Universidad Austral de Chile
Conocimiento y Naturaleza

SEDE PUERTO MONTT
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS

PROPUESTA DE SECUENCIA METODOLÓGICA EN GEOMETRÍA PARA PRIMER AÑO DE LA ENSEÑANZA MEDIA, BASADA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y SU RELACIÓN CON EL MODELO DE VAN HIELE

Tesis para optar al Título de Profesora de Matemáticas.

Profesor Patrocinante: Dr. Francisco Cala Rodríguez
Profesora Co-Patrocinante: Prof. Carol Raquel Ascencio González
Estudiante: Katherine Ziliany Santana Pérez

Puerto Montt, Chile
2016

Derechos de Autor

HOJA DE CALIFICACIÓN

En Puerto Montt, el _________ de ___________de _________, los abajo firmantes dejan constancia que la estudiante Katherine Ziliany Santana Pérez de la carrera de Pedagogía en Matemáticas ha aprobado la tesis para optar al título de Profesor de Matemáticas, con una nota de ______.

Prof. Dr. Francisco Cala Rodriguez Profesor Patrocinante	Prof. Carol R. Ascencio González Profesora Co-Patrocinante

Prof. Dr. Abraham M. Olivares Escanilla
Profesor Informante

Universidad Austral de Chile

Escuela de Pedagogía en Matemáticas

INFORME TRABAJO DE TITULACIÓN

Dr. Francisco Cala Rodríguez
Director Escuela de Pedagogía en Matemáticas
Universidad Austral de Chile
Sede Puerto Montt

Tengo el agrado de remitir a Ud. el Informe de la Tesis **PROPUESTA DE SECUENCIA METODOLÓGICA EN GEOMETRÍA PARA PRIMER AÑO DE LA ENSEÑANZA MEDIA BASADA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y SU RELACIÓN CON EL MODELO DE VAN HIELE,** elaborada por la alumna Katherine Ziliany Santana Pérez de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas.

1.- Concordancia entre el desarrollo del tema y los objetivos propuestos.

Nota: 7,0 Ponderación: 20%= 1,4

2.- Fundamentos teóricos y metodológicos.

Nota: 7,0 Ponderación: 25%= 1,75

3.- Capacidad de análisis y síntesis.

Nota: 7,0 Ponderación: 25%= 1,75

4.- Utilización de fuentes bibliográficas y capacidad de enfoque personal. Nota:

7,0 Ponderación: 15%= 1,05

5. - **Manejo del lenguaje y presentación formal (redacción). Incluye el seguimiento de la pauta de presentación indicada por la Dirección de la Escuela.**

Nota: 7,0 Ponderación: 15%= 1,05

6.- CALIFICACIÓN PONDERADA FINAL: 7,0

Atentamente,

Profesor(a) Dr. Francisco Cala Rodríguez
Profesor Patrocinante

Puerto Montt, 11 de enero de 2017.

Universidad Austral de Chile
Escuela de Pedagogía en Matemáticas

INFORME TRABAJO DE TITULACIÓN

Dr. Francisco Cala Rodríguez
Director Escuela de Pedagogía en Matemáticas
Universidad Austral de Chile
Sede Puerto Montt

Tengo el agrado de remitir a Ud. el Informe de la Tesis **PROPUESTA DE SECUENCIA METODOLÓGICA EN GEOMETRÍA PARA PRIMER AÑO DE LA ENSEÑANZA MEDIA BASADA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y SU RELACIÓN CON EL MODELO DE VAN HIELE,** elaborada por la alumna Katherine Ziliany Santana Pérez de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas.

1.- Concordancia entre el desarrollo del tema y los objetivos propuestos. Nota:

7,0 Ponderación: 20%= 1,4

2.- Fundamentos teóricos y metodológicos.

Nota: 6,5 Ponderación: 25%= 1,625

3.- Capacidad de análisis y síntesis.

Nota: 6,8 Ponderación: 25%= 1,7

4.- Utilización de fuentes bibliográficas y capacidad de enfoque personal. Nota:

6,8 Ponderación: 15%= 1,02

5.- Manejo del lenguaje y presentación formal (redacción). Incluye el seguimiento de la pauta de presentación indicada por la Dirección de la Escuela.

Nota: 6,8 Ponderación: 15%= 1,02

6.- CALIFICACION PONDERADA FINAL: 6,8

Atentamente,

Profesor(a) Carol Raquel Asencio González
Profesora Co-patrocinante

Puerto Montt, 09 de enero de 2017.

Universidad Austral de Chile
Escuela de Pedagogía en Matemáticas

INFORME TRABAJO DE TITULACIÓN

Dr. Francisco Cala Rodríguez
Director Escuela de Pedagogía en Matemáticas
Universidad Austral de Chile
Sede Puerto Montt

Tengo el agrado de remitir a Ud. el Informe de la Tesis **"PROPUESTA DE SECUENCIA METODOLÓGICA EN GEOMETRÍA PARA PRIMER AÑO DE LA ENSEÑANZA MEDIA, BASADA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y SU RELACIÓN CON EL MODELO DE VAN HIELE",** elaborada por la alumna KATHERINE ZILIANY SANTANA PÉREZ, de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas.

1.- Concordancia entre el desarrollo del tema y los objetivos propuestos.

Nota: 6,5 Ponderación: 20% 1,3

2.- Fundamentos teóricos y metodológicos.

Nota: 7,0 Ponderación: 25% 1,75

3.- Capacidad de análisis y síntesis.

Nota: 6,0 Ponderación: 25% 1,5

4.- Utilización de fuentes bibliográficas y capacidad de enfoque personal.

Nota: 7,0 Ponderación: 15% 1,05

5.- Manejo del lenguaje y presentación formal (redacción). Incluye el seguimiento de la pauta de presentación indicada por la Dirección de la Escuela.

Nota: 6,5 Ponderación: 15% 0,975

6.- CALIFICACIÓN PONDERADA FINAL: **6,6**

Atentamente,

Dr. Abraham Martín Olivares Escanilla
Profesor(a) Informante

Puerto Montt, 10 de enero de 2017.

DEDICATORIA

Ellos, las únicas personas que siempre han estado conmigo, que me alentaron a seguir adelante cuando estaba a tiempo de darme por vencida, que me apoyaron cuando decidí estudiar para convertirme en Profesora de Matemáticas, que con valor y perseverancia son el sustento de lo que soy hoy y siempre, y que estoy segura que seguirán presente en cada uno de los pasos que daré en un futuro muy cercano…

A mi papá.

A mi mamá.

A mi hermano.

Gracias por acompañarme…

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a cada uno de los siguientes profesores que han puesto un granito de arena, dando vida a este gran trabajo.

Doctor en Matemáticas Francisco Cala Rodríguez

Doctor en Ciencias de la Comunicación Julio Sáez Gallardo

Profesora Carol Ascencio González

TABLA DE CONTENIDOS

DEDICATORIA ..... **X**
AGRADECIMIENTOS ..... **XI**
RESUMEN ..... **XVII**
ABSTRAC ..... **XVIII**
INTRODUCCIÓN **1**
CAPÍTULO I: ANTECEDENTES DEL PROBLEMA **3**
1. 1. Formulación del Problema 3
1. 2. Justificación e importancia de la investigación 6
1. 3. Delimitación 7
1. 4. Limitaciones 7
1. 5. Estado de la Cuestión o Estado del Arte 7
1. 6. Pregunta de investigación 9
1. 7. Objetivo General 10
1. 8. Objetivos específicos 10
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL **11**
2. 1. Marco Teórico 11
2. 1. 1. La Resolución de Problemas en Matemática 11
2. 1. 2. Resolver Problemas como habilidad a desarrollar en los estudiantes chilenos 12
2. 1. 3. El Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele 14
2. 1. 4 Propiedades del Modelo Van Hiele 16
2. 1. 5. Los niveles del Modelo Van Hiele 18
2. 1. 6. Las fases del Modelo de Van Hiele 19
2.2. Marco Conceptual 21
2. 2. 1. Problema 21
2. 2. 2. Resolución de Problema 22
2. 2. 3. Estrategia de Resolución de problemas 23
2. 2. 4. Geometría 23
2. 2. 5. Niveles de razonamiento geométrico 23
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA **25**
3. 1. Tipo de investigación 25
3. 2. Metodología 25

3. 2. 1. Recolección de datos 26
3. 2. 2. Elaboración de la prueba diagnóstico 26
3. 2. 3. Análisis de información recabada 27
3. 2. 4. Elaboración de la secuencia metodológica para el profesor o la profesora 27
3. 3. Paradigmas y perspectivas filosóficas 28
3. 4. Diseño de la investigación 28
3. 4. 1. Diseño de la investigación 28
3. 4. 2. Diseño de la muestra 28
3. 5. Descripción de las técnicas e instrumentos 29
3. 6. Criterios de credibilidad 30
3. 6. 1. Validación de la secuencia metodológica y la prueba diagnóstico 30
3. 7. Propuesta de Secuencia Metodológica 30
CAPÍTULO IV: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN 130
4. 1. Elaboración Prueba de Diagnóstico 131
4. 2. Análisis de contenido 132
4. 3. Discusión de los resultados en base al marco teórico 135
4. 3. 1. La habilidad de resolver problemas a través del estudio de los conceptos geométricos presente en la propuesta 135
4. 3. 2 ¿Cómo fomentar el lenguaje técnico de la Geometría en los estudiantes? 137
4. 3. 3. La resolución de problemas en la clase: problemas y actividades 137
4. 3. 4. ¿Cómo entendemos la resolución de problemas hacia los y las estudiantes? 138
4. 3. 5. ¿Cómo se trabaja el Modelo Van Hiele aplicado en la propuesta? 140
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS. 144
5. 1. Conclusiones 144
5. 2. Sugerencias 146
BIBLIOGRAFÍA 148
ANEXOS 151
ANEXO 1: Evaluación Diagnóstica de Geometría 151
ANEXO 2: Rúbrica de Respuestas Esperadas de la Evaluación Diagnóstica de Geometría. 158
ANEXO 3: Organización de la Secuencia para las Subunidades de Geometría de Primer Año Medio. 160
ANEXO 4: Modelo de Planificación de Clases utilizado en cada Subunidad de Geometría. 161

ANEXO 5: Validaciones por Juicio de Expertos para la Evaluación Diagnóstica.... 163
ANEXO 6: Validaciones por Juicio de Expertos de la Secuencia Metodológica. 165

Índice de tablas

Tabla 1 Propiedades del Modelo de Van Hiele 17
Tabla 2 Niveles del Modelo de Van Hiele 19
Tabla 3 Fases del Modelo de Van Hiele 20
Tabla 4 Organización de la Propuesta de Secuencia Metodológica 31
Tabla 5 Organización de subunidades de Geometría 134
Tabla 6 Participación del profesor en cada fase del Modelo presente en la secuencia. 136
Tabla 7 Relación entre el objetivo del Nivel 2 y sus características en cada Subunidad temática. 142

Índice de figuras

Figura 1 Representación de las fases y niveles del Modelo de Van Hiele 16
Figura 2 Dirección de un vector. 46
Figura 3 Recorte de una actividad de la Secuencia Metodológica 141

RESUMEN

El problema que aborda esta investigación tiene dos focos de atención: por un lado, la falta de material metodológico dirigido a los profesores que imparten clases en la unidad de Geometría en la Enseñanza Media y por otro lado, el bajo desempeño académico de los estudiantes chilenos en el área de resolución de problemas en Geometría, evidenciado en diversas pruebas estandarizadas.

Este trabajo intenta dar una solución al problema mediante un apoyo técnico-metodológico al profesor o profesora de Matemáticas, a través de una propuesta de secuencia metodológica para el desarrollo de la Unidad de Geometría, presentada a través de la metodología de la Resolución de Problemas y siguiendo el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele.

Como aporte del desarrollo de este trabajo, se concluye que el profesor o profesora de Matemáticas, se define como mediador(a) y/o facilitador(a) en la construcción de los aprendizajes en los y las estudiantes, garantizando la acción conjunta de dos corrientes metodológicas contemporáneas y de demostrada utilidad, como son el aprendizaje bajo la metodología de la "resolución de problemas" y la clasificación de los estudiantes en los diferentes niveles de razonamiento geométrico que establece el Modelo de Van Hiele. .

Palabras Claves: Resolución de Problemas, Modelo de Van Hiele, Geometría, secuencia metodológica.

ABSTRACT

The problem addressed by this research deals with two main topics. Firstly, the lack of methodological material that supports teachers who teach classes in the Geometry units in Chilean High Schools. And secondly, the low academic performance of Chilean students in the problem solving area in Geometry, demonstrated in several standardized tests.

This work attempted to give a solution to these problems through a technical-methodological support for the Professor or Teacher of Mathematics. It consisted in supporting the teacher with a proposal of a methodological sequence for the development of the Unit of Geometry in the classroom. The methodological sequence was based on the methodology of Problem Solving exercises and the Van Hiele Geometric Reasoning Model.

As a contribution of the development of this work, it was concluded that the Mathematics Teacher is defined as a mediator and/or facilitator in the learning building process of the students. Under this role, the teacher might guarantee the joint action of two contemporary methodological approaches of demonstrated value, such as the learning process using the methodology of "Problem Solving activities" and the classification of students in the different levels of geometric reasoning established by the Van Hiele Model.

Key wordrs: Problem Solving, Van Hiele Model, Geometry, methodological sequence.

INTRODUCCIÓN

El planteamiento del problema que aborda esta tesis se fundamenta en la escasa literatura existente, sobre el desarrollo de orientaciones metodológicas para los profesores y las profesoras de Matemáticas, especialmente para trabajar en el aula la resolución de problemas en Geometría.

En razón de lo planteado en el párrafo precedente, la presente investigación tiene por objeto producir un material didáctico que permita guiar al profesor o profesora de Matemáticas, mediante el tratamiento del Modelo de Razonamiento Geométrico aportado por Van Hiele, en el desarrollo de la Unidad de Geometría, siguiendo la metodología de la resolución de problemas.

En su fase diagnóstica, el trabajo, desde una base empírica, recoge datos acerca de la habilidad de resolución de problemas en un curso de Primer Año Medio de un Establecimiento Educacional de la Comuna de Puerto Montt. En base a esta información, se elabora una secuencia metodológica dirigida a profesores que dicten la unidad de Geometría en Primer Año Medio, para fomentar la Resolución de Problemas, como una habilidad que debe caracterizar el ejercicio de la profesión docente, particularmente, en el área de las Matemáticas.

La metodología usada es aplicada, de carácter exploratoria, y desarrollada en fases de investigación, estos son: la recolección de datos, elaboración de una Prueba de Diagnóstico, el análisis de la información recabada y la elaboración de la secuencia metodológica.

La estructura de la investigación consta de cinco capítulos, el primero de ellos presenta los antecedentes del problema, quien se apoya en el planteamiento del problema y su justificación. El capítulo que sigue es el marco teórico y conceptual, que se sustenta en las impresiones de distintos autores que apoyan de resolución de problema y explican el Modelo de Van Hiele. El tercer capítulo consiste en la metodología de la investigación, el que aborda las fases de cómo se lleva a cabo la investigación. El cuarto capítulo es de análisis de la información, que se desarrolla al margen de la búsqueda bibliográfica presentada en el capítulo tres. Finalmente, el quinto capítulo, conclusiones y sugerencias, que comprende deducir y complementar, y dar origen a nuevas investigaciones, en base a los capítulos anteriores.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

1. 1. Formulación del Problema

La Resolución de Problemas es una de las habilidades para ser trabajada en las salas de clases según se describe en las Bases Curriculares (2013) de 7mo básico a 2do medio, junto con ello está Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

El resolver problemas en Matemáticas es importante en la escolaridad puesto que fomenta el pensamiento matemático, que es ahora auto retenido por conceptos repetitivos sobre resolver un problema. El pensar matemáticamente conlleva a obtener los siguientes resultados según Campistrous y Rizo (2013; p. 347):

- Interpretar los datos de la vida diaria y tomar decisiones en función de esta interpretación.
- Usar las Matemáticas en forma práctica desde simples sumas algorítmicas hasta análisis complejos (incluyendo estadísticos) y usar la modelación.
- Poseer un pensamiento flexible y un repertorio de técnicas para enfrentarse a situaciones y problemas nuevos.
- Poseer un pensamiento crítico y analítico tanto al razonar como al considerar razonamientos y argumentos de otros.

En la actualidad, la resolución de problemas es tratada por los profesores y las profesoras como un mero concepto de aplicación ante un problema, lo que implica desarrollar un proceso mecánico para obtener un resultado satisfactorio, y hacer ver a los estudiantes que no existiría otra manera para encontrar una solución. Entonces, para el estudiante, resolver problemas en Matemáticas, independiente de la unidad temática, es visto como desarrollar un procedimiento X para un problema Z cuya solución es K. En los textos de Matemáticas entregados por el Ministerio de Educación, se entrega el procedimiento y luego se proponen problemas que son abordados y resueltos, de esta manera. Por lo tanto, el trabajo del estudiante es identificar el problema para después aplicar el método de solución.

Tener un sistema para resolver problemas en Matemáticas, mediante algún método o procedimiento clásico, ha sido eje en la preparación de los estudiantes ante evaluaciones nacionales anuales como SIMCE[1] y PSU[2], y a partir de ello, jerarquizar a los establecimientos según el resultado obtenido. En ambas evaluaciones, el sistema de medición no considera la descripción del procedimiento realizado por el estudiante, debido a que se plantea una cierta cantidad y restricción de soluciones para cada problema, sin considerar el procedimiento utilizado para llegar a la solución.

En evaluaciones internacionales sobre Resolución de Problemas, Chile no se encuentra en los puestos más sobresalientes. En la última entrega de resultados de la Prueba PISA[3] la participación de estudiantes chilenos, desde 7mo a 4to medio, “tiene el puntaje significativamente más alto, quedando 44 puntos sobre el promedio de los países con más bajos rendimientos y 52 puntos por debajo del promedio de la OCDE (500 puntos)” (Agencia de Calidad de Educación, 2014: p.3). Además, el informe entregado por la Agencia de Calidad de Educación (2014), a partir de los resultados extraídos de Creative Problem Solving: Students’ Skills in tackling real-life problems 2012, infiere que:

- “un 38% de ellos (estudiantes) no logra alcanzar el nivel básico de competencias para la resolución de problemas” (2014; p. 4), es decir que los estudiantes logran comprender una pequeña parte del escenario problemático planteado.
- Los estudiantes hombres en la Prueba PISA 2012 “demuestran mayor competencia para resolver problemas en contextos reales que las mujeres” (2014; p. 5).

---

[1] Sistema de Medición de la Calidad de la Educación
[2] Prueba de Selección Universitaria
[3] Programme for International Student Assessment

- “mientras más alto es el nivel socioeconómico y cultural de los estudiantes chilenos, su nivel de competencia para resolver problemas es mayor” (2014; p. 6).

En resumen, las evaluaciones nacionales (SIMCE y PSU) fomentan la memoria de procedimientos que sirven para resolver determinados problemas mientras que las evaluaciones internacionales, como TIMSS y PISA, se concentra en la estrategia que utiliza el estudiante para resolver problemas.

Tanto en las evaluaciones nacionales como internacionales, los ejes a trabajar son: Números, Geometría, Datos y Azar y Estadística. Existen diversos materiales didácticos, que se ofrecen al profesor o profesora de Matemáticas, que consisten, en su mayoría, en la visualización y uso de los números en la vida cotidiana; esto, sin embargo, no ocurre en el caso de Geometría. Los autores Vargas y Gamboa citan a Berrantes y realizan la siguiente descripción:

> (…) afirma que la enseñanza de la geometría se concentra, actualmente, en la memorización de conceptos y su aplicación, sin que el estudiante pueda llegar a una conceptualización más allá de lo que sus propias capacidades se lo permitan. (Vargas y Gamboa, 2013; p. 77)

Vargas y Gamboa (2013), plantean que:

> (…) parte de la importancia de la geometría es que ayuda al individuo a desarrollar destrezas mentales de diversos tipos, como la intuición espacial, la integración de la visualización con la conceptualización, y la manipulación y experimentación con la deducción, pues por más sencilla que sea la situación geométrica enfrentada, esta le provee de grandes posibilidades de exploración, análisis y de formulación de conjeturas, independientemente del nivel en el que se encuentra. (p. 78)

El planteamiento anterior, sin dudas, refiere el desarrollo del razonamiento geométrico.

La situación que ocurre en las salas de clases de Chile es que no se trabaja la metodología de resolución de problemas en Geometría, es decir, no se fomenta la resolución de problemas en Geometría y no se proponen a los profesores y las profesoras, modelos de secuencias metodológicas que abarquen esta unidad, de manera tal que permita a los estudiantes hacer uso de la resolución de problemas como una habilidad que debe ser practicada, como parte de su información. En lo específico, existe una falta de estrategias metodológicas dirigidas a los profesores y las profesoras, para mediar en el aula y así hacer uso de la resolución de problemas para trabajar en las aulas.

Lo dicho en el párrafo precedente, constituye una brecha en el desarrollo de metodologías de enseñanza para el logro de conocimientos en el subsector de Matemáticas de la Enseñanza Media en Chile, siendo abordada en esta tesis como un forma de solución al problema planteado, a través de una propuesta de secuencia metodológica, dirigida a los profesores y las profesoras del área, para instruir la habilidad de resolver problemas en Geometría, usando todas las facetas que se plantean sobre el razonamiento geométrico.

De lo anterior, se propone utilizar el modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele (1986) como base teórica para la confección planificaciones de clases y actividades basadas en la Resolución de Problemas. Luego, se genera como producto de la investigación una secuencia metodológica dirigida a los profesores de matemáticas para trabajar en el aula la habilidad de resolución de problemas en la unidad didáctica de Geometría.

1. 2. Justificación e importancia de la investigación

El aporte de este trabajo, es entregar al profesor y profesora de Matemáticas, que imparta clases a un primer año medio, una secuencia metodológica en el área de Geometría. Para ello se realiza un diagnóstico, que consiste en una recogida y análisis de información sobre el nivel de razonamiento geométrico en estudiantes, en un Establecimiento Educacional de la comuna de Puerto Montt, como base empírica para construir la Propuesta didáctica.

La resolución de problemas es definida en las Bases Curriculares (2013) de Matemáticas como habilidad, pero en la práctica es vista como un proceso rutinario que se aplica al final de la unidad, especialmente en el caso de Geometría. En consecuencia es oportuno proponer una secuencia metodológica en la unidad didáctica de Geometría que fomente, en los estudiantes, la habilidad de resolver problemas.

La secuencia metodológica propuesta en este trabajo se dirige a los profesores y profesoras de Matemáticas, que imparten la unidad de Geometría para estudiantes que inician la Educación Media. La secuencia se enfoca en desarrollar en los y las estudiantes, estrategias de resolución de problemas usando el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele mediante la orientación del profesor o profesora. La unidad didáctica a trabajar es Geometría cuyos contenidos generales para el primer año de la Enseñanza Media son: “congruencia de figuras planas” y “transformaciones isométricas”.

1. 3. Delimitación

La secuencia metodológica elaborada es una propuesta enfocada para el primer año de Enseñanza Media, en la unidad didáctica de Geometría.

1. 4. Limitaciones

Para la consecución de los objetivos propuestos en esta investigación se considera que no se presentan limitaciones que restrinjan el presente trabajo en cuanto a: tiempo, recursos y conocimientos teóricos y metodológicos.

1. 5. Estado de la Cuestión o Estado del Arte

Diversas investigaciones se enfocaron en aplicar el Modelo de Razonamiento Geométrico en áreas específicas de la Geometría, por mencionar algunos:

- ✓ El Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad Matemáticas (Guillén, 2004).
- ✓ El Modelo de Van Hiele en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, tomando como base la ecuación de Riccati (Gómez, 2005).
- ✓ "Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas" (Algarín y Fiallo; 2011), presentado para contribuir en cómo realizar unidad didáctica de razones trigonométricas cuyo objetivo es la evolución de los aprendizajes conceptuales y procedimentales en los estudiantes de Bogotá, que se sitúan entre los 14 y 16 años de edad.
- ✓ "Una aproximación al teorema de Pitágoras en el contexto de van Hiele" (Restrepo, Zapata y Jaramillo; 2012).
- ✓ "La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del geogebra, según el Modelo de Van Hiele" (Vargas y Gamboa, 2013).

También, se encuentra una investigación que aplica el modelo, a un concepto matemático, este es "El concepto de proporcionalidad en el contexto del modelo de Van Hiele", dirigida por los autores Ibarra, Sucerquia y Jaramillo (2013), facultativos de la Universidad de Antioquia (publicado por la Revista Educación Científica y Tecnológica). Su investigación consistió en caracterizar y determinar en qué nivel de razonamiento sobre el concepto de proporcionalidad se encontraban cuatro estudiantes de quinto grado de una institución educativa de Briceño, Colombia.

Se han realizado Investigaciones sobre el Modelo de Van Hiele usando programas computacionales, como el titulado: Razonamiento geométrico en la resolución de Problemas de conjeturación y demostración utilizando el software cabri géomètre II", presentado por los autores Laurito y Valdivié (2011). Esta investigación tiene por objetivo estudiar el razonamiento geométrico de los estudiantes usando el programa computacional Cabri Géomètre II cuyas actividades fueron la conjetura y demostración en resolución de problemas. La investigación fue aplicada luego de un pre test seleccionando a 15 estudiantes que cursan segundo semestre de Educación Matemática (Laurito y Valdivié, 2011).

