estructura matemática Realiza conjeturas Demostración lógica informal	3	Conjetura que es posible obtener la misma imagen con dos transformaciones isométricas distintas argumentando matemáticamente. Realiza una demostración informal	3.6) Sí, mediante una rotación en torno al punto D en sentido antihorario a 90° y posteriormente una traslación con el vector (-2 , 0).  

ÍTEM 4: Relación entre la suma los ángulos interiores de un polígono de n lados (Niveles que abarca N2-N3)			
Descriptor	**Nivel**	**Justificación**	**Idea de respuestas esperadas**
Uso de definiciones con estructura simple Demostración experimental	2	Determina experimentalmente, haciendo un dibujo, la suma de los ángulos interiores de ciertos polígonos dados.	4.1) Afirma que son 180° 4.2) Afirma que son 360° 4.3) Afirma que son 720°
Uso de definiciones con estructura matemática compleja Demostración lógica informal	3	Determina la suma de los ángulos interiores de ciertos polígonos y conjetura el número de diagonales argumentando matemáticamente Realiza una demostración informal	4.4) De cada polígono de n lados se pueden trazar n - 2 triángulos a partir de sus diagonales. Además, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° Por lo tanto, este número se debe multiplicar por la cantidad de triángulos de cada polígono quedando: 180°(n - 2)

ÍTEM 5: Posición y movimiento de figuras 2D (Niveles que abarca N1-N3)			
Descriptor	**Nivel**	**Justificación**	**Idea de respuestas esperadas**
Reconocimiento Uso de definiciones	1	Determina experimentalmente, haciendo un dibujo y mediante el uso de instrumentos (regla) el tercer lado del triángulo rectángulo.	5.1) 
Reconocimiento Uso de definiciones y fórmulas.	2	Determina el valor del tercer lado del triángulo rectángulo mediante la aplicación de la fórmula del teorema de Pitágoras.	5.1) $x^2 = 4^2 + 3^2$ $x^2 = 16 + 9$ $x^2 = 25$ $x = 5$
Reconocimiento Uso de definiciones. Demostración informal	2	Utiliza las propiedades y definiciones correspondientes a los triángulos rectángulos. Realiza una demostración informal sencilla en base a definiciones.	5.2) Para que 6, 8 y 10 sea un trio pitagórico se tiene que cumplir la fórmula del teorema de Pitágoras. Entonces, Dado un triángulo ABC de lados 6, 8 y 10, tenemos: $c^2 = 6^2 + 8^2$ $c = 36 + 64$ $c^2 = 100$ $c = 10$ Como la hipotenusa dio de resultado 10, se comprueba que efectivamente 6, 8 y 10 es un trío pitagórico.
Uso de definiciones con estructura matemática Realiza conjeturas Demostración lógica informal	3	Utiliza las propiedades y definiciones. Realiza una demostración informal del teorema de Pitágoras.	5.3) Dada la construcción de un cuadrado de lado a+b y 4 triángulos rectángulos, tenemos que:  Es un gran cuadrado, cada lado mide **a+b**, así que el área es: **A = (a+b)(a+b)** Ahora sumamos las áreas de los trozos más pequeños: Primero, el cuadrado pequeño (inclinado) tiene área **A = c²** Y hay cuatro triángulos, cada uno con área **A = ½ab** Así que los cuatro juntos son **A = 4(½ab) = 2ab** sumamos el cuadrado inclinado y los 4 triángulos da: **A = c²+2ab** El área del **cuadrado grande** es igual al área del **cuadrado inclinado y los 4 triángulos**. Esto lo escribimos así: **(a+b)(a+b) = c²+2ab** Ahora, vamos a operar a ver si nos sale el teorema de Pitágoras: Empezamos con: $(a+b)(a+b) = c^2+2ab$ Desarrollamos (a+b)(a+b): $a^2+2ab+b^2 = c^2+2ab$ Restamos "2ab" de los dos lados: $a^2+b^2 = c^2$

Anexo 8: Reporte

Reporte final

Nombre del estudiante:____

NIVEL 1

Pregunta	Ponderación
1.1	
1.2	
3.1	
5.1	
Media ponderaciones nivel 1	

NIVEL 2

Pregunta	Ponderación
1.1	
1.2	
2.1	
2.2	
2.4	
3.2	
3.3	
4.1	
4.2	
4.3	
5.1	
5.2	
Media ponderaciones nivel 2	

NIVEL 3

Pregunta	Ponderación
2.5	
2.6	
3.4	
3.5	
3.6	
4.4	
5.3	
Media ponderaciones nivel 3	

NIVEL 4

Pregunta	Ponderación
2.5	
Media ponderaciones nivel 4	

INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS

Nivel	Comprende clases	No comprende clases
1		
2		
3		
4		