En Chile se realizó un estudio en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule por los investigadores Aravena y Caamaño (2013) y que consistió en determinar el nivel de razonamiento geométrico de estos estudiantes concluyéndose que se encontraban en el nivel más básico.

Actualmente, los autores Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016) realizan publicaciones sobre el Modelo de Van Hiele, entre ellas, un artículo que tiene por título "Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile", enfocada a estudiantes de 2° año medio, trabajando con un grupo control y otro experimental. En su metodología, utilizaron un pre test y un post test para evaluar el cambio de razonamiento geométrico y mejorar los aprendizajes de esta rama del saber.

1.6. Pregunta de investigación

Se genera la siguiente pregunta de investigación para tratar el problema de investigación:

¿Cómo construir una secuencia metodológica basada en la Resolución de Problemas en la enseñanza de una unidad didáctica de Geometría para estudiantes de Primer año Medio usando el Modelo de Van Hiele?

1. 7. Objetivo General

Proponer una secuencia metodológica dirigida a profesores que impartan clases a estudiantes de Primer Año de Enseñanza Media basada en la Resolución de Problemas en la enseñanza de la unidad de Geometría usando el Modelo de Van Hiele.

1.8. Objetivos específicos

1. Identificar mediante una Prueba Diagnóstica en qué nivel de razonamiento geométrico según el Modelo de Van Hiele se encuentran los estudiantes.
2. Diseñar situaciones problemas para comprender las subunidades de la unidad de geometría mediante la Resolución de Problemas.
3. Diseñar una secuencia metodológica basada en las fases del Modelo de Van Hiele sobre la unidad de Geometría en Primer Año de Enseñanza Media.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

2. 1. Marco Teórico

2. 1. 1. La Resolución de Problemas en Matemática

Resolver problemas de Matemáticas puede ser una tarea caótica para los estudiantes, con el simple hecho de tener que enfrentarse a ella. Entonces, ¿por qué es necesario trabajar la Resolución de Problemas en las salas de clases?

Un estudiante, al resolver un problema de Matemáticas, se siente hábil, pero no por conocer de antemano la respuesta, sino porque encuentra la forma de explicar su procedimiento, lo que despierta en él una riqueza de conocimientos. Es mayor aún si en su explicación utiliza un lenguaje que lo diferencie del monótono para que luego sea capaz de inferir en vez de comunicar, o bien, ser preciso y riguroso en la explicación en vez de ser redundante y caer en lo ambiguo. El procedimiento que describe el estudiante se llama estrategia en la Resolución de Problemas y según Campistrous y Rizo (2013; p. 346) lo describen como:

> La Resolución de Problemas está constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es específico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento "ad hoc" y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución.

Los factores que inciden al momento de resolver un problema en Matemáticas pueden ser: comprensión lectora (Campistrous y Rizo, 2013; p. 349) y sistema de creencias. En una investigación realizada por Campistrous y Rizo (1999) sobre Estrategias de Resolución de Problemas en la Escuela en estudiantes de Cuba que se encontraban entre cuarto y sexto año de primaria siguieron una línea investigación en base a las creencias de estos estudiantes, las que fueron:

- No se puede resolver un problema si no se ha visto antes otro parecido.
- Siempre se busca la manera de dar un resultado (en los tests había situaciones que no eran problemas pues carecían de pregunta, pero de todos modos los alumnos calculaban y daban una respuesta).
- Un problema siempre debe conducir a resolver operaciones.
- Los problemas siempre son de lo último que se está dando (en el sexto grado estaban estudiando el tanto por ciento y utilizaron estos procedimientos en situaciones que no tenían nada que ver con eso).

2. 1. 2. Resolver Problemas como habilidad a desarrollar en los estudiantes chilenos

El resultado de la participación de estudiantes provenientes de distintos niveles educativos en pruebas internacionales, como PISA o TIMSS, reflejan que, en general, no tienen estrategias para resolver problemas y el razonamiento utilizado por los estudiantes es bajo. En cuanto a las pruebas nacionales como PSU o SIMCE, por sus características, no permite conocer las estrategias que utilizan los estudiantes, sino que promueve la opción de recordar procedimientos para dar con la solución a un problema en específico. Los autores Campistrous y Rizo (2013) se apoyan en la idea de incorporar el uso de la resolución de problemas, como un objeto de enseñanza y no como un mero conocimiento que el estudiante debe adquirir.

El Ministerio de Educación presenta en las Bases Curriculares[4](2013) cuatro habilidades que el estudiante adquiere al egresar de la Enseñanza Media. Estas habilidades son:

- ✓ Resolver Problemas.
- ✓ Representar.
- ✓ Modelar.
- ✓ Argumentar y Comunicar.

Por otro lado, en las mismas Bases Curriculares de Educación en Matemáticas se contradice el término de habilidad de resolver problemas "(…) los alumnos comparan, miden y estiman magnitudes, analizan propiedades y características

[4] Bases Curriculares de matemática de 7mo. Básico a 2do. Medio.

de diferentes figuras geométricas de dos y tres dimensiones (…) los alumnos aprenderán a calcular perímetros, áreas y volúmenes al resolver problemas técnicos y cotidianos” (2013, p. 110).

Las Bases Curriculares (2013) sugieren trabajar Resolución de Problemas en las salas de clases, pero el debate sigue siendo el mismo. Desde los estudiantes de Educación Básica, quienes presentan escasas estrategias para resolver un problema en Matemáticas, esta deficiencia se mantiene en la Educación Media. De esta manera, se observa que los bajos resultados, tanto en evaluaciones nacionales como internacionales, en cuanto a esta temática, siguen manteniéndose.

Las estrategias para resolver problemas de Matemáticas en las aulas chilenas son variadas, algunos profesores aplican la propuesta de Polya (1945) en base a preguntas y otros son innovadores como los elaborados por el Centro de Modelamiento de Matemáticas de la Universidad de Chile: Taller RPAcción, Taller RPContenido y TallerRPAula (Perdomo-Díaz y Felmer, s. f.)

Estas estrategias se cumplen para un eje específico de la asignatura Matemática, por ejemplo Números. Es decir, se prepara al estudiante para responder ante un problema específico; así como lo afirma Torres, citado por Cruz (2008, p.107):

> (…) esta enseñanza es aquella donde los alumnos son situados sistemáticamente ante problemas, cuya resolución debe realizarse con su activa participación, y en la que el objetivo no es sólo la obtención del resultado sino, además, su capacitación independiente para la resolución de problemas en general.

Los estudiantes no manejan una estrategia para resolver problemas, aun cuando estas son transferidas por los docentes. Para mejorar este aspecto, diversos investigadores elaboran situaciones que permitan al estudiante trabajar en el desarrollo de estrategias. Los autores Campistrous y Rizo (1999) trabajaron en siete estrategias aisladas[5] las que permitieron en los estudiantes intervenidos resolver problemas usando estas estrategias seleccionadas por los autores.

Una de las principales ramas de las Matemáticas que busca: generalizar, inferir, deducir y crear es la Geometría. El logro de estas habilidades recompensa al estudiante, ampliando su razonamiento matemático y, particularmente, geométrico, los que son, básicamente, ejes que articulan con la resolución de problemas, como lo plantea Molero (s.f) en su artículo titulado ¿cómo resolver problemas de Geometría? Por otra parte, Campistrous y Rizo (2013, p.348) plantean que la resolución de problemas es "el corazón de las Matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas".

2. 1. 3. El Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

El matrimonio Van Hiele (Pierre Van Hiele y Dina Geldolf) ha desarrollado estudios en Geometría y propusieron[6] un modelo particular de razonamiento geométrico. Este Modelo explica "cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes clasificándolos en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo". (Vargas y Gamboa, 2013; p. 81)

Los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, según Zambrano (2006), quedaron establecidos a partir de su práctica docente por más de 10 años, donde detectándose que la enseñanza de la Geometría, arrojaba bajos resultados, debido a que los estudiantes no entendían los argumentos y explicaciones que se les pedía. En el ejercicio de la docencia del matrimonio Van Hiele se dieron cuenta que al enseñar Geometría a un grupo de personas de 30 años y a otro de 20, ambos grupos tenían las mismas dificultades. Para lograr que sus estudiantes

[5] Los autores justifican que las estrategias aplicadas fueron extraídas desde la investigación "La enseñanza y valoración de la solución de problemas matemáticos" de Larry Sowder; estas estrategias son las que utiliza un estudiante a la hora de enfrentarse a un problema.

[6] En la Tesis Doctoral de Adela Jaime (1993, p.5) cita desde Van Hiele (1986, Cap. 8) que el matrimonio realiza la primera descripción de los primeros 3 niveles que tenían en ese entonces, siendo publicado en 1955: Análisis, Clasificación y Deducción Formal.

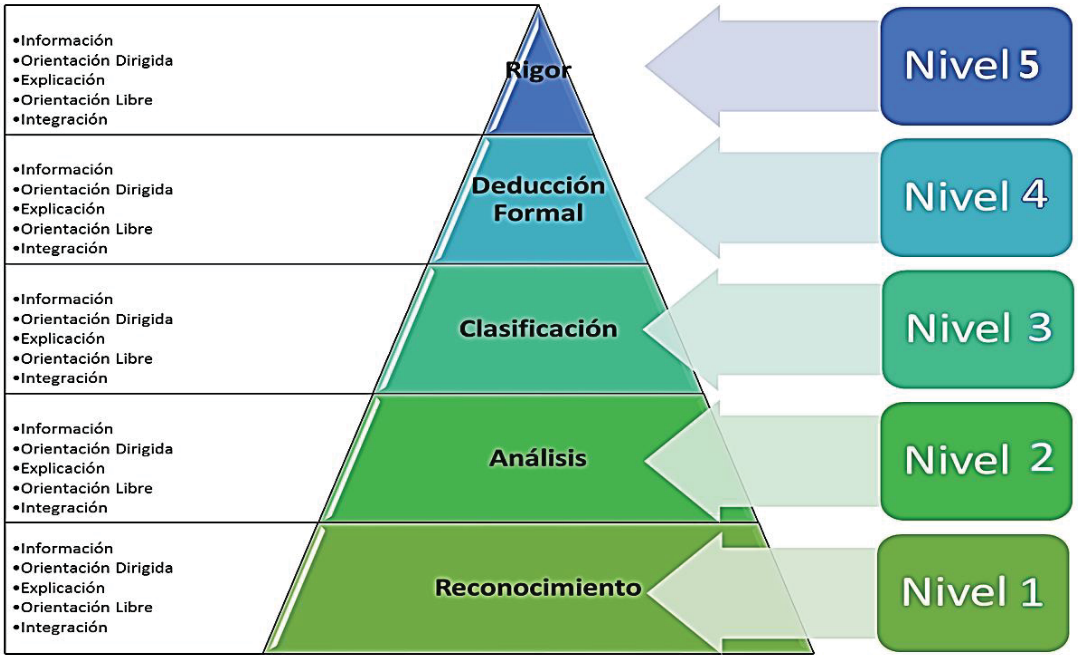
mejoraran la calidad de sus razonamientos, debieron estudiar e involucrarse con la Teoría de Piaget, que según Gutiérrez y Jaime (1991) (citado desde Goncalves, 2006), les permitiría determinar el desarrollo del razonamiento geométrico. De esta manera “reorganizaron lo que ellos llaman los espacios oscuros y descubrieron lo que en adelante se denominaría los niveles de Van Hiele” (Zambrano, 2006, p.3), más conocido como el “Modelo de Razonamiento Geométrico Van Hiele”.

Goncalves (2006) explica que el Modelo está formado en dos partes: una descriptiva y la otra directiva. La primera consiste en: “(…) cómo razonan los estudiantes.” (Gutiérrez y Jaime, 1998; p.27) reflejándose en los niveles de razonamiento que tiene el estudiante desde “ (…) que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo” (Gutiérrez y Jaime, 1990, p.305), mientras que la segunda (dirigida) es derivada a la manera en que los profesores y profesoras deben ayudar a sus estudiantes para obtener el nivel superior de razonamiento (Gutiérrez y Jaime, 1990; Goncalves, 2006), es decir, indicadores que les permite a los profesores conocer si el estudiante ha alcanzado un cierto nivel y así comenzar el siguiente. Este proceso recibe el nombre de Fases de Aprendizaje. Por lo tanto, se infiere de la autora Jaime (1993) que los niveles del Modelo de Van Hiele son regidos por una estructura que comienza desde la descripción hasta la comparación de una unidad en análisis, las que van acompañadas de las fases de aprendizaje que son conductoras del logro del nivel que se propone lograr.

El Modelo está distribuido en cinco niveles “que forman la parte descriptiva del modelo, corresponden a los distintos tipos de razonamiento geométrico que podemos observar en los estudiantes a lo largo de su formación matemática” (Gutierrez y Jaime, 1989, p.89)

A continuación se presenta un bosquejo (Figura 1) de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, junto con las fases de aprendizaje, las que posteriormente serán explicados.

Figura 1 Representación de las fases y niveles del Modelo de Van Hiele



Fuente: Elaboración de la Autora.

A modo de resumen, Fouz (2006, p.33) entrega las ideas básicas del Modelo de Van Hiele (1986), presentado en *Test geométrico aplicando el Modelo de Van Hiele,* las que son:

- ✓ "el aprendizaje de la Geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento"
- ✓ "que no van asociados a la edad"
- ✓ "solo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente"
- ✓ Una persona junto con un nuevo contenido geométrico a aprender "pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la Geometría, influirá en lo que haga más o menos rápidamente".

2. 1. 4 Propiedades del Modelo Van Hiele

A continuación se presenta las principales características de los niveles de Van Hiele descritas por Jaime y Gutiérrez (1990) y Jaime y Gutiérrez (1991) y que fueron de resumidas en la Tabla 1.

Tabla 1 Propiedades del Modelo de Van Hiele

Descripción	**Propiedad**
"No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber alcanzado el nivel inferior" (Jaime y Gutiérrez, 1990; p. 311) El Modelo es recursivo es como una cadena puesto que trabaja los elementos en forma explícita e implícita a la vez, estando unidos. Por ejemplo, el estudiante al estar en el segundo nivel necesitó estudiar los elementos implícitos en el primer nivel y a su vez alcanzar los elementos explícitos dentro de este mismo nivel para que al estar en el segundo nivel estudie los elementos explícitos, que toman rol de implícito del nivel, y alcanzar los elementos implícitos del tercer nivel. Así como señalan los investigadores Jaime y Gutierrez (1991; p. 53), en cuanto a alcanzar un nivel de razonamiento superior: "En este contexto, el trabajo central del profesor es conseguir que sus alumnos lleguen a ser conscientes del uso que están haciendo de esos elementos implícitos de su razonamiento y aprendan a utilizarlos de manera voluntaria".	Secuencialidad y jerarquización implica Recursividad
"Cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico" (Jaime y Gutiérrez, 1990; p. 315) Los estudiantes que se encuentren en un nivel diferente de otro estudiante no podrán entenderse puesto que ambos se encuentran en niveles distintos. Entiéndase que, por ejemplo, un estudiante universitario que se ubica en el nivel 3 de razonamiento no podría tener una conversación apropiada, sobre un concepto matemático, con un estudiante de 1° año medio que se encuentra en el nivel 2 de razonamiento puesto que la utilización de las conceptos son más estructuradas en el estudiante universitario. Entonces, como lo plantea Jaime y Gutierrez (1991; p. 53) frente al comportamiento del profesor con sus estudiantes: "(…) Con esto, Van Hiele nos avisa de que si queremos que nuestros alumnos nos entiendan realmente, debemos situarnos en su nivel, en vez de pretender que ellos se sitúen en el nuestro".	Especificidad del lenguaje
"(…) el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y que durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y del otro." (Jaime y Gutiérrez, 1990; p. 319) Se refiere a que el estudiante tiende a utilizar palabras técnicas sobre un razonamiento haciendo creer que se encuentra en el nivel siguiente. El simple hecho de utilizar un lenguaje apropiado no significa que el estudiante haya subido o saltado de nivel. Por ello, Jaime y Gutiérrez (1991; p. 54) proponen a los profesores que aplican este Modelo "(…) preguntarse cómo hay que tratar a los estudiantes que presentan indicios de haber adquirido algunas características de un nivel y también de no haber adquirido otras."	Continuidad

Fuente: Elaboración de la autora.

Continuación Tabla 1.

El estudio de los niveles de razonamiento es distinto en todas las áreas de la Geometría. Por ejemplo, un estudiante puede estar en el 3 nivel de razonamiento geométrico sobre polígonos mientras que se encuentra en nivel 1 de volumen de cuerpos geométricos. Así como lo plantea Jaime y Gutiérrez "(…) se puede observar cómo un estudiante se desenvuelve en distintos niveles de razonamiento si le proponemos actividades basadas en diferentes área de las matemáticas."(1990; p. 319)	Localidad

Fuente: Elaboración de la autora.

2. 1. 5. Los niveles del Modelo Van Hiele

La independencia entre cada nivel de razonamiento geométrico no existe, es decir, un estudiante no puede pasar desde el nivel 1, por ejemplo, al nivel 4; para ello debe haber superado el nivel 2 y 3.

Básicamente, los niveles caracterizados por ellos se basaron en el contenido de Polígonos. Posteriormente, varios autores (Vargas y Gamboa, 2013; Zambrano, 2006; Van Hiele, 1999; López, 2013) han realizado actividades e investigaciones en base a polígonos refiriéndose siempre al modelo en cuestión. De esta misma manera, otros autores como Ángel Gutierrez y Adela Jaime (1991) han propuesto aplicar el Modelo a otras áreas de la geometría como es el caso de *Los giros* descifrando las características de los niveles en esta materia; de esta misma manera, Adela Jaime (1993) presenta en su tesis doctoral *Aportaciones a la Interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.*

A continuación, se presentan la Tabla 2 con las características que un estudiante alcanza en cada nivel, los que fueron extraídos de trabajos realizados por Vargas y Gamboa (2013), Fouz (2006), Zambrano (2006) y Jaime (1993).

Tabla 2 Niveles del Modelo de Van Hiele

Características	Nivel
En este nivel se encuentra la visualización o reconocimiento donde el estudiante debe ir asociando conceptos con información que ya maneja pero no diferencia los elementos de la figura. El estudiante no es capaz de reconocer o explicar determinadas figuras sin el ejercicio de comparar dicha figura a partir de otras semejantes a él. Suele describir el aspecto físico de las figuras Suele usar frases como "se parece a…" o "tiene forma de…"	**Nivel 1 "Reconocimiento"**
El estudiante aprende a reconocer y analizar las partes de la figura geométrica, los cuales presentan propiedades pero no conecta la figura a la familia o grupo del que pertenece; además, no es capaz de elaborar una definición. No relacionan unas propiedades con otras. Reconoce la propiedad matemática mediante la observación de la figura y sus elementos y deducen otras propiedades mediante la experimentación.	**Nivel 2 "Análisis"**
El estudiante comienza a razonar de manera formal (matemático) utilizando conceptos y criterios por lo que también son capaces de reconocer y comprender algunas propiedades que se derivan de tras, estableciéndolas condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir para realizar conexiones. Por otro lado, el estudiante es capaz de seguir las demostraciones pero no las comprende en su totalidad. Los razonamientos lógicos siguen apoyándose en la manipulación. El estudiante puede dar una definición matemáticamente correcta. Comprenden el papel de la definición y los requisitos de una definición correcta. Como el estudiante no es capaz de realizar un razonamiento lógico formal entonces aún no comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.	**Nivel 3 "Ordenación"**
A diferencia del nivel anterior, el estudiante o sujeto se encuentra en condiciones de realizar demostraciones a partir del planteamiento del problema abarcado, es decir puede realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado. El estudiante comprende el sentido y utilidad de términos (sistema axiomático de las Matemáticas): definición, axioma, teorema…	**Nivel 4 "Deducción Formal"**
El estudiante se encuentra preparado para comparar demostraciones analizando el rigor matemático de los sistemas usados.	**Nivel 5 "Rigor"[7]**

Fuente: Elaboración de la autora.

2. 1. 6. <u>Las fases del Modelo de Van Hiele</u>

Para completar cada nivel, el estudiante debe completar cada Fase de Aprendizaje llamado por así por los Van Hiele. Estas fases, en su conjunto,

[7] Según estudios realizados por Gutiérrez y Jaime (1991) sostienen que este nivel es alcanzado solo por estudiantes de Universidad y que tengan una base sólida en Geometría.

permiten conocer si el estudiante ha alcanzado el nivel; de esta manera "indican cómo organizar la enseñanza y cómo estructurar el trabajo de los estudiantes, para favorecer el avance de un nivel a otro" (Aravena y Caamaño, 2013; p.149). A continuación, se presenta un resumen (Tabla 3) de cada fase de aprendizaje, sobre la base de los trabajos realizados por los investigadores Vargas y Gamboa (2013) y Gutiérrez y Jaime (1990).

Tabla 3 Fases del Modelo de Van Hiele

Características	Fase
El profesor es el encargado de generar el primer alcance de la información con el estudiante, es decir el guía debe tener claro cuáles han sido los conocimientos previos del estudiantado para determinar las nuevas actividades a seguir otorgando una dirección de estudio a través de materiales. La tarea principal del profesor es saber en qué grado y nivel se encuentran sus estudiantes sobre los contenidos del tema.	**Primera Fase "Información"**
Consiste en la recogida de materiales o problemas y la manipulación de parte de los estudiantes donde deben llevar a cabo los resultados o propiedades para ser descubiertos, comprendidos y aprendidos. A partir de aquí se construyen los elementos básicos para ser consideradas posteriormente como nivel superior, así como lo dicta Van Hiele (1986, p.97)"(…) las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior" (citado desde Vargas y Gamboa, 2013; p.85; y Gutiérrez y Jaime, 1990; p.334). Es por ello que la estrategia didáctica usada por el docente sea secuenciada en cuanto a la obtención de conocimiento de parte de los estudiantes.	**Segunda Fase "Orientación Dirigida"**
Todo lo conocido y/o manipulado anteriormente debe ser aplicado en base de confección de respuestas ante un problema abierto analizando si el estudiante utiliza un razonamiento y lenguaje técnico de las Matemáticas; de esta manera el estudiante desarrollará una nueva estructura a partir de la observación de la primera fase, organizando sus ideas, discutiendo los resultados obtenidos y enunciándolas con rigor. A partir de esto, los estudiantes deben intercambiar experiencias, comentar regularidades observadas y explicar cómo han resuelto el problema.	**Tercera Fase "Explicitación"**

Fuente: Elaboración de la autora.

Continuación Tabla 3.

En esta fase, lo aprendido anteriormente ha de estar ya consolidado, usando un lenguaje técnico y combinando su conocimiento, lo que se manifiesta a través de la resolución de problemas que tienen mayor complejidad donde la propuesta del profesor es prever de una solución guiada a través de distintas, una o ninguna vía de resolución. Es por ello que esta fase se le denomina “Orientación Libre” debido a la independencia que el estudiante va adquiriendo para resolver problemas con un grado de complejidad a través del uso del lenguaje técnico y la justificación.	**Cuarta Fase “Orientación Libre”**
La última fase implica que el estudiante organice sus conocimiento pero no con la introducción de nuevas instrucciones sino que realizando una mirada desde lo aprendido, es decir, fusionando los nuevos conocimientos adquiridos con los algoritmos y la nueva forma de razonar. La tarea del profesor es proporcionar una comprensión global cuya intención no es el aporte nuevos conceptos o propiedad al estudiante sino que comparar y combinar cosas que el estudiante ya conoce. Es decir, “(…) el profesor debe dirigir un resumen de recopilación de los resultados más interesantes que se han estudiado, tratando de que los alumnos los vean como partes de un conjunto más que como una lista de elementos disnexos.” (Gutiérrez y Jaime, 1990; p.359)	**Quinta Fase “Integración”**

Fuente: Elaboración de la autora.

2.2. Marco Conceptual

Los investigadores al analizar la historia de las Matemáticas dirigen sus inicios a los problemas. Un ejemplo de problema es cómo cruzar el río, y para ello algunas soluciones serían: conseguir una balsa, bordear la orilla del río hasta encontrar un espacio reducido que permita cruzar, entre otros.

2. 2. 1. Problema

El investigador Perales en su artículo “Resolución de Problemas: una revisión estructurada” define genéricamente a problema como “cualquier situación prevista o espontánea que produce, por un lado, un cierto grado de incertidumbre y, por el otro, una conducta tendente a la búsqueda de su solución” (1993, p.170). Mientras que, autores como Campistrous y Rizo (2013, p.345) especifican que problema es una situación en donde

> (…) hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer una transformación.

El Ministerio de Educación de Chile (2014, p.13) propone el término problema como "(…) una situación desafiante para el estudiante, pues tiene que movilizar saberes, técnicas, procedimientos, entre otros, para poder dar respuesta a la situación planteada". En contexto nacional, se encuentran los autores del Taller RPAula[8] (Perdomo-Díaz y Felmer, s.f; p.10), quienes definen problema como:

> "(…) una actividad matemática para la cual la persona que la enfrenta no conoce un procedimiento que le conduzca a la solución, ésta tiene interés en resolverlo, le supone un desafío y siente que lo puede resolver. Un problema puede estar planteado en un contexto matemático o no matemático."

En consideración a las definiciones y características planteadas anteriormente por investigadores extranjeros y de participación nacional nace la siguiente concepción para problema: es una situación desconocida donde una persona se encuentra expuesta sin acceder a una respuesta rápida por lo que debe realizar un estudio para encontrar una solución que satisfaga el problema, con la ayuda de factores que están presentes en el planteamiento del problema.

2. 2. 2. Resolución de Problema

La actividad matemática practicada en los establecimientos consiste en resolver problemas son traducidos en desarrollo de algoritmos o rutinas conducentes a la solución sin un proceso de búsqueda (Campistrouz y Rizo, 2013; p.345); el Ministerio de Educación de Chile (2014, p.9) define Resolución de Problemas un Saber y Saber Hacer para comprender la realidad, enfrentarla y resolver diferentes situaciones en distintos contextos. Otra unidad del mismo Ministerio, EducarChile (s. f), establece que resolución de problema es

> (…) el proceso a través del cual podemos reconocer las señales que identifican la presencia de una dificultad, anomalía o entorpecimiento del desarrollo normal de una tarea, recolectar información necesaria para resolver problemas

[8] Activando la Resolución de Problemas en el Aula, este Taller es impartido por el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile es impartido por el Centro de Modelamiento Matemático y Centro de Investigación Avanzada en Educación de la Universidad de Chile.

> detectados y escoger e implementar las mejores alternativas de solución, (...) de manera individual o grupal.

Por lo tanto, para esta investigación se establece que la Resolución de Problemas es una habilidad presente en toda persona que encuentra, mediante el uso de sus propias herramientas, una forma viable y eficaz para explicar el desarrollo de su estrategia de solución, a través de un lenguaje apropiado al contexto.

2. 2. 3. <u>Estrategia de Resolución de problemas</u>

Existe una diversidad de investigaciones realizadas en el marco de resolución de problemas en Matemáticas, muchas de ellas llegan a una misma definición para este contexto, es por eso que se decide tener en cuenta concepciones de autores destacados en la actualidad para efectos de definir estrategia de resolución de problemas.

Para esta presentación se considera la definición realizada por Campistrous y Rizo (2013, p. 346) para el concepto de estrategia:

> (…) un procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es específico sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento “ad hoc” y sobre la base de las cuales incide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución.

2. 2. 4. <u>Geometría</u>

Para este informe se considera el concepto geometría establecido por Hernández y Villalba (2001) como una rama de las Matemáticas que se encarga del estudio de la ciencia del espacio para ser descrita y medida, representada y aplicada, razonada e inferida, vista a través de representaciones conceptuales y procedimentales.

2. 2. 5. <u>Niveles de razonamiento geométrico</u>

Para definir los niveles de Van Hiele se considera las publicaciones de autores como Adela Jaime (1993), Fernando Fouz (2006) y María Aravena y Carlos Caamaño (2013) que han sido formuladas luego de las investigaciones realizadas por el matrimonio Van Hiele desarrolladas en el campo de polígonos de figuras planas. A continuación, se entrega una definición para cada nivel de razonamiento geométrico:

Nivel 1 o nivel de visualización: el estudiante debe ir asociando conceptos con situaciones que ya identifica pero no sabe diferenciar los elementos de la figura.

Nivel 2 o nivel de análisis: el estudiante aprende a reconocer y analizar las partes de la figura geométrica los cuales presentan propiedades, pero no conecta a figura a la familia o grupo que pertenece, además aún no son capaces de elaborar una definición.

Nivel 3 o nivel de ordenación: el estudiante comienza a razonar de manera formal utilizando conceptos y criterios por lo que también son capaces de reconocer y comprender algunas propiedades que se derivan de otras, estableciendo las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir para realizar conexiones. Por otro lado, el estudiante es capaz de seguir las demostraciones, pero no las entiende en su totalidad por lo tanto no comprendería el sistema axiomático de las Matemáticas.

Nivel 4 o nivel de deducción formal: el estudiante se encuentra en condiciones de realizar demostraciones a partir del planteamiento del problema abarcado, es decir, puede realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado.

Nivel 5 o nivel de rigor[9]: el estudiante se encuentra preparado para comparar demostraciones analizando el rigor matemático de los sistemas usados.

[9] Algunos estudios expuestos por Alsina, Fortuny y Pérez (1997) y Gutierrez y Jaime (1991) sostienen que este nivel es alcanzado solo por estudiantes de universidad que hayan tenido una sólida base en el estudio de la Geometría.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

3. 1. Tipo de investigación

La presente investigación es de tipo aplicada puesto que su finalidad es entregar una solución ante un problema que radica en no contar con una secuencia metodológica dirigida a los profesores de Matemáticas de la enseñanza media que impartan la unidad de Geometría para 1° año medio.

Esta investigación es de carácter exploratorio (Hernández, Fernández y Baptista, 1991), puesto que a pesar de existir test sobre razonamiento geométrico aplicados a estudiantes que cumplan ciertas características (por ejemplo intervalo de edad, mismo sexo, promedio de calificaciones similares, etc.) no hay investigaciones que propongan estudios de diseño metodológico que consista en la utilización del Modelo de Van Hiele para abordar la resolución de problemas en el área de Geometría.

3. 2. Metodología

La metodología aplicada en la investigación es presentada a través de fases, etapas contempladas para la confección de la propuesta de secuencia metodológica. Para ello, se describen las características de cada etapa, comenzando por la recolección de los datos de análisis, para finalizar con la elaboración de la secuencia metodológica.

Para una mejor comprensión, la tesis se distribuye en fases de investigación: recolección de datos, elaboración de la Prueba de Diagnóstico, análisis de la información recabada y la elaboración de la secuencia metodológica para el profesor o profesora.

3. 2. 1. Recolección de datos

Los datos son obtenidos desde los Contenidos Mínimos Obligatorios presentados por el Ministerio de Educación (2009) en Matemáticas para estudiantes que cursan primer año medio. Se concentran en las características y objetivos de la unidad de Geometría. Para ello, el Ministerio de Educación (2011) distribuye los contenidos y Aprendizajes Esperados de la unidad de Geometría que se encuentran presentes en el Programa de Estudio de Matemáticas para el Primer Año Medio. Estos son considerados en la etapa de diseño de la prueba de diagnóstico, así como la organización y planificación de las clases.

Para organizar y orientar las planificaciones de clase se utiliza información obtenida por los investigadores Vargas y Gamboa (2013) y Gutiérrez y Jaime (1990), que presentan las características de las Fases del Modelo de Van Hiele para trabajar cada nivel de razonamiento.

3. 2. 2. Elaboración de la prueba diagnóstico

Los contenidos en que se basa la construcción de la Prueba de Diagnóstico son extraídos del Programa de Estudio de Matemáticas para Primer Año Medio (Ministerio de Educación, 2011), los cuales son:

a) Caracterización del plano cartesiano.
b) Ubicación de puntos y figuras en el plano cartesiano e identificación de las coordenadas de los vértices de polígonos representados en él.
c) Vectores en el plano cartesiano.
d) Aplicación de transformaciones isométricas y composiciones de ellas en el plano cartesiano.
e) Concepto de congruencia.
f) Criterios de congruencia en triángulos.
g) Aplicaciones de los criterios de congruencia.

La Prueba de Diagnóstico se aplica a estudiantes que cursan primer año medio de un establecimiento educacional de la Comuna de Puerto Montt, con el objetivo de observar si elaboran una estrategia que permita responder adecuadamente a la situación problemática. Por otro lado, se visualizan los conocimientos previos de los y las estudiantes, en cuanto a los contenidos mínimos precedentes, asociados a la Unidad de Geometría.

Para el diseño y elaboración de los problemas y actividades presentes en la Prueba de Diagnóstico, se consideran las estrategias descritas por Gutiérrez y Jaime (1990).

3. 2. 3. Análisis de información recabada

En base a la confección de las respuestas de los y las estudiantes, sobre identificación y reconocimiento de conceptos en la unidad de Geometría, y las estrategias utilizadas para resolver problemas, se determinará, también, a partir de la elaboración de sus respuestas, el nivel de razonamiento geométrico en que se encuentran.

3. 2. 4. Elaboración de la secuencia metodológica para el profesor o la profesora

La secuencia metodológica propuesta utiliza una matriz de organización que permite enfocar los contenidos de la unidad de Geometría de forma coherente, a partir de establecer los Aprendizajes Esperados, Objetivos Esperados y los Indicadores de Logros, para los niveles uno y dos de razonamiento geométrico del Modelo de Van Hiele.

Los Aprendizajes Esperados se extraen desde el Programa de Estudio en Matemáticas para Primer Año Medio (Ministerio de Educación, 2011) y se utiliza para orientar los Objetivos Esperados y los Indicadores de Logros en ambos niveles, y así proponer los objetivos para cada clase.

3. 3. Paradigmas y perspectivas filosóficas

El presente trabajo es de enfoque cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista; 2010) puesto que describe el tema de investigación, y la recolección de datos es en base a observación y revisión de literatura.

El paradigma que utiliza esta investigación es socio crítico e interpretativo puesto que la intención es mejorar la práctica educativa a través de la solución de un problema, que es el tratamiento de la Resolución de Problemas en Geometría en estudiantes de Primer Año Medio, lo que permite generar una secuencia metodológica dirigida al profesor o profesora de Matemáticas para este nivel de Educación media.

3. 4. Diseño de la investigación

3. 4. 1. Diseño de la investigación

El diseño de la investigación es no experimental pues no se pretende manipular las variables en estudio, y la recogida de datos se realiza en el inicio del desarrollo de la investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 1991).

La recogida de datos, o de información, se realiza mediante una Prueba de Diagnóstico para detectar el conocimiento previo que poseen los y las estudiantes sobre conceptos geométricos fundamentadas. Además, para observar si existe presencia de estrategias para resolver problemas en Geometría, a través del desarrollo de sus respuestas. De esta forma se genera la secuencia metodológica dirigida a un nivel específico del Modelo de Van Hiele, en este caso, con el objetivo de lograr tránsito del primero al segundo nivel de Van Hiele.

3. 4. 2. Diseño de la muestra

La muestra está compuesta por las diversas clases de Geometría para el Primer Año de un establecimiento Educacional de Enseñanza Media de la Comuna de Puerto Montt, que conforman la secuencia metodológica. Cada clase utiliza un modelo de planificación tipo que se ha construido para efecto de investigación, y que se adjunta en Anexo 4.

3. 5. Descripción de las técnicas e instrumentos

La elaboración de la Prueba de diagnóstico, junto con su correspondiente rúbrica de respuestas (Anexo 2) plantea tres objetivos:

- ✓ Diagnosticar si los y las estudiantes utilizan conceptos sobre transformaciones isométricas en el plano y congruencia de figuras planas.
- ✓ Conocer si los y las estudiantes utilizan estrategias que permitan dar con una solución coherente en la resolución de problemas.
- ✓ Identificar en qué nivel de razonamiento geométrico del Modelo de Van Hiele se encuentran los y las estudiantes, a partir del lenguaje técnico y los conceptos que utilizan.

La elaboración de la secuencia metodológica comienza por estudiar el material bibliográfico acerca del Modelo de Razonamiento de Van Hiele. Además de analizar los contenidos propuestos en el Programa de Estudio para Primer Año Medio (Ministerio de Educación, 2011) en la Unidad de Geometría y los aportes realizados por investigadores que han diseñado actividades para observar los niveles de razonamiento geométrico en distintas categoría de estudiantes (sexo, nivel educacional, establecimiento educacional, etc.).

Las características que entrega cada una de las cinco fases del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, se orienta al diseño de las clases. En nuestro caso para una subunidad de Geometría, que debe considerar el o la profesora al momento de impartir, desarrollar y concluir los conceptos geométricos trabajados. Para ello, se utiliza una matriz (Anexo 3) que permite definir, organizar y distribuir, finalmente, los objetivos de las clases de una subunidad de Geometría.

3. 6. Criterios de credibilidad

3. 6. 1. Validación de la secuencia metodológica y la prueba diagnóstico

Tanto la secuencia metodológica como la prueba de diagnóstico, han sido sometidas a validación a través del juicio de expertos (Anexos 5 y Anexo 6). Estos “Expertos” se caracterizan son:

- Una profesora de Matemáticas que posee el grado de Magíster (c) en Didáctica de las Matemáticas con 7 años en ejercicio en Educación Media y universitaria.
- Un Profesor de Matemáticas con 25 años en ejercicio en Educación Media y universitaria.
- Una Profesora de Matemáticas con 20 años de ejercicio e Educación Media y universitaria.

3. 7. Propuesta de Secuencia Metodológica

La Propuesta de Secuencia Metodológica está constituida por planificaciones de clases, distribuida en seis subunidades de la unidad temática de Geometría para Primer Año de Enseñanza Media. A continuación, la Tabla 4 presenta la organización de la Secuencia, para observar en forma general su distribución.

Tabla 4 Organización de la Propuesta de Secuencia Metodológica

Unidad Temática: Geometría		**Curso:** 1°Año de Enseñanza Media	
Subunidad	**Objetivo según el Nivel 2 de Van Hiele**	**Clases**	**Fase del Modelo**
Subunidad 1: Figuras planas en el plano	Deducir algunas propiedades de polígonos a partir de la observación en el plano cartesiano.	Clase 1	Fase 1
		Clase 2	Fase 2 y 3
		Clase 3	Fase 4 y 5
Subunidad 2: Vectores	Extraer propiedades de los vectores a partir de la observación en el plano cartesiano	Clase 4	Fase 1
		Clase 5	Fase 2
		Clase 6	Fase 3
		Clase 7	Fase 4 y 5
Subunidad 3: Traslación de figuras geométricas en el plano	Establecer procedimientos que impliquen realizar traslaciones de figuras planas en el plano.	Clase 8	Fase 1
		Clase 9	Fase 2 y 3
		Clase 10	Fase 4 y 5
Subunidad 4: Reflexión de figuras geométricas en el plano	Establecer procedimientos que permitan facilitar el ejercicio de realizar reflexiones según un eje de simetría en figuras planas en el plano cartesiano.	Clase 11	Fase 1
		Clase 12	Fase 2
		Clase 13	Fase 3
		Clase 14	Fase 4 y 5
Subunidad 5: Rotación de figuras geométricas en el plano	Establecer procedimientos que permitan facilitar el ejercicio de realizar rotaciones en diferentes ángulos de figuras planas en el plano cartesiano.	Clase 15	Fase 1
		Clase 16	Fase 2
		Clase 17	Fase 3
		Clase 18	Fase 4 y 5
Subunidad 6: Congruencia de figuras planas	Deducir los criterios de congruencia de triángulos.	Clase 19	Fase 1 y 2
		Clase 20	Fase 2 y 3
		Clase 21	Fase 4 y 5

Fuente: Elaboración de la autora.

A continuación se presenta la Propuesta completa de la unidad de Geometría, donde, en cada subunidad, se entrega el objetivo de nivel, según las característica de los Niveles del Modelo de Van Hiele, a partir de ello se plantean los objetivos los correspondientes objetivos para cada clase, que constituye la subunidad.

<table>
<tr><td colspan="2">UNIDAD TEMÁTICA: GEOMETRÍA</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUBUNIDAD 1: FIGURAS PLANAS EN EL PLANO CARTESIANO</td></tr>
<tr><td colspan="2">NIVEL 2

OBJETIVO: Deducir algunas propiedades de polígonos a partir de la observación en el plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td>Indicadores de Logros del nivel</td><td>Identifican el tipo de polígono a partir de la medida de sus lados en el plano.

Obtiene la distancia dados dos puntos a partir del conteo de unidades del plano.

Calcula el perímetro de figuras planas en el plano cartesiano.

Calcula el área de figuras planas en el plano cartesiano.

Aplica el teorema de Pitágoras para obtener la medida de los lados de un triángulo rectángulo representado en el plano.</td></tr>
<tr><td>Objetivos de Clases</td><td>Clase 1: Reconocer la existencia de un polígono a partir de las coordenadas de sus vértices.

Clase 2: Comprender el uso del teorema de Pitágoras, aplicado en el plano cartesiano.

Clase 3: Aplicar diversos procedimientos para obtener el área de polígonos representados en el plano cartesiano.</td></tr>
</table>

FIGURAS EN EL PLANO CARTESIANO

CLASE 1

APLICACIÓN DE LA FASE 1: Mediante el planteamiento de un problema, los estudiantes construirán polígonos en el plano coordenado, a partir de la ubicación de sus vértices.

Objetivo: Reconocer la existencia de un polígono a partir de las coordenadas de sus vértices.

Inicio de la clase

El profesor o la profesora, verifica que los y las estudiantes hayan aprendido a ubicar puntos en el plano coordenado, planteando una actividad sencilla, es decir, que identifiquen y representen puntos en el plano coordenado.

Desarrollo de la clase

Esta parte de la clase se iniciará con la proposición de un problema, que será trabajado en equipos de no más de 4 estudiantes. La situación-problema, consistirá en que el o la estudiante deberá representar la ubicación de puntos en un plano coordenado, observando si, se pueden construir polígonos en cada una de las ubicaciones planteadas. El problema que se propone, como ejemplo, es la siguiente:

Problema 1

Si ubicamos una coordenada en el plano, definimos un punto. Si ubicamos dos coordenadas, correspondientes a dos puntos, podemos definir un segmento. Ahora, si ubicamos tres coordenadas, es decir, tres puntos, ¿se formará siempre un triángulo?

Se espera que los estudiantes y las estudiantes observen que no siempre se puede construir un triángulo, puesto que pueden plantearse tres puntos colineales. A esta conclusión deberá llegarse mediante preguntas y respuestas de los y las estudiantes, dirigido por el profesor o profesora, quien a partir de este caso, propondrá una situación análoga, para el caso de la formación de un cuadrilátero. Para ello, podría guiarse, por ejemplo, siguiendo la secuencia de preguntas siguientes:

- ✓ ¿Cuándo no se forma un triángulo en el plano coordenado?
- ✓ ¿Cuándo se forma un cuadrilátero en el plano coordenado?
- ✓ ¿Cuándo no se forma un cuadrilátero en el plano coordenado?
- ✓ ¿Cuáles son las condiciones mínimas, para formar un polígono cualquiera en el plano coordenado?

Cierre de la clase- metacognición

Los grupos/equipos de trabajo, que seleccione el profesor o la profesora, podrán exponer sus respuestas (representación) ante el problema planteado, mientras que el profesor o la profesora va registrando en la pizarra, los conceptos y las características específicas, emanadas de las respuestas que los estudiantes hayan ofrecido a lo largo de la clase.

Finalmente, el profesor o la profesora, formalizará los aprendizajes que han sido logrados desde el planteamiento de la situación-problema.

Las condiciones mínimas para formar un polígono, a partir de la posición de sus vértices en el plano son las siguientes:

Para un triángulo (3 vértices), que sus tres vértices no sean colineales.

Para un cuadrilátero (4 lados), que tres de sus vértices no sean colineales.

Para un pentágono (5 lados), que cuatro de sus vértices no sean colineales.

Resumiendo:

Para un polígono cualquiera (de n lados, $n \geq 3$), que $n-1$ de sus vértices no sean colineales.

FIGURAS EN EL PLANO CARTESIANO

CLASE 2

APLICACIÓN DE LA FASE 2 y 3: La clase consistirá en que el estudiante obtenga resultados a partir de la utilización del teorema de Pitágoras.

Objetivo: Comprender el uso del teorema de Pitágoras, aplicado en el plano cartesiano.

Inicio de la clase

Al iniciar la clase, el profesor o la profesora, verificará el conocimiento que tienen los y las estudiantes sobre el cálculo de áreas de figuras planas, específicamente en el caso de un rectángulo y de un triángulo. A partir de garantizar que se poseen los "conocimientos previos", para el logro de las competencias que se proponen alcanzar en esta clase, el profesor o la profesora, propone una problema, que deberá ser trabajada en grupos de no más de tres estudiantes.

A continuación se muestra el problema.

Problema 2

Con el objetivo de crear espacios de recreación y de práctica de deportes, la Ilustre Municipalidad de Puerto Montt quiere construir, en un sector de Mirasol, una plazoleta de juegos, la que, debido a las características del lugar, debe tener forma de triángulo, La plazoleta, representada por un triángulo en el plano cartesiano, tiene como coordenadas de sus vértices: (4; 5), (-4; -1) y (-1; -5). ¿Cuál es el área de la plazoleta?

El objetivo de la resolución del problema, es que el o la estudiante ocupe como estrategia de solución el teorema de Pitágoras, lo que, definitivamente, le permitirá identificar la existencia de dos segmentos perpendiculares y con ello, calcular el área de la plazoleta.

Desarrollo de la clase

A medida que el profesor o la profesora, vaya observando el trabajo de los estudiantes, irá, también, realizando preguntas que los orienten en la estrategia de solución del problema. Esta orientación podría estar guiada, mediante preguntas como las siguientes:

- ✓ ¿Qué información tenemos del problema?
- ✓ ¿En qué parte comenzaron a indagar?
- ✓ ¿Por qué tomar esa dirección hacia la solución y no otra?, ¿Es la única estrategia para resolver el problema?

Una vez resuelto el problema, entonces dirige sus preguntas hacia la recapitulación teórica, proponiendo, por ejemplo, enumerar los conceptos que ha sido recordado y utilizados.

A renglón seguido, el profesor o la profesora, pedirá a los integrantes de dos equipos de trabajo (elegidos previamente), que expliquen cómo resolvieron el problema. Después realizará preguntas en base a los resultados y estrategias tratadas por estos dos equipos. El objetivo es que los estudiantes comparen diferentes vías de solución (si las hubiere) y que puedan proponer otras diferentes.

Se propone que el profesor o la profesora, realice las siguientes preguntas, con el objetivo de evaluar los conocimientos recordados y utilizados, sobre el Teorema de Pitágoras.

- ✓ ¿Cuántas estrategias pueden utilizarse para obtener el área de un triángulo?
- ✓ ¿Qué información hubo que considerar para llegar al resultado?
- ✓ ¿Cómo clasifica este triángulo según sus lados?, ¿y según sus ángulos?
- ✓ ¿Cómo podemos reconocer un triángulo rectángulo?

Cierre de la clase- metacognición

Una vez que los equipos de trabajo realicen su exposición, el profesor o la profesora, formalizará los aprendizajes tratados en clase:

El teorema de Pitágoras se aplica en triángulos rectángulos.

El triángulo rectángulo tienen dos lados llamados catetos y el lado mayor se nombra hipotenusa.

El enunciado del teorema es el siguiente: *"la suma de los cuadrados de los catetos ($a^2 + b^2$) es igual al cuadrado de la hipotenusa (c^2)"*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Para finalizar, el profesor o la profesora, realizará las siguientes preguntas, las que permitirán observar el logro de los aprendizajes esperados por parte de los y las estudiantes.

- ✓ ¿Cómo ocupamos el teorema de Pitágoras en el problema trabajado?
- ✓ ¿Qué más conocemos acerca del Teorema de Pitágoras?

FIGURAS EN EL PLANO CARTESIANO

CLASE 3

FASE 4 Y 5: El o la estudiante extraerá información desde el plano cartesiano a partir de un problema dirigido a la determinación de áreas y perímetros.

Objetivo: Aplicar diversos procedimientos para obtener el área de polígonos representados en el plano cartesiano.

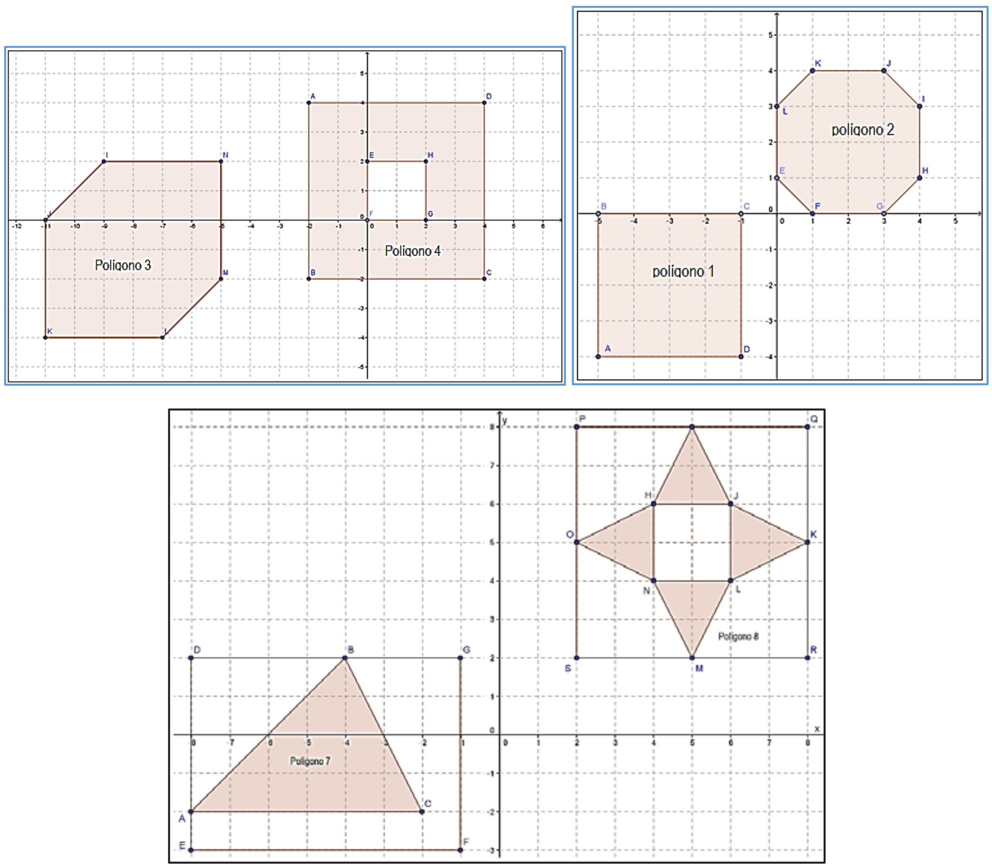
Inicio de la clase

Se realizan preguntas al grupo curso, dirigidas a pesquisar el conocimiento de los y las estudiantes sobre los conceptos de área y de perímetro de figuras planas acotadas. Estas preguntas deberán estar dirigidas a las figuras planas elementales: el triángulo y los paralelogramos en general.

A continuación se procederá al planteamiento del siguiente problema, en que los y las estudiantes trabajarán en grupos de no más de tres.

Problema 3

Teniendo los siguientes pares de polígonos que aparecen representados (región sombreada) en el plano coordenado (o cartesiano), ¿tienen sus áreas la misma medida?



<u>Desarrollo de la clase</u>

El profesor o la profesora, mediante su observación, en los puestos de trabajo por la sala de clase y el uso de diálogos con cada grupo de trabajo, con el objetivo de "apoyar" las vías de solución seleccionadas, ya sea aclarando dudas o precisando conceptos que les permitan avanzar en la solución del problema y una vez que algunos de los grupos hayan logrado resolver dicho problema, realizará las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué parejas de polígonos tienen la misma medida de su área? ¿Cuál es esa medida?
- ✓ ¿Cómo lograron obtener la medida de cada área?
- ✓ ¿Cómo obtuvieron esos resultados? ¿Es el único procedimiento?

Cierre de la clase

El profesor o la profesora, formalizará los conceptos y resultados obtenidos en la solución del problema planteada e irá registrando en la pizarra las estrategias utilizadas por los y las estudiantes para obtener la medida del área de cada uno de los polígonos propuestos.

Al registrar las estrategias utilizadas por los y las estudiantes para obtener la medida de estas áreas, se logra que éstos observen, que no existe una única vía de solución de un problema, es decir, siempre es posible encontrar diferentes vías de solución de un mismo problema. Siendo así, es posible que algunos grupos apliquen fórmulas conocidas para hallar la medida del área de un polígono, otros quizás deduzcan esas fórmulas o, simplemente encuentren una vía de solución a partir de la observación y la identificación de la geometría de la figura plana en estudio, e incluso, habrá quien lo haga contando los *cuadritos*, dividiendo la medida de su área a la mitad y sumando las medidas de las áreas, etc., algo así como “quitar” y “poner”.

La formalización que realizará el profesor o la profesora, será la siguiente:

Al ubicar coordenadas en el plano cartesiano, podremos determinar uno o varios puntos, que nos permitirán identificar, desde un punto o un segmento, hasta un polígono.

Resuelto lo anterior, en el caso de la representación de polígono (tres o más puntos), estaremos en condiciones de calcular la medida del área de dicho polígono, En muchas ocasiones, para determinar la medida del área de un polígono, no es necesario conocer la “fórmula” que nos permite calcularla, sino que basta que podamos descomponer dicho polígono en otros más pequeños de los cuáles sabemos cómo calcular su área, utilizando así el menor número de fórmulas posible, para calcular la medida del área de dicho polígono.

Una fórmula, sin embargo, que es muy necesaria conocer, es la fórmula para el cálculo de la medida del área de un triángulo, a saber:

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot a}{2}$$

donde b es la medida de la longitud de un lado del triángulo y a la medida la longitud de la altura correspondiente al lado b.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">UNIDAD TEMÁTICA: GEOMETRÍA</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">SUBUNIDAD 2: VECTORES</td></tr>
<tr><td colspan="2"> NIVEL 2 OBJETIVO: Extraer propiedades de los vectores a partir de la observación en el plano cartesiano. </td></tr>
<tr><td>Indicadores de Logros del nivel</td><td> Define el concepto de vector. Representa un vector en el plano. Inferir las características de un vector a partir de su representación. Determina las componentes de un vector dado en el Sistema Rectangular de Coordenadas Cartesianas.
Multiplica un vector por un escalar en el plano cartesiano. Describe las características obtenidas (módulo, dirección y sentido) de multiplicar un vector por un escalar. Obtiene el vector resultante mediante la forma del paralelogramo y triangular en el Sistema Rectangular de Coordenadas Cartesianas. </td></tr>
<tr><td>Objetivos de Clases</td><td> Clase 4: Reconocer los elementos que caracterizan un vector. Clase 5: Representar un vector en el plano cartesiano a partir componentes y representar el vector que resulta de un vector por un escalar. Clase 6: Representar en el plano cartesiano la adición de vectores. Clase 7: Representación la sustracción de vectores en el plano cartesiano. </td></tr>
</table>

VECTORES

CLASE 4

APLICACIÓN DE LA FASE 1: La clase consiste en que el o la estudiante conozca las características principales de un vector y su representación en el plano cartesiano, además aplica el teorema de Pitágoras para obtener la distancia entre dos puntos. Para ello, los enfoques de trabajo serán individual y grupal.

Objetivo: Reconocer los elementos que caracterizan un vector.

<u>Inicio de la clase</u>

En esta instancia de la clase se verificará si el o la estudiante conoce la diferencia entre dirección y sentido. El profesor o profesora, propone una actividad inicial para luego realizar preguntas acerca de la diferencia entre sentido y dirección; de esta manera, el profesor o profesora, indagará acerca de lo que conocen sus estudiantes.

La actividad mencionada es la siguiente:

Problema 4

Una persona recorre la distancia que separa su casa de la casa de su madre, situada a 50 metros de distancia una de la otra, en la misma cuadra. ¿Cómo describiría usted la dirección del recorrido?, ¿es suficiente conocer la dirección del recorrido, para determinar si esta persona se dirige hacia su casa o hacia la casa de su madre?

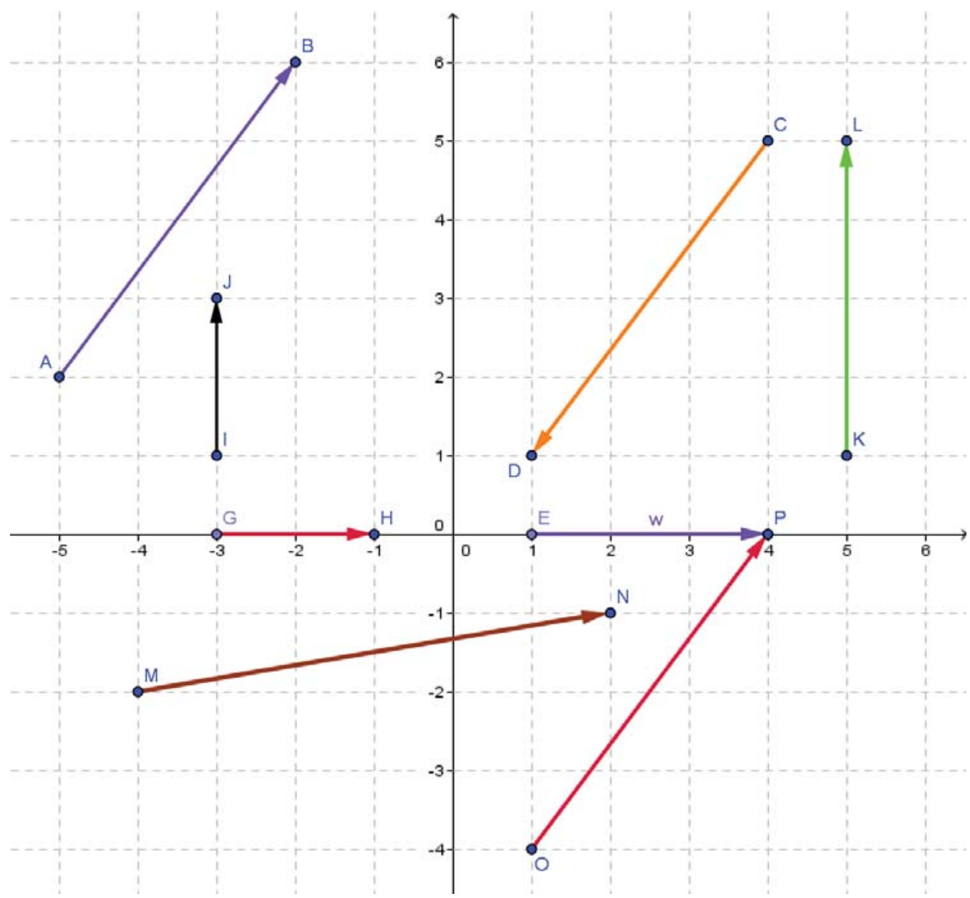
El objetivo es que los y las estudiantes discutan las respuestas y de esa forma diferencien los términos sentido y dirección para ser trabajados después en representación de vectores a través de un problema. Luego, el profesor o la profesora, formaliza la situación anterior.

Un vector es un segmento dirigido que se caracteriza por tener longitud (módulo), dirección y sentido, y en su representación se suele usar letras del alfabeto como por ejemplo $\vec{a}$.

Desarrollo de la clase

Actividad 1

¿Cuál de los siguientes vectores tienen la misma característica? ¿Por qué?

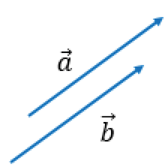


El profesor o profesora, utilizará las siguientes preguntas con el propósito de deducir las características de cada vector. El desarrollo del problema debe ser discutido por los equipos de trabajo.

- ✓ ¿Qué vectores conservan características iguales? ¿Por qué?
- ✓ ¿Qué diferencia hay entre el vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?
- ✓ ¿Qué vectores tienen la misma longitud? ¿Por qué?
- ✓ ¿Cuál es la longitud del vector $\overrightarrow{OP}$?

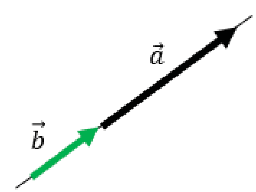
Los y las estudiantes comprenderán que algunos vectores son idénticamente iguales, otros tienen solo un mismo sentido, otros tienen la misma longitud. A partir de lo anterior, el profesor o la profesora, formaliza la situación de las respuestas de la actividad 1.

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se dicen equipolentes si tienen la misma longitud, dirección y sentido. Ejemplo:



Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son opuestos si tienen la misma longitud y dirección, pero sentido opuesto. Ejemplo:

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales si tienen la misma dirección, pudiendo tener o no igual magnitud y/o sentido. Ejemplo:



El primer acercamiento de los y las estudiantes a las características es el módulo (longitud) de un vector y posteriormente el sentido del vector. El siguiente concepto es la dirección del vector y para lograr que los y las estudiantes comprendan el concepto de la dirección de un vector se relaciona con el ángulo que forma el vector con el semieje positivo de las abscisas. Luego, el profesor o la profesora, promoverá una discusión a partir de las siguientes preguntas para conectar con el problema anterior.

- ✓ Se dice que un vector tiene longitud, sentido y dirección. ¿Cómo sabemos que los vectores del problema anterior tienen dirección? Entonces, ¿qué es la dirección de un vector?
- ✓ ¿Cómo describirías dos vectores que tengan igual sentido y longitud pero distinta dirección?
- ✓ ¿Cómo describirías dos vectores que tengan igual dirección y sentido pero distinta magnitud?

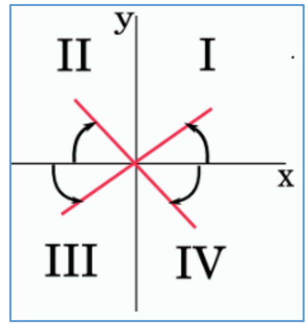


Figura 2 Dirección de un vector.

Teniendo presente las respuestas de los y las estudiantes, se plantea la siguiente formalización:

La dirección de un vector está dada por la medida del ángulo que forma con el semi-eje positivo de las abscisas, como se observa en la Figura 2.

El sentido está indicado por la punta de la flecha que denota al vector, aunque cuando el vector no está explícita y gráficamente determinado, existen otras referencias para indicar su sentido: "de norte a sur", "de este a oeste", "según su representante equipolente principal (con origen en el origen del sistema)".

La longitud (o módulo) de un vector $\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)$ está dada por la distancia entre el punto inicial P y el punto final Q.

La longitud (o módulo) de un vector $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})$está dada por la distancia entre el punto inicial P y el punto final Q. En símbolos la longitud o módulo de $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ (se denota $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$), que tiene componentes (x, y) donde $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{(\mathrm{x}^2 + y^2)}$.

Cierre de la clase- metacognición

Finalmente el profesor o la profesora, propone las siguientes preguntas para el cierre de la clase.

- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre trayectoria y distancia?

- ✓ ¿Cómo se determina la longitud de un vector?
- ✓ ¿Cuáles son las características de un vector?
- ✓ ¿Qué vectores representan igual sentido?
- ✓ Si situamos el vector, con origen en el sistema de coordenadas, y extremo final en el punto Z (6, 8), ¿qué dirección y longitud tiene?
- ✓ Describe otros dos vectores, indicando sus componentes, que tenga la misma longitud, sentido y dirección.

VECTORES

CLASE 5

APLICACIÓN DE LA FASE 2: El profesor o la profesora, dirige las actividades propuestas con el objetivo de representar un vector en el plano a través de sus componentes. Por otro lado, se estudian las características (la longitud, la dirección y el sentido) que adquiere un vector cuando es multiplicado por un número real.

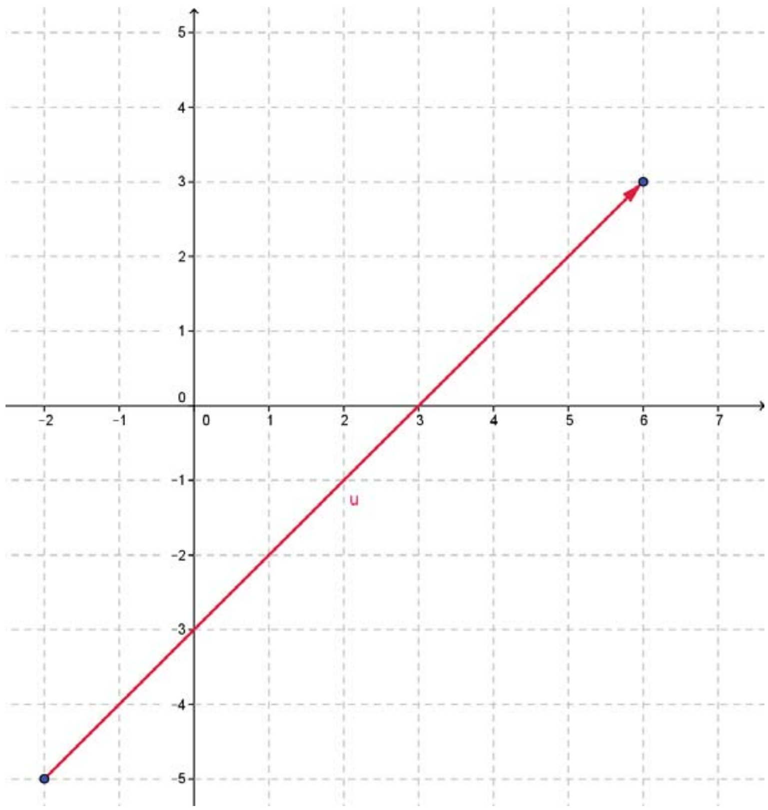
Objetivo: Representar un vector en el plano cartesiano a partir componentes y representar el vector que resulta de un vector por un escalar.

Inicio de la clase

El profesor o la profesora, realiza un breve resumen sobre las características de un vector para después comenzar con una actividad que tiene por objetivo definir las componentes de un vector junto con la multiplicación de un vector por un escalar. La actividad propuesta es trabajada en forma individual.

Actividad 2

Dado el siguiente vector $\vec{u}$ en el plano. Responde las siguientes preguntas.



- ✓ **Considere un vector $\vec{z}$ que tenga misma dirección y sentido que el vector $\vec{u}$. ¿Cuál es la longitud de cada vector $\vec{z}$?**
- ✓ **¿Qué características tienen en común los vectores $\vec{z}$ y el vector $\vec{u}$?**

La clase se dictará en dos partes, primero en la construcción de las componentes de un vector y después sobre la multiplicación de un vector por un escalar. Es decir, a partir del planteamiento del problema se abordarán dos actividades, derivados de él.

Desarrollo de la clase

El profesor o la profesora, realiza la primera actividad para sus estudiantes, luego, para formalizar los aprendizajes tratados.

Actividad 2.1: componentes de un vector

- ✓ ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial y del punto final del vector $\vec{\boldsymbol{u}}$? ¿Cuál es la magnitud y dirección del vector $\vec{\boldsymbol{u}}$?
- ✓ Si la coordenada inicial del vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ fuese (0, 0) encuentre la coordenada final mediante vector equipolente al vector $\vec{u}$, llamándolo $\vec{u}'$. Argumente la estrategia para encontrar el punto final de $\vec{u}'$ y verifique la congruencia entre $\vec{u}$ y $\vec{u}'$.

Formalización a partir de la actividad anterior.

Dado un vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ que tiene como punto inicial $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ y como punto final $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, sus componentes estarán dadas por:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2) - (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) = (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1) = (\mathrm{u}_1, u_2)$$

Al vector $\vec{a} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$, que tiene su origen en el origen del sistema de coordenadas y su punto final en $(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$, recibe el nombre de vector equipolente principal, respecto del vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

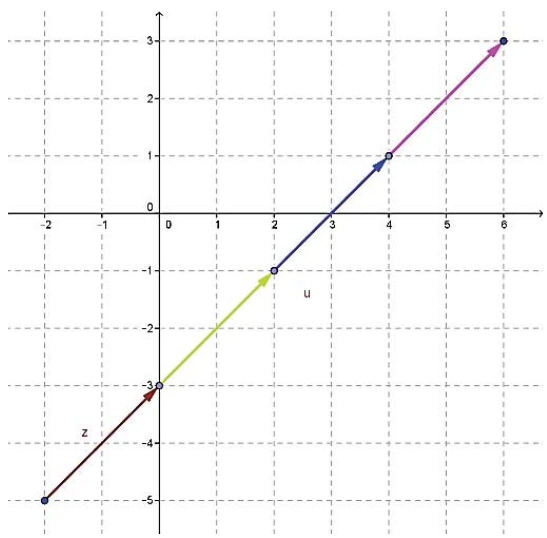
Posteriormente, el profesor o la profesora, realiza la conexión entre la *actividad 2.1* y la formalización: las componentes del vector $\vec{u}$ quedan representadas mediante el vector $\vec{\boldsymbol{u}}' = (\mathbf{8}, \mathbf{8})$.

El profesor o la profesora, realiza la siguiente pregunta para dirigir la atención del y la estudiante hacia la multiplicación de un vector por un escalar, que es la actividad 2.2: ¿cómo representamos el vector $\vec{x} = (-1,\ 5)$ en el plano cartesiano?

Actividad 2.2: multiplicación de un vector por un escalar

- ✓ Indique dos vectores que pueden representar al vector $\vec{u}$. Proponga un ejemplo.
- ✓ ¿Atendiendo a qué características seleccionó usted ese vector?
- ✓ ¿Cómo podemos representar una multiplicación de un vector por un número, gráfica y simbólicamente?

El profesor o la profesora, presenta una tabla que permite reforzar cómo obtener las componentes de un vector. Cada estudiante deberá completar la siguiente tabla a partir la actividad que se ha realizado.



El profesor o la profesora, establece que el vector $\vec{z}$, por ejemplo, tiene su equipolente principal $(2, 2)$ por lo tanto el o la estudiante debe indicar el punto final y el punto inicial de $\vec{z}$ y de otros tres vectores, equipolentes de él.

Cuadro de vectores

Punto final	Punto inicial	Vector
(0, -3)	(-2, -5)	(2, 2)
(2, -1)	(0, -3)	(2, 2)
(4, 1)	(2, -1)	(2, 2)
(6, 3)	(4, 1)	(2, 2)

Las siguientes preguntas guías permiten interpretar la información de la tabla generada.

- ✓ ¿Cuántos vectores $\vec{z}$ se superponen sobre el vector $\vec{u}$?
- ✓ Simbólicamente, ¿cómo podemos representar los vectores $\vec{u}$ que usted ha seleccionado a partir de $\vec{z}$?
- ✓ Si $\vec{a} = (-2, 3)$, representa en el plano $3\vec{a}$. ¿Cuáles son las coordenadas del vector que se genera?
- ✓ ¿Qué cambios se producen cuando tenemos, por ejemplo, un vector $\overrightarrow{CD}$ cuyas coordenadas son C(2, -2) y D(-1, 1) y se multiplica por un número negativo? ¿Cómo podemos representar esta situación en el plano cartesiano?

Formalización

Para multiplicar un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ por un escalar k, se obtiene el producto $k \cdot \vec{u}$, es decir:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

<u>Cierre de la clase- metacognición</u>

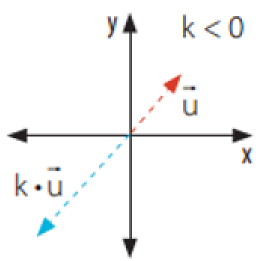
Luego de estas preguntas, el profesor o la profesora, formalizará la situación desarrollada junto con un desafío.

- ✓ ¿Qué elementos debemos conocer para obtener las componentes de un vector?
- ✓ ¿Qué características cambian si multiplicamos un vector por un escalar negativo? ¿Cómo se representa en el plano? ¿y si multiplicamos por un decimal que varía entre 0 y 1? ¿y si se multiplica por cero? ¿qué efectos tiene sobre las componentes del vector?
- ✓ ¿Qué características tendría un vector que resulta de multiplicar otro vector por una fracción? Y si la multiplicación de un vector se realiza por un escalar que es una fracción negativa ¿cómo se representa en el plano?

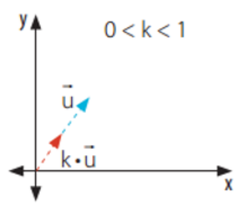
Luego de la interpretación de las respuestas anteriores se propone el siguiente resumen.

Al representar el vector resultante en el plano cartesiano y siendo k un número real, se tiene que:

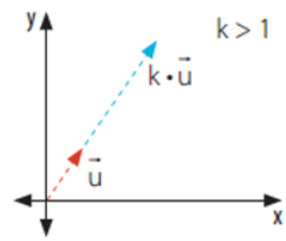
Dado $k < 0$, el vector resultante de $\boldsymbol{k} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ tendrá sentido contrario.



Dado $0 < k < 1$ entonces $\boldsymbol{k} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ tendrá igual dirección y sentido que $\vec{u}$ pero con una magnitud menor a este vector.



Dado $k > 1$ entonces $\boldsymbol{k} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ tendrá igual dirección y sentido que $\vec{u}$ pero con una magnitud mayor al vector $\vec{u}$.



Finalmente, el profesor o la profesora, valida las respuestas de los estudiantes retomando las actividades y problemas planteados durante la clase.

VECTORES

CLASE 6

APLICACIÓN DE LA FASE 3: Los y las estudiantes resuelven un problema que consiste en encontrar una estrategia para sumar vectores y cómo se representa esta suma en el plano.

Objetivo: Representar en el plano cartesiano la adición de vectores.

Inicio de la clase

En la clase anterior, los y las estudiantes conocieron las características de un vector así como sus componentes y su representación en el plano. El profesor o la profesora, realiza un breve resumen en conjunto con el grupo curso, y para ello confecciona un listado de los conceptos trabajados.

A continuación, el profesor o la profesora, propone el siguiente problema cuyo objetivo es que el o la estudiante realice una representación en el plano cartesiano sobre suma de vectores.

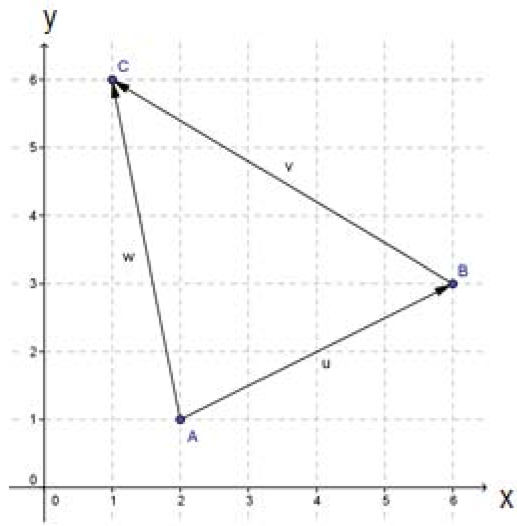
Este, problema puede ser analizado en grupos de no más de tres estudiantes.

Problema 5

Dos personas salen del mismo lugar ubicado en el punto A(2, 1), siempre caminando en línea recta para encontrarse nuevamente en otro sitio ubicado en $C(1,6)$. Una de ellas va directamente hasta el punto de encuentro y la otra decide realizar una parada en un tercer sitio ubicado en B(6, 3).

Representa en un Sistema de Coordenadas Cartesianas Rectangulares, los vectores que indican ambos recorridos.

Los y las estudiantes deben llegar a la siguiente representación.



Desarrollo de la clase

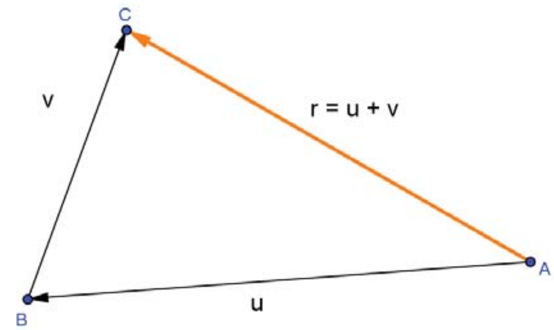
El profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas enfocadas en obtener la suma de las componentes de vectores.

- ✓ ¿Cuáles son las componentes de los vectores representados en el plano?
- ✓ ¿Cómo se explica que el vector que representa el movimiento definitivo, desde la posición inicial hasta la posición final, en ambos casos sea el mismo?
- ✓ ¿Cómo se representa la suma de vectores en el plano?

El profesor o la profesora, formaliza el estudio realizado a través del siguiente resumen:

Del estudio anterior, se concluye un método para sumar vectores desde el punto de vista gráfico, conocido como el método del paralelogramo. A continuación se representa este método, así como el desarrollo algebraico correspondiente, que se realiza en las componentes de los vectores que se suman.

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, entonces $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1;\ u_2 + v_2) = \vec{r}$, siendo $\vec{r}$ es el vector resultante.



Cierre de la clase

Para el cierre de la clase se propone la siguiente actividad que puede ser resulta con el grupo curso.

Actividad 3

Indique dos vectores, cuya suma esté representada por vector $\vec{c} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1})$ en el plano cartesiano.

- ✓ ¿Es la única solución?
- ✓ ¿Cuáles son las componentes del vector resultante al sumar los vectores $\vec{a} = (0, -4)$ y $\vec{b} = (-6, 3)$?
- ✓ ¿La representación geométrica de la suma de dos vectores es siempre mediante los lados de un triángulo?

VECTORES

CLASE 7

APLICACIÓN DE LAS FASES 4 y 5: El o la estudiante resta vectores conociendo a lo menos el vector resultante y uno de los vectores sumandos y se visualiza bajo la mirada de las estrategias utilizadas para resolver problemas. La forma de trabajo es individual, en ocasiones, según lo indique el profesor o la profesora, de forma grupal.

Objetivo: Representar la sustracción de vectores en el plano cartesiano.

Inicio de la clase

A través de un método de intervención conjunta, mediante preguntas dirigidas por parte del profesor o la profesora, expone un resumen sobre suma de vectores estudiado en la clase anterior. Luego, realiza las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué ejemplos pueden dar sobre la representación de una suma de vectores en el plano cartesiano?
- ✓ Conocemos en una suma de vectores, el término de vector resultante, ¿Qué nombre reciben los vectores que se suman?
- ✓ ¿Qué vector resulta al sumar los vectores $\vec{a} = (-2, 5)$ y $\vec{b} = (0, 1)$?

El profesor o la profesora, plantea encontrar una solución a un problema que se enfoca a realizar una resta de vectores en el plano cartesiano. El problema en primera instancia será realizado en forma individual para observar si el o la estudiante representa mediante sus componentes dos vectores iguales en longitud y dirección pero en sentido opuestos. El problema es el siguiente.

Problema 6

¿Cuáles son las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tal que al sumar resulte $\vec{z} = (0, 0)$?

Luego el profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas al grupo curso.

- ✓ ¿Puede usted seleccionar dos vectores que representen la situación anterior? ¿Es la única solución?
- ✓ ¿Qué características tiene cada una de esas soluciones?
- ✓ ¿Por qué podemos garantizar que de esos vectores obtenemos al sumarlos un vector resultante de componentes (0, 0)?
- ✓ ¿Qué operación permite representar la solución del problema?

Desarrollo de la clase

El profesor o la profesora, propondrá el siguiente problema:

Problema 7

¿Cuáles son las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tal que al restar resulte $\vec{z} = (0, 0)$?

Los y las estudiantes generalizan la respuesta anterior observando las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ante las respuestas entregadas en la última pregunta, el profesor o la profesora, formaliza la situación.

De lo anterior, se tiene que:

Dado, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (-u_1, -u_2)$ entonces la suma de los vectores entrega $\vec{z} = (0{,}0)$, es decir:

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(u_1 + (-u_1); u_2 + (-\, u_2)\right) = (0{,}0)$$

O bien, siendo, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (u_1, u_2)$ entonces la resta de los vectores entrega $\vec{z} = (0{,}0)$, es decir:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - u_1; u_2 - u_2) = (0{,}0)$$

Por lo tanto, si tenemos dos vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, la diferencia entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es posible hacerlo a partir de sus componentes, obteniendo como vector resultante $\vec{r}$, realizando lo siguiente:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2) = \vec{r}$$

Luego, se retoma el enunciado del problema tomando como ejemplo un vector $\vec{u} = (4, 5)$ y $\vec{v} = (4, 5)$, que al aplicar una resta, las componentes del nuevo vector resultan $\vec{z} = (0{,}0)$.

El siguiente problema consiste en deducir el vector que se origina en la operación de resta entre el vector resultante y un vector dado.

Problema 8

Se presentan tres vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ en el plano donde uno de ellos es conocido $\vec{c} = (1, 2)$. Por otro lado, se entrega el vector resultante $\vec{r} = (4, -2)$ a partir de operaciones realizadas entre los vectores dados. ¿Cuáles pudieran ser las componentes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para obtener el vector resultante $\vec{r}$?

El primer acercamiento de los y las estudiantes con el problema es realizar una resta de vectores, entre el vector resultante y el vector libre. Luego, deberán deducir dos vectores que sumados representen el resultado de la operación anterior.

En caso de que existan grupos de trabajo que no lleguen a una solución, el profesor o la profesora, puede recurrir a las siguientes preguntas para orientar a la solución del problema.

- ✓ ¿Qué información conocemos del problema?
- ✓ ¿Qué significa el vector resultante?
- ✓ ¿Cómo representamos el vector $\vec{r}$ en el plano?
- ✓ ¿Qué pasos necesitamos hacer para obtener la solución de una resta o diferencia de vectores?
- ✓ ¿Qué operación tendemos a ocupar cuando necesitamos conocer el otro sumando en una suma?
- ✓ ¿Cómo representamos el vector anterior en el plano cartesiano?

<u>Cierre de la clase</u>

El profesor o la profesora, promueve las siguientes preguntas para integrar todo lo aprendido en las clases de representación de vectores en el plano cartesiano. Estas preguntas deben ser registradas y resueltas en el cuaderno.

- ✓ ¿Qué ocurre con los vectores sumandos si el vector resultante aumenta de longitud?
- ✓ ¿Qué ocurre con los vectores sumandos si el vector resultante es multiplicado por el escalar que es igual a -2?
- ✓ ¿Qué longitud tiene el vector resultante del problema anterior? ¿Qué longitud tiene cada vector? ¿Cómo se interpreta en el plano cartesiano?
- ✓ ¿Qué significa representar en el plano una resta de vectores?

<table>
<tr><td colspan="2">UNIDAD TEMÁTICA: GEOMETRÍA</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUBUNIDAD 3: TRASLACIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO</td></tr>
<tr><td colspan="2">NIVEL 2

OBJETIVO: Establecer procedimientos que impliquen realizar traslaciones de figuras planas en el plano.</td></tr>
<tr><td>Indicadores de Logros del nivel</td><td>Obtiene la figura original a partir de la figura trasladada

Realiza composición de traslaciones

Define el concepto de traslación en el plano

Determina el vector de traslación usando el plano.

Traslada un punto del plano mediante un vector en el plano

Traslada un figura plana dado un vector.

Traslada figuras mediante un vector y un escalar en el plano.</td></tr>
<tr><td>Objetivos de Clases</td><td>Clase 8: Reconocer los elementos presentes en un movimiento de traslación de figuras en el plano cartesiano.

Clase 9: Establecer un procedimiento que permita encontrar la figura original a partir de la información de su imagen por la aplicación de una traslación del correspondiente vector de traslación.

Clase 10: Establecer las características fundamentales de la composición de traslaciones en el plano cartesiano.</td></tr>
</table>

TRASLACIÓN DE FIGURAS EN EL PLANO CARTESIANO

CLASE 8

APLICACIÓN DE LA FASE 1: El o la profesora, mediante actividades y problemas, conocerá los elementos que asocian los y las estudiantes al trasladar una figura.

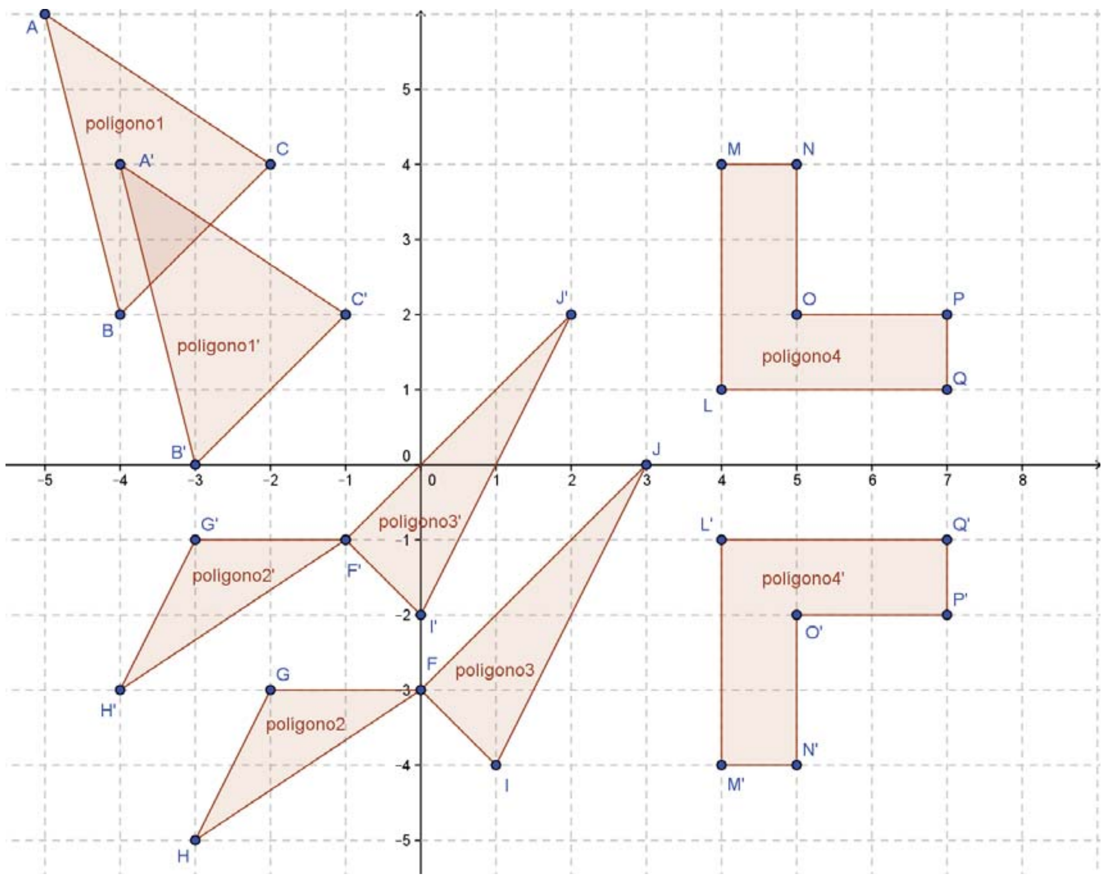
Objetivo: Reconocer los elementos presentes en un movimiento de traslación de figuras en el plano cartesiano.

Inicio de la clase

El siguiente problema consiste en que los y las estudiantes reconozcan el vector de traslación aplicado en cada polígono. Se presenta el siguiente problema, el que puede ser desarrollado en forma individual o grupal (no más de tres personas), y luego mediante preguntas dirigidas al grupo curso deducir cómo aplicar una traslación a un punto dado un vector.

Problema 9

Según la siguiente situación, representada en el plano cartesiano. ¿Cuál es la suma de los vectores de traslación aplicados en las isometrías correspondientes?



Los y las estudiantes deducen que al polígono 4 se aplicó una reflexión, por lo tanto descartan encontrar el vector de traslación pues no lo hay, por ejemplo, el vector que traslada el punto L al punto L', este vector "no" traslada el punto M al punto M', luego estas dos figuras nunca se podrán obtener, una de la otra, por medio de una traslación.

Desarrollo de la clase

Una vez terminado el desarrollo de la respuesta de los y las estudiantes, el profesor o profesora, realiza las siguientes preguntas al grupo curso. Cada respuesta que entregue un estudiante, o grupo de estudiantes, debe ser cuestionada y posteriormente aprobada por el resto del curso, para luego registrarla en la pizarra.

- ✓ ¿Qué vector de traslación $\vec{u}$ se aplicó al polígono 1 para obtener el polígono 1'? ¿Cuáles son sus componentes? (registrar en la pizarra el nombre del vector y sus componentes)
- ✓ ¿Qué vector de traslación $\vec{v}$ fue aplicado al polígono 2 para obtener el polígono 2'? ¿Cuáles son sus componentes?
- ✓ ¿Qué similitudes y diferencias tienen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$? (la pregunta se refiere a comparar sentido, longitud y dirección de ambos vectores)
- ✓ ¿Cuál es el vector suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$? ¿Cómo obtuvo este resultado?
- ✓ ¿Cómo se obtiene la imagen G' del punto G, al aplicar el vector de traslación $\vec{v}$? En el caso de la imagen J' de J, ¿ocurre lo mismo?
- ✓ ¿Cómo se obtiene la imagen C' de C?

Luego de corroborar las respuestas de los y las estudiantes a través de estas preguntas, el profesor o profesora plantea la siguiente actividad, que refuerza la aplicación del concepto de traslación de un punto.

Actividad 4

¿Cuáles son las nuevas coordenadas del polígono que tiene por vértices $\boldsymbol{A(2,-3)}$, $\boldsymbol{B(-4,5)}$, $\boldsymbol{C(-2,-1)}$ y $\boldsymbol{D(-8,3)}$ si se aplica el vector de traslación $\vec{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{(2,3)}$?

El profesor o profesora, observa el progreso de sus estudiantes, realizando un análisis del logro de los aprendizajes esperados. Para ello, solicita, a sus estudiantes, completar la información que no aparece en la tabla, y que se propone en el siguiente párrafo. La información obtenida servirá para concluir sobre cómo se realiza la identificación de las componentes del vector de traslación, y cómo se aplica éste sobre las coordenadas de una figura plana.

Actividad 5

Coordenadas de la figura	Vector de traslación	Coordenadas de la imagen
$\boldsymbol{M(0,-7)}$	$\vec{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{-4,-1})$	
	$\vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{0,-5})$	$\boldsymbol{N'(2,-1)}$
$\boldsymbol{O(-2,2)}$		$\boldsymbol{O'(6,-3)}$

Cierre de la clase

Una vez completada la información de la tabla anterior, los y las estudiantes representan los elementos allí indicados, utilizando el plano cartesiano. Finalmente, el profesor formaliza los conceptos y procedimientos de trabajo aplicados.

La traslación es una transformación isométrica que corresponde al movimiento de una figura según un vector, es decir, una dirección, según una distancia (módulo o longitud) y con un sentido. El vector asociado a este movimiento es denominado "vector de traslación". Por ejemplo, si $P = (x, y)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$, entonces para trasladar el punto P(x, y) en el plano cartesiano según el vector $\vec{u}$ tiene:

$$T_{\vec{u}}(x, y) = (x + u_1, y + u_2)$$

TRASLACIÓN DE FIGURAS EN EL PLANO CARTESIANO

CLASE 9

APLICACIÓN DE LA FASE 2 y 3: El y la estudiante encontrará el vector de traslación utilizado para obtener una figura que ha sido trasladada. Para lograr este objetivo el profesor o la profesora, propondrá un problema en el que se representará mediante una figura plana, indicando que ella es la imagen de otra figura, y que debe ser determinada según un cierto vector en el plano.

Objetivo: Establecer un procedimiento que permita encontrar la figura original a partir de la información de su imagen por la aplicación de una traslación del correspondiente vector de traslación.

Inicio de la clase

El profesor o la profesora, retomando algunos aspectos estudiados en la clase anterior, planteará preguntas al grupo curso para observar si los estudiantes visualizan y describen el concepto de vector de traslación, para así, generar una discusión sobre cómo conocer un punto que ha sido trasladado. Las preguntas son las siguientes.

- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre un vector y un vector de traslación?
- ✓ ¿Cómo afecta los componentes del vector de traslación a las coordenadas de un punto?
- ✓ ¿Cómo conocer las coordenadas de una figura si sólo conocemos la imagen de ésta por una traslación y el vector de traslación?

Desarrollo de la clase

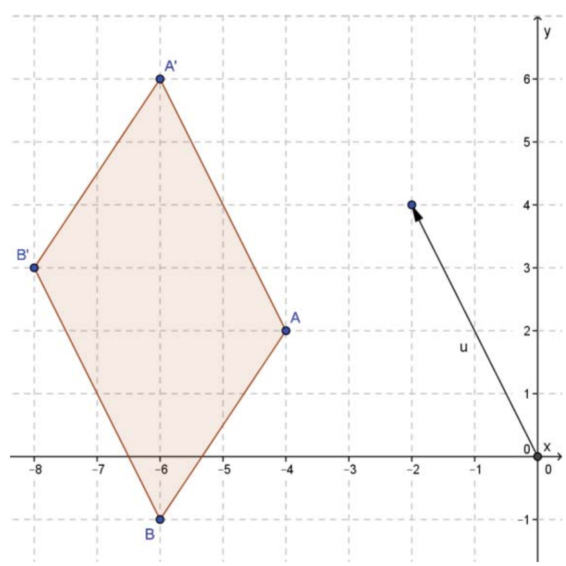
El profesor o la profesora, propone el siguiente problema a sus estudiantes. Este problema puede ser trabajado por no más de tres estudiantes, donde el profesor o la profesora, observará la estrategia que utilizan para obtener una respuesta que satisfaga al problema.

Problema 10

Se sabe que los puntos $A'(-6;\ 6)$ y $B'(-8;3)$ son las imágenes respectivas de la traslación de los puntos A y B, respectivamente, generados por el vector de traslación $\vec{u} = (-2,4)$. Halle el área del paralelogramo $ABA'B'$.

El profesor o profesora, retoma la pregunta propuesta en el problema para conocer qué estrategias estarían ocupando los grupos de trabajo. Luego, confecciona una tabla en la pizarra que permita ordenar la información.

Los y las estudiantes deben llegar a la siguiente representación para completar la tabla.



El profesor o la profesora, junto con obtener los datos para completar la tabla, realizará preguntas al grupo-curso, para complementar las estrategias de solución utilizadas por los equipos de trabajo. Por otro lado, el profesor o la profesora, podrá solicitar que dos o tres grupos muestren cómo llegaron a la solución del problema, para obtener el punto A y B.

- ✓ ¿Qué hicieron para encontrar las coordenadas del lado original, o antes de ser trasladado?
- ✓ ¿Qué operación aritmética permitiría encontrar las coordenadas lado del romboide (antes de ser trasladado)?

Coordenada de la imagen	**Componentes del Vector de traslación**	**Coordenadas de la figura original**	**Procedimiento**

Cierre de la clase- metacognición

En esta etapa, el profesor o la profesora, formalizará el aprendizaje generado por los y las estudiantes a partir del problema realizando preguntas que conecten con conceptos que fueron tratados en otras sesiones, por ejemplo:

- ✓ ¿Cómo encontraron el área del romboide?
- ✓ ¿Crees que la estrategia utilizada serviría para encontrar el área de un romboide de unidades distintas?
- ✓ ¿Qué sucedió en el vector de traslación cuando necesitaron encontrar el lado que fue trasladado del romboide?
- ✓ ¿Qué expresión permitiría encontrar una coordenada conocida solo su imagen y el vector?
- ✓ ¿Podemos establecer una expresión para encontrar el vector de traslación si solo conocemos la coordenada de un punto y su imagen?

TRASLACIÓN DE FIGURAS EN EL PLANO CARTESIANO

CLASE 10

APLICACIÓN DE LA FASE 4 y 5: El y la estudiante deducirá las características elementales de la composición de traslaciones al realizar sucesivas traslaciones de un punto en el plano cartesiano. Para ello, el profesor o la profesora, planteará actividades que visualicen el concepto de composición, como tal.

Objetivo: Establecer las características fundamentales de la composición de traslaciones en el plano cartesiano.

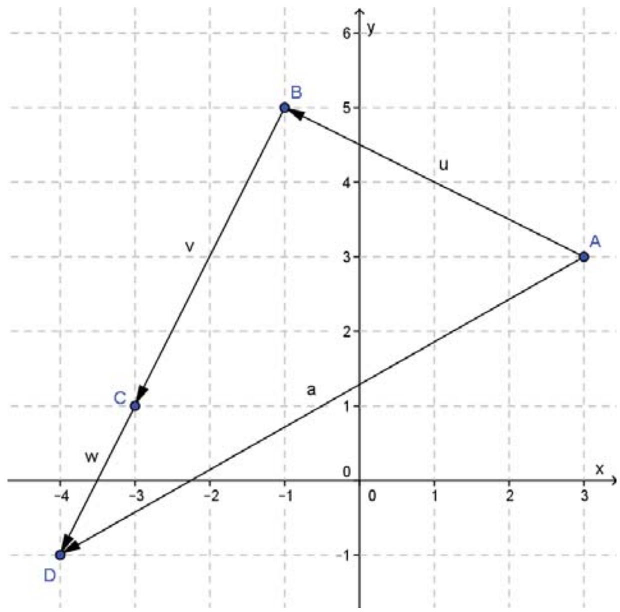
Inicio de clase

La clase inicia con un problema que puede ser resuelto en grupos de no más de tres estudiantes.

Problema 11

Al aplicar una traslación al punto A(3;3) se obtiene el punto B(-1;5) y aplicando una nueva traslación a éste, se obtiene el punto C(-3;1). Por último, se aplicó una traslación al punto C, obteniéndose el punto D(-4;-1). ¿Qué vector traslación transforma el punto B en el punto D?, ¿qué vector traslación transformaría el punto A en el punto C?

Los y las estudiantes deben llegar a la siguiente representación.



Desarrollo de la clase

En esta ocasión el profesor o la profesora, realizará las siguientes preguntas para dirigir la elaboración del concepto de composición de traslaciones en el plano cartesiano.

- ✓ ¿Qué vector de traslación traslada directamente el punto A al punto D?
- ✓ ¿Qué transformación geométrica permite trasladar el punto B al punto D?
- ✓ ¿Cuáles son las componentes de los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$?
- ✓ ¿Qué relación hay entre el vector $\vec{a} = (-7, -4)$ y el resto los vectores $(\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w})$?
- ✓ ¿Qué transformación geométrica resulta al aplicar sucesivas traslaciones de un punto del plano?

El profesor o la profesora, puede proponer actividades que refuercen la operatoria de vectores.

Cierre de la clase- metacognición

El profesor o la profesora, formaliza los aprendizajes anteriores a través de la siguiente propuesta.

La composición de transformaciones isométricas es la aplicación sucesiva de transformaciones isométricas sobre un punto o sobre los puntos de una figura, es decir, al resultado de la primera transformación se le aplica una segunda y así sucesivamente.

Al componer dos o más traslaciones $T_{\vec{v}}\ o\ T_{\vec{u}}\ (A)$ es equivalente a la traslación $T_{\vec{v}+\vec{u}}$(A).

UNIDAD TEMÁTICA: GEOMETRÍA	
SUBUNIDAD 4: REFLEXIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO	
NIVEL 2 **OBJETIVO: Establecer procedimientos que permitan facilitar el ejercicio de realizar reflexiones según un eje de simetría en figuras planas en el plano cartesiano.**	
Indicadores de Logros del nivel	Identifica la recta como eje de simetría en el plano. Identifica las coordenadas de una figura reflejada. Compara las coordenadas de la figura original y la figura reflejada a partir de los ejes de simetría. Refleja una figura con centro en una coordenada. Compara las coordenadas de la figura original y la figura reflejada con centro en una coordenada.
Objetivos de Clases	**Clase 11:** Representar los elementos que se presentan al aplicar una reflexión en el plano cartesiano. **Clase 12:** Comparar las imágenes de las coordenadas de una figura al aplicarse una reflexión axial (respecto al eje de las ordenadas y respecto al eje de las abscisas). **Clase 13:** Comprender las propiedades, del movimiento geométrico, al aplicar una simetría central. **Clase 14:** Analizar la aplicación de sucesivas reflexiones realizadas en el plano respecto a una recta.

REFLEXIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

CLASE 11

APLICACIÓN DE LA FASE 1: El profesor o la profesora, a través de un problema inicial hará que el estudiante reconozca información sobre reflexión de figuras planas; lo ideal es que el estudiante se enfrente sólo a la actividad sin la intervención del compañero, de esta manera el profesor o la profesora, observará la base de información que maneja sus estudiantes.

Objetivo: Representar los elementos que se presentan al aplicar una reflexión en el plano cartesiano.

Inicio de la clase

El profesor o la profesora, realiza un breve resumen sobre el contenido trabajado en la clase anterior. La idea es que los estudiantes recuerden que las transformaciones isométricas mantienen la forma y conserva las medidas. Para ello, cada uno de los(as) estudiantes realiza la siguiente actividad, que implica efectuar una reflexión a la figura, luego de identificar el eje de simetría. Este problema requiere del uso de instrumentos de medición como compás, transportador y regla, para confeccionar un pentágono regular.

Problema 12

Un pentágono regular, ¿es simétrico respecto a la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto?

El profesor o la profesora, realizará las siguientes preguntas para conocer si la actividad ha sido entendida, recordando los conceptos de punto medio y pentágono regular. Las preguntas son.

- ✓ ¿A qué figura geométrica nos estamos refiriendo cuando decimos pentágono regular? ¿Cuál es la amplitud de cada ángulo interior de un pentágono?
- ✓ ¿Cómo se determina el punto medio de uno cualquiera de los lados de un pentágono?
- ✓ ¿Cuál es la medida o amplitud de ángulo entre la intersección del eje de simetría y el punto medio?

Desarrollo de la clase

Teniendo presente que los estudiantes han resuelto la actividad con éxito, se realiza un análisis de la información, para promover las características principales sobre simetría. El profesor o la profesora, plantea las siguientes preguntas al grupo curso, para generar una discusión entre los estudiantes.

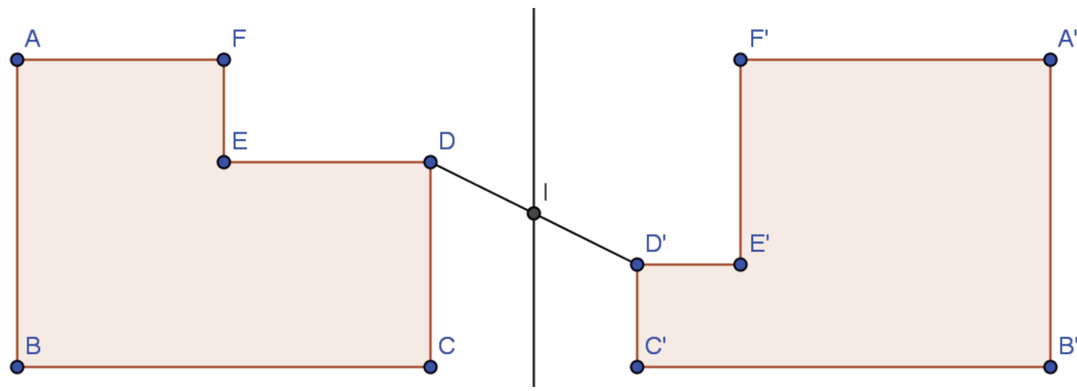
- ✓ ¿Se puede formar un pentágono irregular simétrico?
- ✓ ¿Qué información sería suficiente conocer, para determinar que un hexágono regular tiene al menos un eje de simetría?
- ✓ Entonces, ¿qué características deben tener tanto la figura, como su simétrica, para que se visualice una reflexión?
- ✓ ¿Sólo basta con que las distancias entre un punto y su simétrico respecto al eje de simetría, sean iguales?

A partir de las respuestas anteriores, los estudiantes y las estudiantes podrían considerar que las figuras son simétricas puesto que existe igual área y perímetro, así también, que la distancia entre los puntos que se oponen respecto al eje de simetría es la misma.

En esta etapa, el profesor o la profesora, debe generar una simple discusión, a partir de un problema, para poder afirmar que los estudiantes han comprendido las características que están presentes al aplicar una reflexión de una figura.

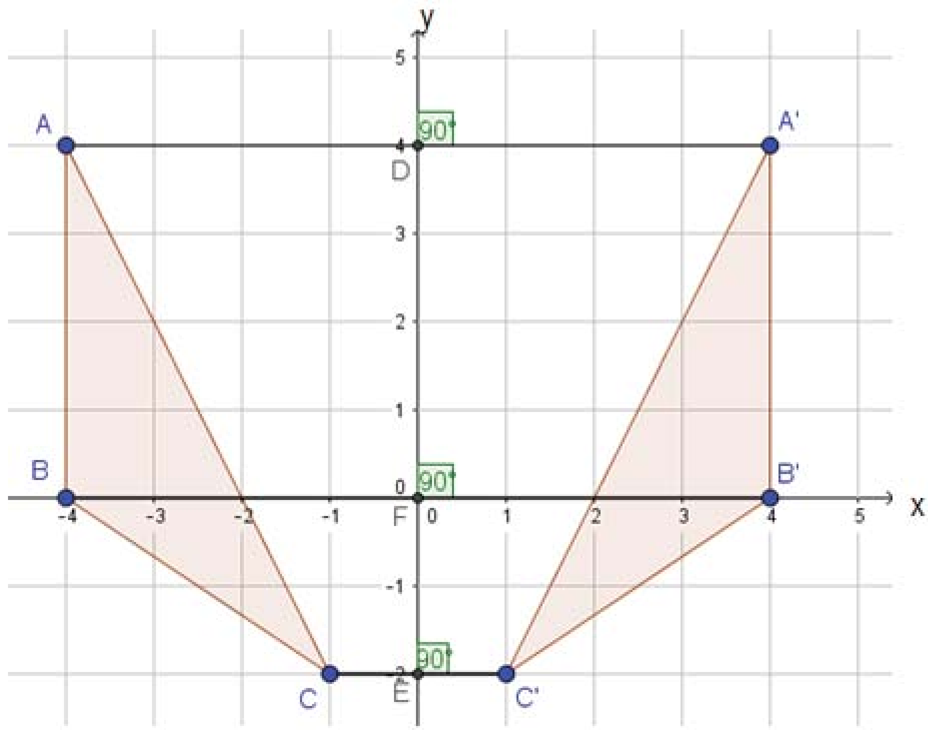
Problema 13

Iván dice que las figuras representadas son simétricas puesto que tienen la misma área y el mismo perímetro, al menos tres pares de puntos que se oponen $(A, B\ y\ C\ con\ A', B'\ y\ C')$ se encuentran a la misma distancia del eje de simetría y los extremos del segmento $\overline{DD'}$, con punto medio en I, comparten la misma longitud al eje de simetría, puesto que $\overline{DI} = \overline{ID'}$. ¿Está en lo correcto? Argumenta.



<u>Cierre de la clase</u>

Con el problema anterior, los estudiantes deducen que el punto y su simétrico con respecto al eje de simetría, determinan una recta, que es perpendicular al eje de simetría. A partir de esto, el profesor o la profesora, formaliza las situaciones anteriores, teniendo como modelo la siguiente figura.



Formalización de los aprendizajes construidos en la actividad anterior.

Las reflexiones preservan ángulos y distancias.
Dos figuras son simétricas si y solo sí un punto y su imagen se encuentran a la misma distancia del eje de simetría y la recta que los contiene forma un ángulo de 90° con el eje de simetría. A partir de la representación anterior:
D es punto medio de $\overline{AA'}$, entonces A' es simétrico de A.
F es punto medio de $\overline{BB'}$, entonces B' es simétrico de B.
E es punto medio de $\overline{CC'}$, entonces C' es simétrico de B.

REFLEXIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

CLASE 12

APLICACIÓN DE LA FASE 2: Los estudiantes y las estudiantes, trabajando en grupos, organizarán su información para dar solución a un primer problema. La tarea del profesor o la profesora, es dirigir al estudiante, mediante preguntas que orienten hacia la comparación de las coordenadas al aplicar una reflexión en el plano cartesiano.

Objetivo: Comparar las imágenes de las coordenadas de una figura al aplicarse una reflexión axial (respecto al eje de las ordenadas y respecto al eje de las abscisas)

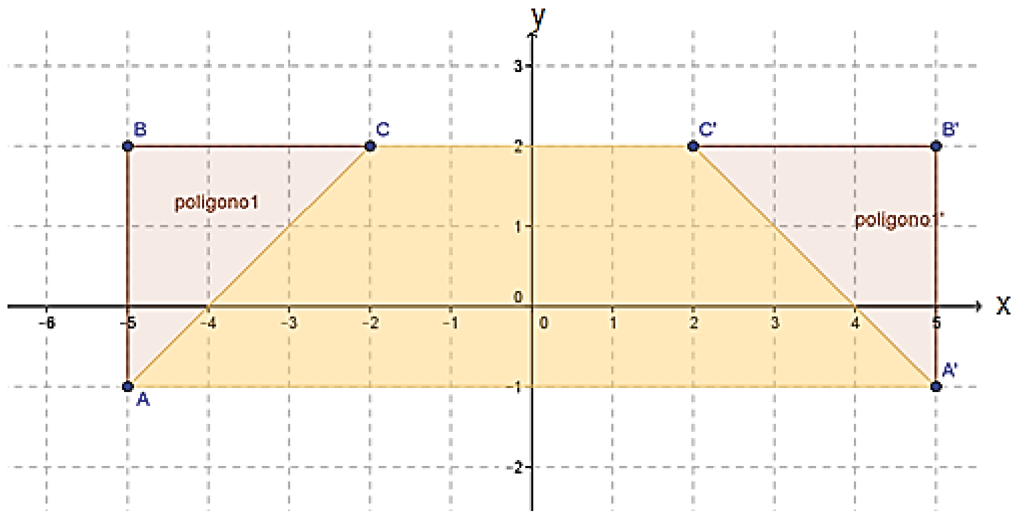
Inicio de la clase

El profesor o la profesora, presenta el siguiente problema, cuyo objetivo es visualizar el signo de las coordenadas una vez que se aplica una reflexión ya sea respecto al eje de las abscisas como al eje de las ordenadas. El problema puede ser trabajado en grupos de no más de tres personas y consiste en reflejar una figura para luego obtener el área de la zona exterior.

Problema 14

Se tiene un triángulo rectángulo en B, de vértices $A(-5,-1)$, $B(-5,2)$ y $C(-2,2)$, se aplica una reflexión respecto al eje de las ordenas. ¿Cuál es la medida del área del cuadrilátero $AA'CC'$?

Los estudiantes deben llegar a la siguiente representación.



Mientras los estudiantes elaboran su respuesta, el profesor o la profesora, plantea las siguientes preguntas para reconocer si los grupos de trabajo han comprendido los conceptos del estudio sobre reflexión.

- ✓ ¿Cómo realizamos una reflexión en un plano? ¿Qué elementos están presentes en él?
- ✓ ¿Qué características deben tener un punto y su simétrico, al aplicar una reflexión?
- ✓ ¿Cuál sería la imagen del punto $D(-3,-5)$ si se aplica una reflexión respecto al eje Y? ¿y cuál sería si se aplica respecto al eje X?

Desarrollo de la clase

El profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas que dirigen la atención hacia el signo de las coordenadas, cuando se aplica una reflexión respecto al eje X como el eje Y, para después realizar una comparación entre estas coordenadas.

- ✓ ¿Cómo determinaron los puntos $A', B'\ y\ C'$?
- ✓ ¿Existe alguna similitud entre las coordenadas de los vértices del ΔABC y las coordenada de sus simétricos?

- ✓ En cuanto a los signos de las imágenes de la reflexión respecto al eje Y ¿es lo mismo que aplicar una reflexión respecto al eje X? ¿En qué cambian?
- ✓ Realiza una reflexión del ΔABC respecto al eje X y luego obtén el área de la figura que se obtiene al intersectar el triángulo dado con su imagen.

Cierre de la clase

El profesor o la profesora, solicita a los estudiantes, que apliquen una reflexión al triángulo ABC, representado en la actividad anterior, respecto al eje de las abscisas.

Posteriormente, con el grupo curso realizan la siguiente actividad. Esta actividad permite visualizar, mediante un recuadro, la comparación entre los signos, al aplicar una reflexión respecto a cada eje del plano cartesiano. El profesor o la profesora, propone al estudiante trabajar en forma individual, para completar la siguiente tabla.

Actividad 6

Completa la siguiente tabla con la información que falta. Usa el plano cartesiano si lo necesitas.

Punto Original	Reflexión respecto al eje de las ordenadas	Reflexión respecto al eje de las abscisas
A(-2, 5)		
	B’(0, -3)	
		C’’(-1, -3)
D(-6, 0)		

El profesor o la profesora, formaliza las situaciones anteriores.

Aplicar una simetría respecto al eje de las ordenadas al eje de la abscisas nos referimos a la simetría axial. Esta simetría está determinada por la distancia que hay desde cada uno de los puntos originales al eje respectivo.

Reflejar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano respecto de un eje coordenado te permite establecer las siguientes expresiones:

- Si la reflexión o simetría axial de un punto (x, y) **es respecto del eje** X, puede ser definida como una función:

$$\boldsymbol{R_x(x, y)} = (x, \boldsymbol{-y})$$

Ejemplo: reflejar el punto A(2, -3) con respecto al eje X es A'(2, 3).

- Si la reflexión o simetría axial de un punto (x, y) **es respecto del eje Y,** puede ser definida como una función:

$$\boldsymbol{R_y(x, y)} = (\boldsymbol{-x}, y)$$

Ejemplo: reflejar el punto A(2, -3) con respecto al eje Y es A'(-2, -3)

Dado cualquier punto A(x, y) del plano, su simétrico con respecto al eje X cambia digno de la ordenada del punto original, mientras que su simétrico con respecto al aje Y cambia el signo de la abscisa de dicho punto.

El profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas para observar el aprendizaje de los estudiantes.

- ✓ ¿Qué elementos están presentes al aplicar una reflexión sobre una figura?
- ✓ ¿Podemos realizar una reflexión respecto a un segmento?
- ✓ ¿Podemos realizar una reflexión respecto a una recta?
- ✓ Entonces, ¿qué es un eje de simetría?
- ✓ ¿Cómo conocemos cuando se aplica una reflexión respecto al eje de las ordenadas o eje de las abscisas?

REFLEXIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

CLASE 13

APLICACIÓN DE LA FASE 3: El profesor o la profesora, proveerá a los estudiantes y las estudiantes, actividades que impliquen argumentar a través del uso del vocabulario técnico.

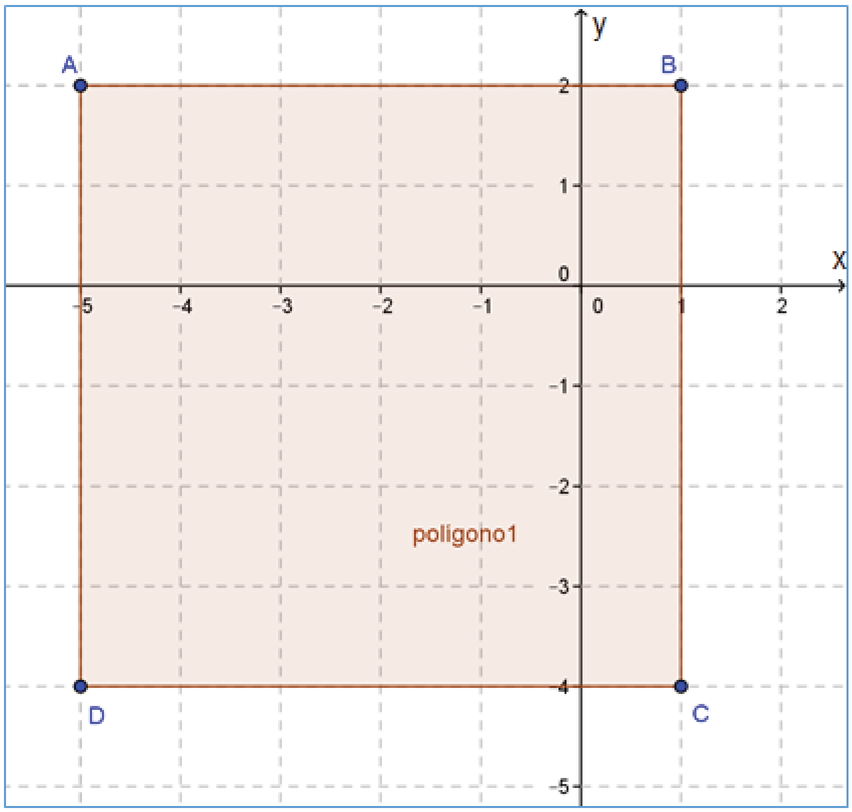
Objetivo: Comprender las propiedades, del movimiento geométrico, al aplicar una simetría central.

Inicio de la clase

El profesor o la profesora, propone una actividad inicial, cuyo objetivo es determinar cómo cambian los signos de las coordenadas de un punto cuando se aplica una simetría central respecto al origen. La actividad es desarrollada en forma individual o grupal.

Actividad 7

A partir del cuadrado $ABCD$ representado.

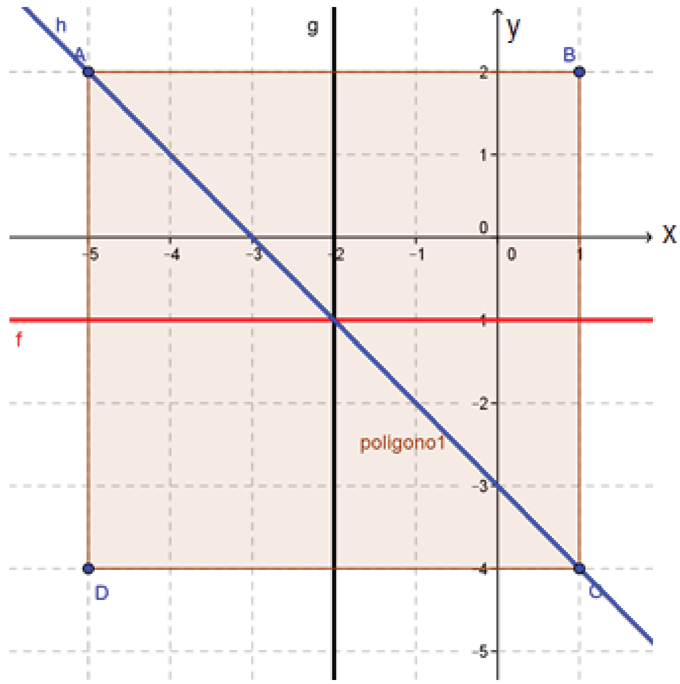


Responda la siguiente pregunta.

- ✓ **¿Qué vértices podrían hacerse simétricos al vértice B? En los casos afirmativos, represente los ejes de simetría correspondientes.**

El profesor o la profesora, supervisará el desarrollo de la actividad y se encargará de generar la discusión entre los estudiantes. Esta discusión debe estar avalada utilizando un lenguaje técnico en el desarrollo de la respuesta, es decir, el profesor o la profesora debe asegurar, que usen los conceptos ya establecidos, tales como: “eje de simetría” y “simetría axial”.

A continuación se presenta la figura a la que debe llegar cada estudiante.



Una vez comprobado que los y las estudiantes han logrado obtener la figura anterior, el profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas, para luego dirigir la atención a la simetría central.

- ✓ ¿Cuál es el punto donde se intersecan las diagonales del cuadrado ABCD? Llámelo M.
- ✓ ¿Puede ser M, el punto de intersección de los ejes de simetría encontrados, un centro de simetría?

<u>Desarrollo de la clase</u>

El profesor o la profesora, presentará la siguiente actividad, que consiste en obtener el punto simétrico de un punto dado, respecto de un tercer punto.

Actividad 8

Se tiene un punto en $E(3,4)$ y otro en punto $O(0,0)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico de E, respecto al punto O? Llame al punto encontrado A'.

Ahora el profesor o la profesora, debe centrar la atención de los estudiantes acerca de la reflexión que se aplica al vértice E para obtener E'; para ello, se realiza las siguientes preguntas:

- ✓ Describa el procedimiento que utilizó para obtener el punto E'. ¿Encuentras alguna similitud entre las coordenadas de E y de E'?
- ✓ ¿Qué características sobre reflexión se encuentran en la actividad 8?
- ✓ ¿Existe alguna similitud entre las coordenadas del punto A y las de E'?
- ✓ ¿Qué podría usted decir, si en la actividad 8 se propone obtener la imagen del punto A, por una simetría respecto de cualquier otro punto del plano?
- ✓ ¿Cuál es el simétrico del punto $B(-1,5)$ respecto del punto $O(0,0)$?

El profesor o la profesora, formaliza las respuestas emanadas de las preguntas anteriores.

Aplicar una reflexión es obtener la imagen por una simetría respecto a una recta del plano, por lo que una reflexión, también recibe el nombre de simetría axial (respecto a un eje). Mientras que, cuando se halla la imagen por una simetría respecto a un punto, recibe el nombre de simetría central, la que se identifica con un caso particular de rotación (cuando el ángulo de rotación es de 180°).

El profesor o profesora, debe proveer al o la estudiante diferentes puntos en el plano, así como el punto de origen $O(0,0)$, para que observe la posición de cada uno de estos puntos y de sus respectivos simétricos respecto al origen, así como los cambios de signos que ocurren en las coordenadas del punto y de su simétrico respecto del origen.

El profesor o la profesora, propone a los estudiantes encontrar el simétrico respecto al origen, de un polígono para que los y las estudiantes comparen dos situaciones de simetría, respecto a una reflexión y respecto a una simetría central. El profesor o la profesora, por su parte, verificará el aprendizaje logrado de sus estudiantes. Esta actividad puede ser resuelta en grupos de no más de tres estudiantes.

Actividad 9

Aplica una simetría central al polígono de vértices $\boldsymbol{A(-5,4)}$, $\boldsymbol{B(-2,4)}$ y $\boldsymbol{C(-3,2)}$, respecto al origen $\boldsymbol{O(0,0)}$.

Aplica una simetría central al polígono de vértices $\boldsymbol{A(-5,4)}$, $\boldsymbol{B(-2,4)}$ y $\boldsymbol{C(-3,2)}$, respecto al punto $Z(5,4)$.

Formalización de la actividad anterior.

Al efectuar una simetría central respecto al origen (0,0), la abscisa y la ordenada de cada uno de los vértices cambian de signo. Por lo tanto, todo punto $A(x,y)$ del plano tiene un simétrico $A'(-x,-y)$ con respecto al origen $O(0,0)$

<u>Cierre de la clase- metacognición</u>

El profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas, a partir de la *actividad 9,* para observar y corroborar los aprendizajes logrados por sus estudiantes, en cuanto al movimiento geométrico denominado "simetría central" en el plano cartesiano. Para ello, el profesor o profesora, realiza la siguiente formalización.

Se conoce con el nombre de "simetría central" al movimiento geométrico que transforma una figura plana en otra simétrica a ella, respecto a un determinado punto del plano. Si A es un punto del plano y A' su imagen por una simetría central respecto al punto O (centro de la simetría), entonces:

- ✓ El punto centro de simetría O, A y A' son colineales, siendo O el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

Finalmente, el profesor o profesora, observa que los estudiantes sean capaces de responder a las siguientes preguntas.

- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre aplicar una reflexión, versus aplicar una simetría central?
- ✓ ¿Qué movimientos geométricos isométricos se reconocen en las clases?
- ✓ ¿Qué propiedades presenta la simetría respecto a un punto (simetría central)?
- ✓ ¿Qué propiedades presenta la simetría respecto a una recta (reflexión)?

REFLEXIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

CLASE 14

APLICACIÓN DE LA FASE 4 Y 5:

La tarea del profesor o la profesora en esta fase es entregar al estudiante o la estudiante un problema que pueda ser resuelto en varias formas, considerando que el estudiante o la estudiante, se ha apropiado de las características de la fase anterior (lenguaje técnico), para establecer un nuevo saber.

Objetivo: Analizar la aplicación de sucesivas reflexiones realizadas en el plano respecto a una recta.

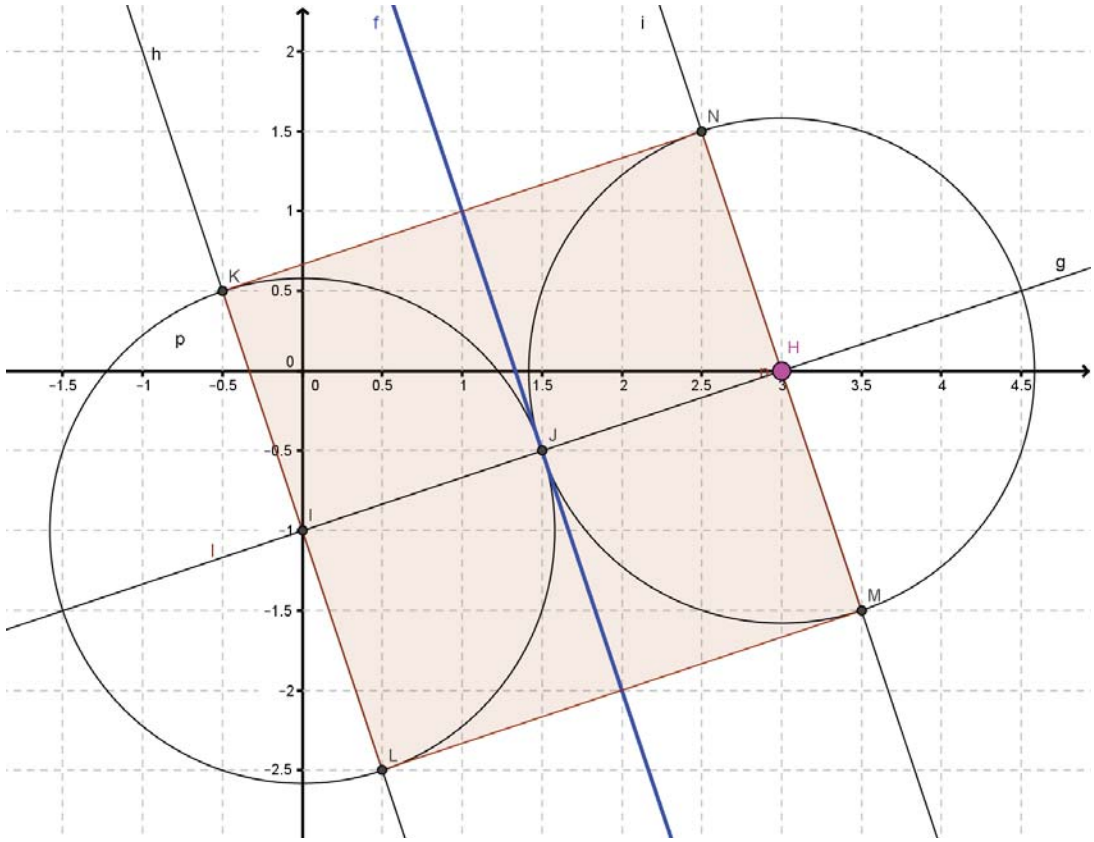
Inicio de la clase

El profesor o la profesora, plantea a los estudiantes el siguiente problema, que tiene por objetivo encontrar una figura simétrica. El desarrollo se puede realizar, utilizando la herramienta software GEOGEBRA, para ello dependerá del profesor o la profesora sobre la disposición de una sala equipada con computadores suficientes para sus estudiantes. También, puede ser resuelta en forma manual, utilizando las herramientas: compás, transportador y regla.

Problema 15

Determine las coordenadas de los vértices de un cuadrado, tal que uno de sus ejes de simetría tiene como ecuación $6x + 2y = 8$, y uno de los puntos medios de los lados del cuadrado tiene coordenadas $(3, 0)$.

Una de las soluciones gráficas es la siguiente:



Desarrollo de la clase

El profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas a los estudiantes.

- ✓ ¿Cómo desarrollaron el problema?
- ✓ ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del cuadrado?
- ✓ Visualizando la figura anterior, ¿qué transformaciones isométricas son necesarias aplicar al punto L para obtener N?

Bajo las respuestas generadas en la última pregunta, el profesor o la profesora, las registra en la pizarra, o las orienta para describirlas. Por ejemplo.

1) Simetría central respecto al punto J.
2) Reflexión respecto a la recta f y luego a la recta g.
3) Reflexión respecto a la recta g y luego a la recta f.

4) Simetría respecto al punto medio de $\overline{LJ}$ y luego una simetría respecto al punto medio $\overline{JN}$.

Luego, el profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas las que deben ser tratadas en grupos de no más de tres estudiantes.

- ✓ ¿Qué reflexión tipo está presente en 1)?
- ✓ ¿Cuántas reflexiones se presentan en cada uno de los puntos 1), 2), 3) y 4)?
- ✓ ¿Cuál es el movimiento isométrico que resulta en la reflexión 2)? y en 3)?

Una vez que los estudiantes hayan respondido a las preguntas anteriores, se les solicita que generen un cuadro resumen, que permita comprender aplicación de sucesivas reflexiones en un punto del plano cartesiano. El profesor o la profesora, tiene como modelo la siguiente tabla.

N°	**Transformación isométrica**		**Transformación Isométrica**		**Transformación Isométrica**
1)	Simetría central				Simetría central
2)	Reflexión (simetría axial) Recta f	+	Reflexión (simetría axial) Recta g, $f \perp g$	=	**Simetría** central respecto al punto de intersección entre las rectas perpendiculares.
3)	Reflexión (simetría axial) Recta g	+	Reflexión (simetría axial) Recta f, $g \perp f$	=	**Simetría** central respecto al punto de intersección entre las rectas perpendiculares.
4)	Simetría (central) respecto a un punto	+	Simetría (central) respecto a un punto	=	**Traslación** del punto.

Cierre de la clase

Realizada la tabla anterior, el profesor o la profesora, procede a formalizar las situaciones anteriores.

Una composición de reflexiones $R_1\ o\ R_2$ es una aplicación de reflexiones una tras otra, sobre una figura del plano.

- ✓ La composición de dos reflexiones a una figura respecto a ejes ortogonales entre sí, equivale a una simetría con respecto al punto de intersección de dichos ejes. Por lo tanto, sea P un punto en el plano y $L_1 \perp L_2$, con A(x, y) punto de intersección entre L_1 y L_2, entonces

$$R_{L_1}(P)\ o\ R_{L_2}(P) = R_{A(x,y)}(P)$$

- ✓ La composición de dos simetrías centrales aplicadas a una figura, respecto a dos puntos distintos del plano, equivale a aplicar una traslación a la figura original.

$$R_{(x_1,y_1)}\ o\ R_{(x_2,y_2)} = T$$

<table>
<tr><td colspan="2">UNIDAD TEMÁTICA: GEOMETRÍA</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUBUNIDAD 5: ROTACIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO</td></tr>
<tr><td colspan="2">NIVEL 2

OBJETIVO: Establecer procedimientos que permitan facilitar el ejercicio de realizar rotaciones en diferentes ángulos de figuras planas en el plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td>Indicadores de Logros del nivel</td><td>Define el concepto de rotación.

Rota figuras en el plano en 45°, 60°, 90°, 360° 270° y 180°.

Establece diferencias de coordenadas para distintos ángulos.

Identifica el ángulo de rotación aplicado a una figura en el plano a partir de las coordenadas obtenidas.</td></tr>
<tr><td>Objetivos de Clases</td><td>Clase 15: Inferir las características que se presenta al realizar una rotación en el plano.

Clase 16: Aplicar en el plano cartesiano la rotación de figuras planas a partir de diferentes ángulos.

Clase 17: Analizar la aplicación sucesivas rotaciones para representar la composición de rotaciones.

Clase 18: Analizar la aplicación sucesivas rotaciones aplicadas dado un punto y un ángulo de rotación.</td></tr>
</table>

ROTACIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

CLASE 15

APLICACIÓN DE LA FASE 1: El profesor o la profesora, plantea un problema inicial que consiste en reconocer los elementos de una reflexión y de una rotación. Para el desarrollo de la clase, se debe procurar que sus estudiantes posean los instrumentos básicos de medición como transportador, compás y regla o bien utilizar una sala de computación que tengan instalado el software GEOGEBRA.

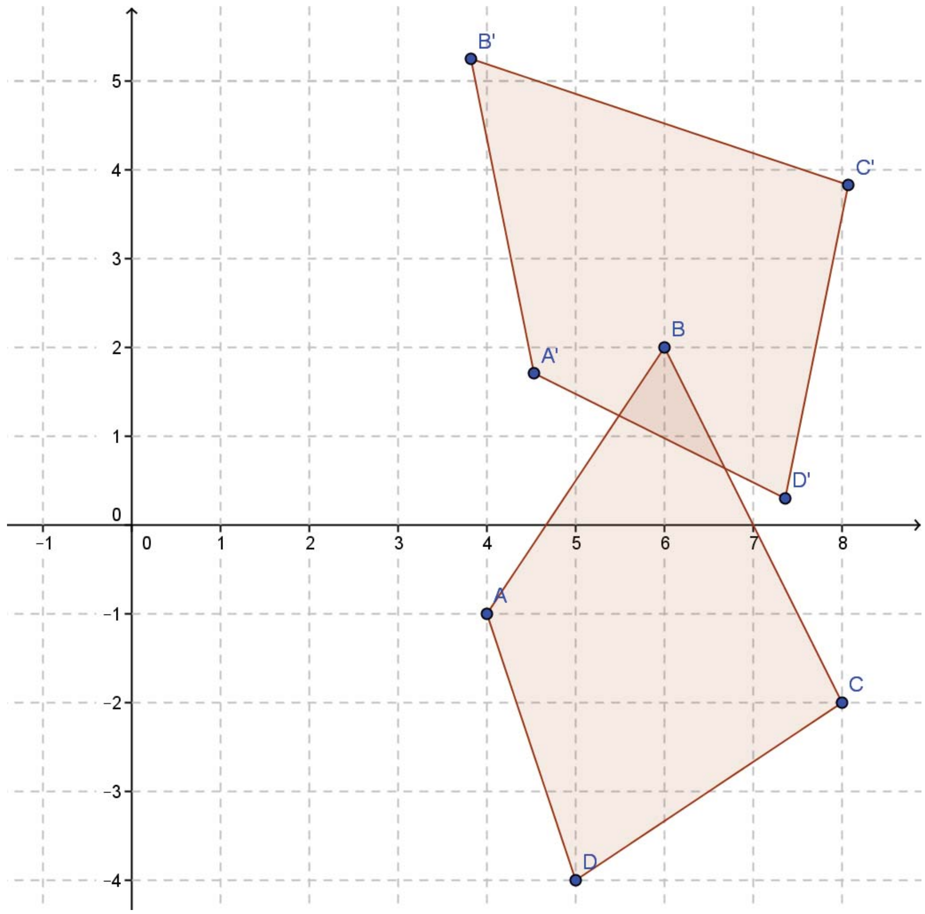
Objetivo: Inferir las características que se presenta al realizar una rotación en el plano.

Inicio de la clase

El problema siguiente puede ser desarrollado en grupos de no más de tres estudiantes. Luego, el profesor o la profesora, generará una discusión en el grupo curso, para observar el lenguaje técnico que utilizan los y las estudiantes, y los aprendizajes que se han logrado en las clases anteriores.

Problema 16

Mateo dice que al cuadrilátero ABCD se aplicó una reflexión, obteniéndose el cuadrilátero $A'B'C'D'$. ¿Es verdad? Argumenta.



Una vez que los y las estudiantes, interactúen con el problema, se discuten las siguientes preguntas en los grupos, las que se analizarán después como grupo curso.

- ✓ ¿Realmente se realizó una reflexión como lo indica Mateo? ¿Por qué?
- ✓ ¿Qué elementos se tienen en cuenta para identificar una reflexión?
- ✓ ¿El cuadrilátero $A'B'C'D'$ es resultado de aplicar una traslación al cuadrilátero $ABCD$? ¿Por qué? Entonces, ¿cuáles son los elementos que se requieren para aplicar una traslación?

- ✓ Finalmente, ¿Cree usted que existe un movimiento isométrico que se haya aplicado al cuadrilátero $ABCD$ para obtener $A'B'C'D'$?

Desarrollo de la clase

Los y las estudiantes identifican que al cuadrilátero $ABCD$ se le ha aplicado una rotación y reconocen que al aplicar una rotación es necesario conocer el ángulo, centro de rotación y punto a rotar. El profesor registra las características de una rotación en la pizarra y realiza la siguiente pregunta, apoyado en la representación anterior:

Problema 17

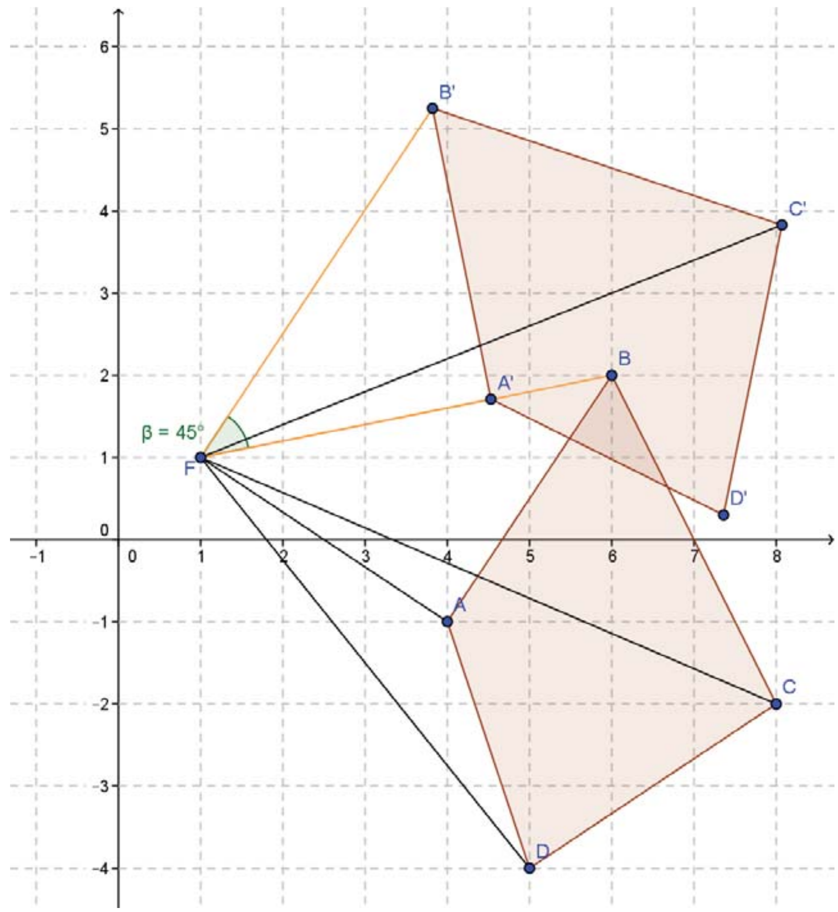
Si al cuadrilátero ABCD del *problema 15* se le aplicó una rotación entonces, hallar el centro y ángulo de rotación.

Mientras los grupos de estudiantes se enfocan en la estrategia de solución al problema, el profesor o la profesora, irá observando si los y las estudiantes son capaces de elaborar su desarrollo utilizando un lenguaje adecuado para confeccionar su respuesta. El profesor o la profesora, puede promover estas respuestas mediante las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cómo se define un ángulo? ¿Cómo se construye un ángulo?
- ✓ La rotación del cuadrilátero ABCD, ¿se realiza en sentido positivo o negativo? ¿Por qué?
- ✓ ¿Cuál sería el centro de rotación apropiado para la aplicación sobre el cuadrilátero ABCD? ¿Por qué?
- ✓ ¿Los ángulos de rotación, aplicados a cada vértice del cuadrilátero ABCD, deben ser distintos?

Luego, una vez observados los grupos de trabajo, el profesor o la profesora, reúne toda la información recopilada de sus estudiantes, así como su estrategia de solución (ángulo y centro de rotación encontrados), y los registra en la pizarra.

A continuación se entrega la solución representando el centro y ángulo de rotación aplicado al cuadrilátero $ABCD$.



Cada grupo de trabajo entrega su respuesta al grupo curso y en conjunto descartan las aquellas soluciones que no sean correctas. La respuesta a la que deben llegar es: *el centro de rotación es el punto $F(1, 1)$ y el ángulo de rotación es $45°$ en sentido positivo.*

Al término de esta actividad el profesor o la profesora, ayuda a resumir el análisis realizado en la actividad anterior.

- ✓ La distancia entre el centro de rotación y el punto debe ser igual a la distancia entre el centro de rotación y la imagen del punto.
- ✓ El ángulo de rotación es el mismo para cada uno de los vértices a rotar.

Cierre de la clase- metacognición

El profesor o la profesora, pregunta al grupo curso.

- ✓ ¿Qué herramienta geométrica nos permite comprobar que realmente A' sea la imagen de A, después de aplicar una rotación?

La respuesta a esta pregunta es que se identifique que al ser igual la distancia entre $\overline{AF}$ y $\overline{A'F}$, entonces estos puntos pasan por una circunferencia con centro en F y radio $\overline{AF}$, siendo el ángulo de rotación, aquel que se forma con los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{A'F}$ con extremo común en el punto F.

El profesor o la profesora, formaliza los aprendizajes tratados anteriormente.

Para definir una rotación $R_{(x,y);\alpha}$ es necesario

- ✓ Un punto P, en el plano considerado como centro de rotación.
- ✓ Un ángulo α que define la rotación.
- ✓ Un sentido de la rotación: positivo o negativo.

La rotación $R_{P;\alpha}$ de una figura en el plano, es una transformación isométrica tal que a cada punto A(x, y) de dicha figura le corresponde uno y solo un punto $A_1(x_1;y_1)$ de ese plano, de modo que ambos puntos pertenecen a un miso arco de circunferencia de centro P, radio r y ángulo α.

ROTACIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

CLASE 16

APLICACIÓN DE LA FASE 2: El profesor o la profesora, entregará a sus estudiantes una actividad que conduzca a realizar rotaciones de figuras en el plano cartesiano. El objetivo es que los y las estudiantes recurran a una estrategia que les permita encontrar la imagen del punto según el ángulo. Aquí se observarán los conocimientos que los y las estudiantes hayan adquirido y cómo la utilizarían en el desarrollo de la actividad.

Objetivo: Aplicar en el plano cartesiano la rotación de figuras planas a partir de diferentes ángulos.

Inicio de la clase

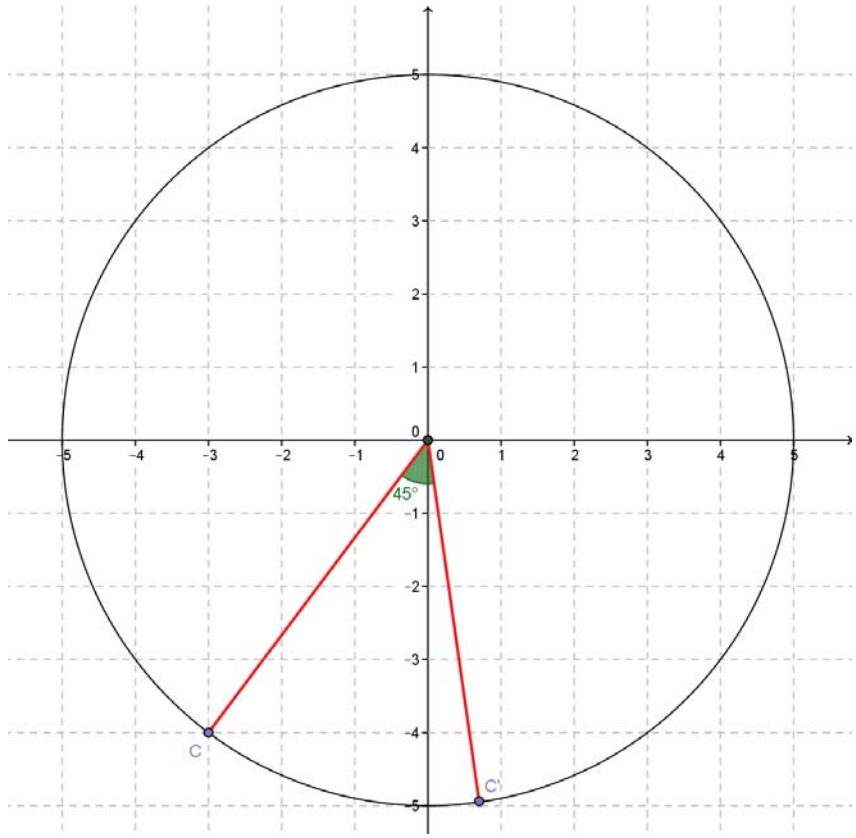
El profesor o la profesora, propone la siguiente actividad, que consiste en que rotar un punto perteneciente a una circunferencia con centro en el origen según el ángulo determinado. A partir de su desarrollo, se deduce que las coordenadas de la imagen del punto rotado en un plano cartesiano con centro en el origen, a partir de d pueden determinarse por simple observación.

Esta actividad debe ser resuelta en forma individual y usando instrumentos como compás, transportador y regla o bien, el profesor o la profesora, pudiera desarrollarla en un laboratorio de computación con el software GEOGEBRA.

Actividad 10

Establece en el plano cartesiano, una circunferencia de radio 5 unidades, con centro en el origen, y sitúa un punto en el contorno de la circunferencia. Luego, aplica una rotación al punto escogido, en sentido positivo, en 45°, 60°, 90°, 180° y 270° respectivamente.

A continuación se presenta el modelo de solución de la actividad para cuando el punto se rota en 45°.



Desarrollo de la clase

Se pedirá a los y las estudiantes que completen la siguiente tabla a partir de la actividad anterior.

Al profesor o la profesora, se entrega un ejemplo de aplicación de una rotación sobre la coordenada de un punto, dado un ángulo y el centro de rotación establecido en la actividad.

Coordenada	Rot. 45°	Rot. 60°	Rot. 90°	Rot. 180°	Rot. 270°
C(-3, -4)	C_1(0,7; -4,9)	C_2 (1, 9; 4, 5)	C_3 (4, -3)	C_4 (3, 4)	C_5(-4, 3)

El profesor o la profesora, solicitará a los y las estudiantes compartir sus resultados para después realizar una comparación entre sí, para después comparar dichos resultados y observar qué sucede con las coordenadas de las imágenes por la rotación y las coordenadas de la figura original. Luego, el profesor o la profesora, realiza la primera formalización de la actividad.

Se aplicó una rotación a un punto del plano, dado un centro de rotación, respecto a los ángulos notables 30°, 45° y 60°, quienes no varían en las coordenadas respecto del original, en cuanto al signo y la posición.

Los y las estudiantes comprobarán que existe una semejanza entre los signos de las coordenadas y su posición, al rotar el punto en 90°, 180°, 270° y 360°, llamados ángulos axiales. Posteriormente, el profesor o la profesora, realiza la segunda formalización de los aprendizajes construidos.

Al rotar un punto $P(x, y)$ ubicado en el Primer Cuadrante del plano cartesiano, respecto al origen $O(0,0)$ y según el ángulo de rotación α, los signos y la posición del punto imagen varían respecto al punto original.

Punto original	$R_{(o;90°)}$	$R_{(o;180°)}$	$R_{(o;270°)}$	$R_{(o;360°)}$
$A(x, y)$	$A_1(-y, x)$	$A_2(-x, -y)$	$A_3(y, -x)$	$A_4(x, y)$

Luego, el profesor o la profesora, solicitará a sus estudiantes que desarrollen la siguiente actividad, que consiste en aplicar una rotación a un punto, a partir de un centro respecto de los ángulos axiales $(90°, 180°, 270°\ y\ 360°)$.

Actividad 11

Rotar el punto $\boldsymbol{M(-4,5)}$ en torno a cualquier punto del plano, en sentido anti horario, según los ángulos: $\boldsymbol{90°, 180°, 270°\ y\ 360°}$.

Luego, el profesor o la profesora, realizará las siguientes preguntas.

- ✓ Al aplicar una rotación al punto $A(-3,1)$ respecto al ángulo 90° pero con distinto centro de rotación, $O(0,0)$ y $Z(2,0)$, ¿se aplica el cambio de signos para el centro $Z(2,0)$, según lo construido en la tabla?
- ✓ ¿Qué sucede si aplicamos una rotación respecto al origen en un ángulo de 360°?

<u>Cierre de la clase-metacognición</u>

El profesor o la profesora, realizará las siguientes preguntas para luego formalizar la última parte de la clase.

- ✓ Describa el procedimiento realizado para rotar un punto, dado cualquier centro, respecto al ángulo $180°$.
- ✓ ¿Qué se puede concluir acerca de realizar una rotación en $180°$ respecto a un punto cualquiera? ¿ocurre para ambos sentidos, horario como anti horario?

Formalización del aprendizaje a partir de las preguntas anteriores.

Una rotación con centro en el origen y un ángulo de $180°$, equivale a una simetría central respecto al origen.

ROTACIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

CLASE 17

APLICACIÓN DE LA FASE 3: Mediante una actividad inicial, el profesor o la profesora, propondrá su desarrollo a través del trabajo en equipo. A partir del trabajo en equipo, los y las estudiantes compartirán sus conocimientos diseñando una estrategia que permita alcanzar una respuesta acorde a la actividad, empleando un lenguaje apropiado al nivel. Cabe notar que la intervención de todos los y las estudiantes en esta etapa es fundamental, para promover la participación en el curso.

Objetivo: Analizar la aplicación sucesivas rotaciones para representar la composición de rotaciones.

Inicio de la clase

El profesor o la profesora, realiza un breve repaso acerca de los signos de las coordenadas al ser rotadas en los ángulos axiales: 0°, 90°, 180° y 270°.

La actividad puede ser desarrollada tanto manual como usando el programa GEOGEBRA, dependerá de la disposición el profesor o la profesora, y la capacidad de instalación tecnológica del establecimiento educacional.

A continuación, el profesor o a profesora, plantea las siguientes preguntas, dirigidas a realizar composiciones de rotaciones. Esta actividad es desarrollada en grupos de no más de tres personas puesto que lo interesante es conocer el lenguaje técnico que usarán los y las estudiantes para describir los pasos que realizaron.

Actividad 12

Para las siguientes preguntas, utiliza una figura que contenga a lo más cuatro vértices.

- ✓ **¿Qué transformación isométrica resultaría al aplicar dos rotaciones con distinto centro, en sentido positivo, y con un ángulo de 180° (positivo)?**

Las preguntas anteriores permiten observar si los y las estudiantes son capaces de visualizar dos rotaciones, dados ciertos elementos que las componen, usando plano cartesiano.

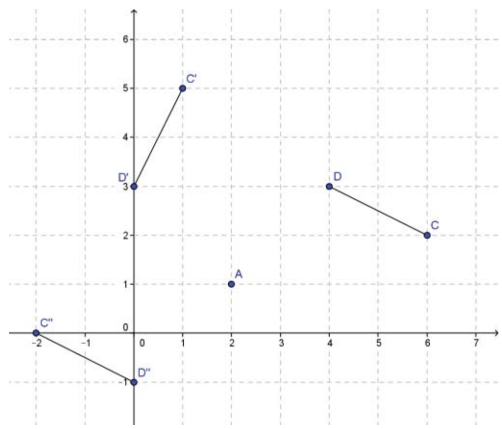
Desarrollo de la clase

El profesor o la profesora, pide a los y las estudiantes que propongan una figura en el plano, dado el planteamiento del problema, y apliquen las respectivas rotaciones, según las preguntas anteriores. El objetivo es que los y las estudiantes comiencen a visualizar la composición a partir de dos rotaciones, y reconozcan que el resultado es una transformación isométrica, como, por ejemplo, una traslación o reflexión.

En el desarrollo de la clase, se registran las respuestas de los ejemplos propuestos por los grupos de trabajo. Luego, el profesor o la profesora, después de observar a los grupos de trabajo, escogerá aquellos, para los que sea interesante el desarrollo de las respuestas ante la actividad propuesta. El profesor o la profesora, solicitará a los equipos a que pasen a la pizarra para presentar y revisar, en conjunto, su desarrollo ante el grupo curso. Esta forma de trabajo será necesario replicarse en las siguientes dos actividades, para promover la participación de todos los y las estudiantes.

A continuación, se entrega al profesor o la profesora, una representación de composición de rotaciones de un segmento $\overline{DC}$, y que servirá de ejemplo para acotar la actividad anterior, seguida de su respectiva formalización.

Representación de una posible respuesta a la actividad 12

	Dos rotaciones con centro en A y ángulo de 90° (sentido positivo) aplicadas al segmento CD. Resultado: Una simetría central con centro en A. Rotación en 180° (sentido positivo) con centro en A.

Formalización a partir de la actividad 12

La composición de rotaciones de igual centro y ángulo de 90° es equivalente a una rotación de centro P(x, y) y ángulo de 180°, y a una simetría central en P(x, y).

$$R_{(P(x,y);90°)}(A)\ o\ R_{(P(x,y);90°)}(A') = R_{(P(x,y);180°)}(A) = R_{P(x,y)}(A)$$

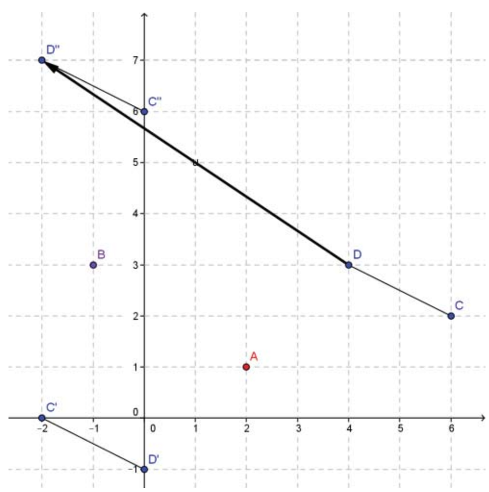
A continuación se presenta la actividad 13, con su respectivo ejemplo y, posteriormente, su formalización.

Actividad 13

Para las siguientes preguntas, utiliza una figura que contenga a lo más cuatro vértices.

- ✓ **¿Qué transformación isométrica resultaría al aplicar dos rotaciones seguidas con un ángulo de 90° (positivo) y en un mismo centro en el plano cartesiano?**

Representación de una posible respuesta a la actividad 13

	Dos rotaciones aplicadas al segmento CD; la primera aplicada con centro en A y en 180°, la segunda aplicada sobre el segmento C'D' con centro en B. Resultado: Una traslación con vector $\vec{u}$ = $\overrightarrow{DD'}$.

Formalización a partir de la actividad anterior.

La composición de dos rotaciones de distinto centro, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, y ángulo de 180°, es equivalente a una traslación.

$$R_{(P(x_1,y_1);180°)}(A)\ o\ R_{(Q(x_2,y_2);90°)}(A') = T_{(x,y)}$$

Se enuncia la actividad 14, que tiene por objetivo realizar la composición de dos rotaciones con un ángulo de 270° y con mismo centro de rotación.

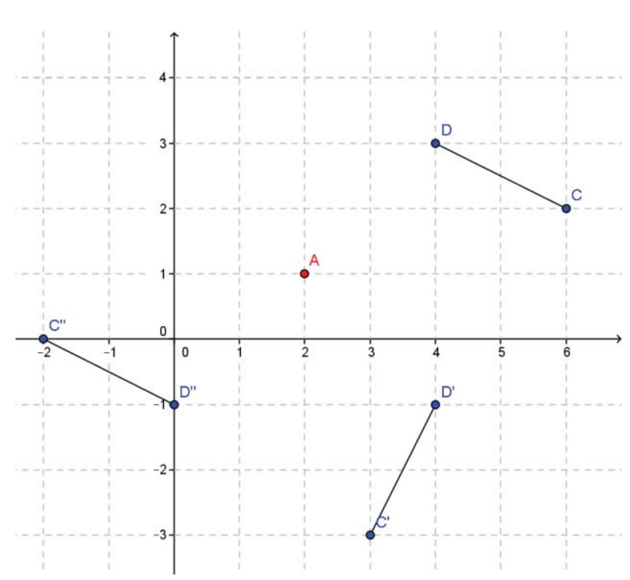
Actividad 14

Para las siguientes preguntas, utiliza una figura que contenga a lo más cuatro vértices.

- ✓ **¿Qué transformación isométrica se obtiene al realizar dos rotaciones con un ángulo de 270° (positivo) y con mismo centro de rotación?**

La representación siguiente es un ejemplo de la actividad 14, que consiste en aplicar dos rotaciones sucesivas al segmento $\overline{AB}$.

Representación de una posible respuesta a la actividad 14



Dos rotaciones seguidas, aplicadas sobre al segmento CD con centro en A y 270° (sentido positivo).

Resultado:

Rotación en 180° con centro en A.

Se presenta la siguiente propuesta de formalización generada de la actividad 14.

La composición de dos rotaciones con el mismo centro e igual ángulo de 270° es equivalente a una rotación de centro conocido M(x, y) y ángulo de 180°, y a una simetría central en M(x, y).

$$R_{(M(x,y);270°)}(A)\ o\ R_{(M(x,y);270°)}(A') = R_{(M(x,y);180°)}(A)$$

Cierre de la clase

El profesor o la profesora, realiza las siguientes preguntas para evidenciar el aprendizaje de los y las estudiantes.

- ✓ ¿Qué transformación resulta al componer rotaciones? ¿Siempre resulta la misma transformación isométrica?

- ✓ Al aplicar dos rotaciones a una figura, dado un centro, ¿qué ángulo(s) se debe(n) considerar para obtener una rotación de 90° respecto de la figura original?
- ✓ ¿Qué composición de transformaciones isométricas es reversible, es decir, realizando el procedimiento inverso a la imagen se obtiene la figura original?

Finalmente, realiza la última formalización de la clase a partir de la pregunta: ¿Qué se concluye acerca de la composición de rotaciones?

Dos o más rotaciones de igual o distinto centro pueden componerse, es decir, aplicarse una rotación a un punto seguida de otra rotación sobre un punto en el plano.

ROTACIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

CLASE 18

APLICACIÓN DE LA FASE 4 y 5: Los y las estudiantes serán capaces de responder a diversas actividades que tienen un mismo enfoque que las fases anteriores. Es por ello, que el profesor o la profesora, dispondrá de una actividad que consolide los aprendizajes obtenidos de los y las estudiantes, desde una nueva mirada.

Objetivo: Analizar la aplicación sucesivas rotaciones aplicadas dado un punto y un ángulo de rotación.

Inicio de la clase

Esta clase consiste en que los y las estudiantes conozcan cómo se representa intuitivamente un Grupo Abeliano. Para ello, los y las estudiantes realizarán una actividad, similar a la clase anterior, que consiste en realizar composición de rotaciones conocido un centro de rotación y el ángulo en sentido positivo.

Los y las estudiantes, no estudiarán la rotación como Grupo Abeliano en particular, de modo que no nos detendremos en los conceptos de clausura, asociatividad, existencia del elemento neutro, su unicidad, etc., por lo que no se abordará en este estudio el concepto de rotación inversa de una rotación dada; ya que el estudio de estas propiedades se corresponden con un nivel de razonamiento geométrico mayor. Por lo tanto, esta actividad se concentrará en la visualización de las composiciones de las rotaciones, especialmente cuando se utilizan ángulos axiales (0°, 90°, 180° y 270°).

El profesor o la profesora, retoma la última actividad de la clase anterior realizando un breve resumen. Luego, presenta la actividad con la que se trabajará en esta clase.

Desarrollo de la clase

El profesor o la profesora, presenta la siguiente actividad, que puede ser trabajado en grupos de no más de tres personas. Esta actividad se desarrolla tanto manual como también utilizando el software GEOGEBRA, por lo tanto, se deja esta decisión al profesor o la profesora.

Actividad 15

Completa la tabla con la información que falta, realizando rotaciones al punto $A(1,2)$, como se indica y registrando el resultado, con centro en $O(0,0)$, a partir de los ángulos de rotaciones. Para ello, aplica la rotación respecto al ángulo indicado en la fila y luego, el ángulo de la columna.

	$\boldsymbol{R_{0°}}$	$\boldsymbol{R_{90°}}$	$\boldsymbol{R_{180°}}$	$\boldsymbol{R_{270°}}$
$\boldsymbol{R_{0°}}$		$R_{90°}$		
$\boldsymbol{R_{90°}}$				
$\boldsymbol{R_{180°}}$				
$\boldsymbol{R_{270°}}$	$R_{270°}$		$R_{0°}$	

En caso que los y las estudiantes, no comprendan como generar los resultados para completar la tabla, el profesor o la profesora, plantea las siguientes preguntas.

- ✓ En la columna dos con fila dos, nos presentan $R_{90°}$, este es un resultado de aplicar dos rotaciones. ¿Cuáles son rotaciones aplicadas al punto $A(1,2)$? ¿Bajo qué ángulo realizamos la primera rotación?
- ✓ ¿Cuál es el resultado al aplicar una rotación en $270°$ y luego en $0°$?

A continuación se entrega el cuadro de composiciones con los resultados.

	$\boldsymbol{R_{0°}}$	$\boldsymbol{R_{90°}}$	$\boldsymbol{R_{180°}}$	$\boldsymbol{R_{270°}}$
$\boldsymbol{R_{0°}}$	$R_{0°}$	$R_{90°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$
$\boldsymbol{R_{90°}}$	$R_{90°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$	$R_{0°}$
$\boldsymbol{R_{180°}}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$	$R_{0°}$	$R_{90°}$
$\boldsymbol{R_{270°}}$	$R_{270°}$	$R_{0°}$	$R_{90°}$	$R_{180°}$

Cierre de la clase

El profesor o la profesora, realiza un resumen de todo lo relacionado a rotaciones de una figura en un plano, destacando la llamada simetría central.

- ✓ ¿Cómo reconocemos que una figura ha sido rotada?

<table>
<tr><td colspan="2">UNIDAD TEMÁTICA: GEOMETRÍA</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUBUNIDAD 6: CONGRUENCIA DE FIGURAS PLANAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">NIVEL 2

OBJETIVO: Deducir los criterios de congruencia de triángulos.</td></tr>
<tr><td>Indicadores de Logros del nivel</td><td>Identifica los criterios de congruencia de triángulos a partir de resolución de problemas.

Reconoce los criterios de congruencia aplicado en triángulos.

Aplica los criterios de congruencia aplicado en triángulos.</td></tr>
<tr><td>Objetivos de Clases</td><td>Clase 19: Identificar las propiedades entre dos figuras planas congruentes.

Clase 20: Representar los criterios de congruencia LLL y LAL.

Clase 21: Ampliar los criterios de congruencia de triángulos y aplicarlos en la resolución de problemas.</td></tr>
</table>

CONGRUENCIA DE FIGURAS PLANAS

CLASE 19

APLICACIÓN DE LA FASE 1 Y 2: La clase se enfoca en dos momentos, el primero consiste en evaluar los conocimientos previos de los estudiantes y las estudiantes acerca de Congruencia de figuras planas. La otra parte consiste en identificar cuando dos figuras son congruentes, usando instrumentos geométricos. Las actividades planteadas están diseñadas para ser trabajadas en grupos de trabajo, de esta manera los estudiantes y las estudiantes comparten información y el profesor o profesora, observa las estrategias para dar solución al problema y realizar las actividades propuestas.

Objetivo: Identificar las propiedades entre dos figuras planas congruentes.

<u>Inicio de la clase</u>

El profesor o la profesora presenta un nuevo capítulo de esta unidad "Congruencia de figuras planas". Para evaluar el nivel de conocimientos previos que traen los estudiantes y las estudiantes sobre figuras congruentes, realiza las siguientes preguntas, que permitirán dar inicio a una conversación en el grupo curso.

- ✓ ¿Cómo podrías obtener una figura exactamente igual a esta (indicar una figura) sin calcarla? Describe.
- ✓ ¿Qué significa que una figura sea la imagen por una transformación isométrica de otra figura?
- ✓ Si se conocen las áreas de dos figuras, ¿podemos establecer que una es transformación isométrica de la otra simplemente porque las medidas coinciden? Argumente.
- ✓ ¿Qué significa el término "congruencia"?

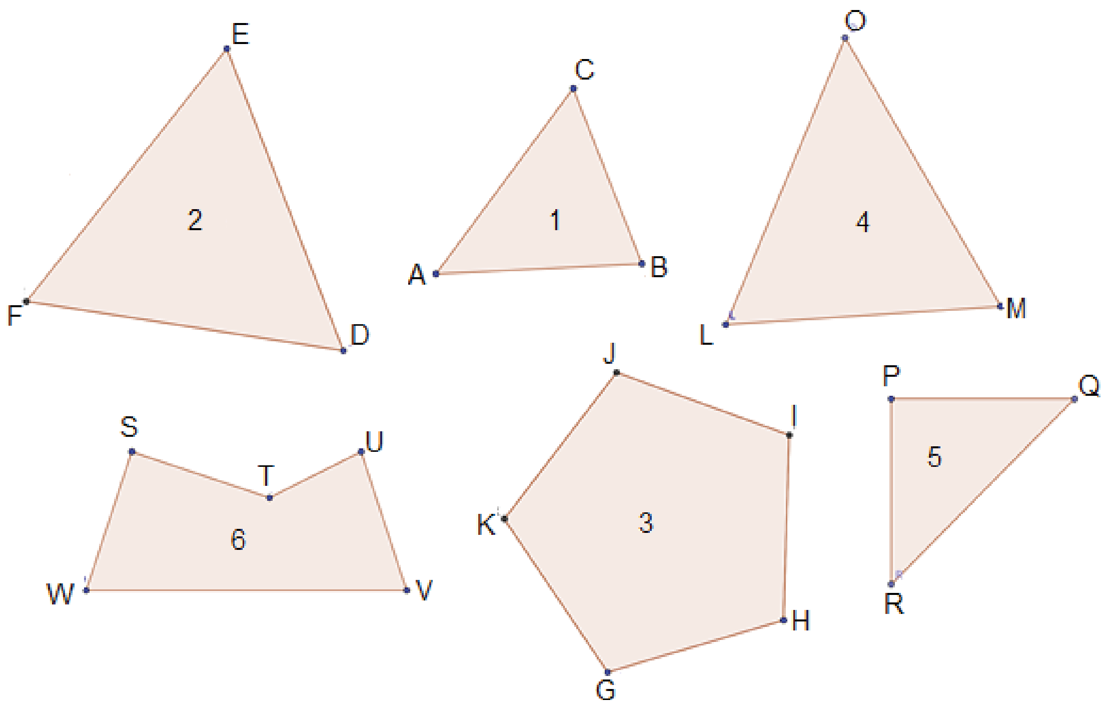
- ✓ Dos figuras geométricas, una generada de la otra, ¿podrían ser congruentes si se aplicó una transformación isométrica? Argumente.
- ✓ ¿Cuándo dos figuras son congruentes? Describe.
- ✓ ¿Serán siempre dos triángulos equiláteros congruentes, o dos triángulos isósceles congruentes? Argumente.

Para tener una base del manejo de los elementos sobre “Congruencia”, se propone el siguiente problema, que consiste en analizar qué elementos de un polígono (altura, mediana, etc) son suficientes para originar dos figuras congruentes.

El problema puede ser trabajado en grupos de no más de tres personas y requiere ocupar instrumentos geométricos como transportadores, compás y regla.

Problema 18

¿Qué elemento se necesita trazar en cada figura para obtener dos figuras congruentes?



El desarrollo de las respuestas debe ocupar los términos como altura, bisectriz, punto medio, es decir los elementos de un triángulo, y un pentágono, según corresponda.

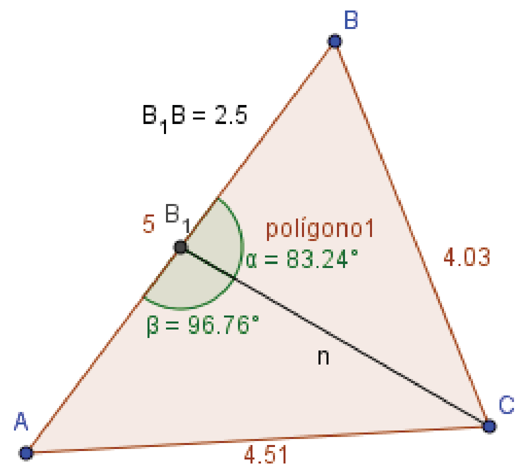
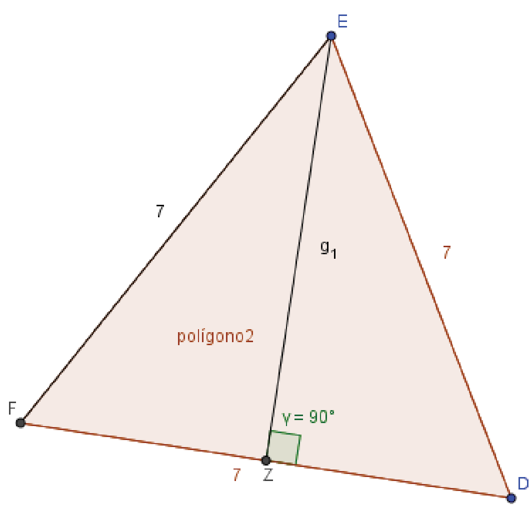
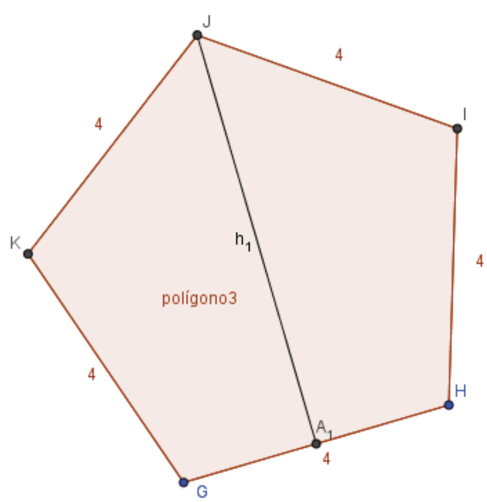
<u>Desarrollo de la clase</u>

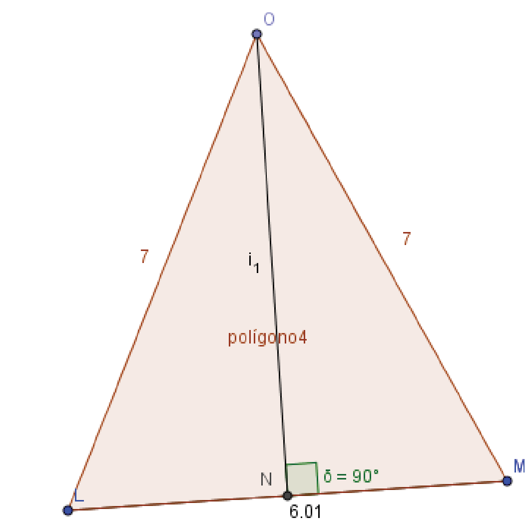
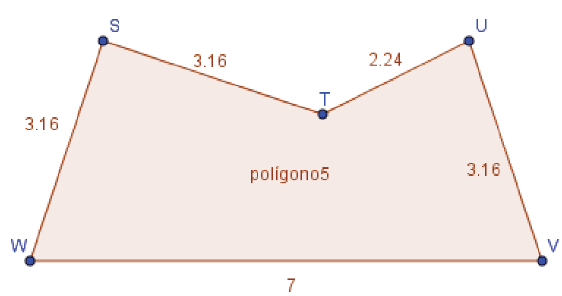
Pasado un tiempo, y bajo la observación previa de las respuestas expresadas por los grupos de trabajo, el profesor o la profesora, indicará a los grupos de trabajo que pasen al frente de la sala, escogerá los grupos de trabajo para que presenten sus respuestas y la forma en que abordaron el problema.

El profesor o la profesora, se apoyará en las siguientes preguntas a medida que los grupos de trabajo presenten su desarrollo y que generará la intervención (espontánea o motivada) del resto de los estudiantes del el grupo curso.

- ✓ ¿Cuáles son los polígonos que pueden ser divididos en dos figuras geométricas congruentes? Justifique su respuesta.
- ✓ ¿Cómo determinaron dos figuras congruentes en el caso del polígono 3? Explique.
- ✓ ¿Qué propiedades han utilizado para construir dos figuras congruentes con el polígono 5? Argumente.
- ✓ ¿Por qué no se puede construir dos figuras congruentes en el caso del polígono 6? Argumente su respuesta.
- ✓ ¿Cuáles son los lados, respectivamente congruentes, en cada par de figuras congruentes, que ha logrado construir?

A continuación se entrega la solución del problema, es decir, las medidas y puntos medios de los lados para cada triángulo, estableciendo si las figuras son o no congruentes.

	En el caso del polígono 1 no se puede establecer dos figuras congruentes puesto que al indicar el punto medio del segmento AB, los lados BC y AC no son iguales. Es decir, es un triángulo escaleno.
	Si los lados del triángulo son todos iguales entonces es un triángulo equilátero. Por lo tanto, basta trazar una de sus alturas o el punto medio de un lado para establecer dos figuras congruentes.
	Si los lados de un pentágono tienen misma medida entonces es un pentágono regular. Por lo tanto, trazando una recta desde uno de los vértices al lado punto medio del lado opuesto a dicho vértice, forma dos figuras congruentes.

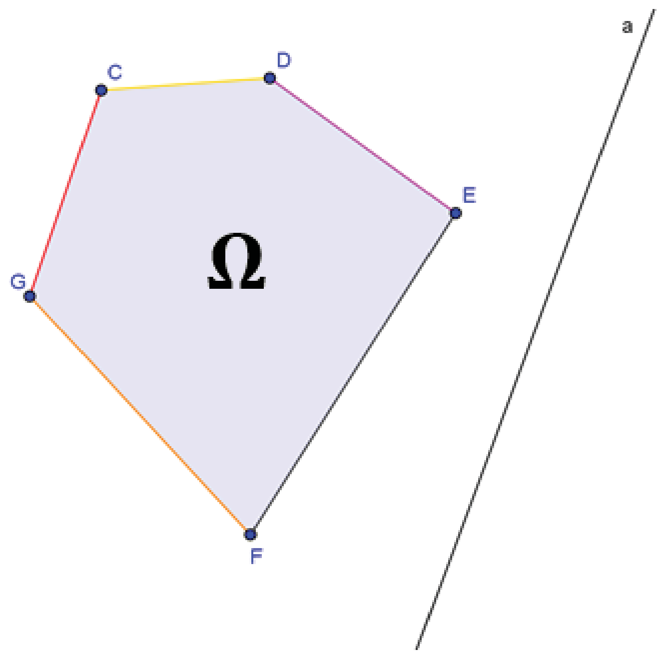
	Si dos de los lados de un triángulo tienen misma medida entonces es un triángulo isósceles. Por lo tanto, trazando la altura desde uno de los vértices al lado opuesto a dicho vértice se forman dos figuras congruentes.
	No puede formarse dos figuras congruentes.

El profesor presenta una nueva actividad para que los estudiantes establezcan los lados homólogos de dos figuras congruentes.

La actividad consiste en medir ángulos y lados de ciertos polígonos para dirigir la atención en establecer cuando son llamados homólogos; se desarrolla en forma individual para que los estudiantes asocien los lados y ángulos que son congruentes y de esta manera alcanzar los mínimos saberes que se necesitan en esta subunidad.

Actividad 16

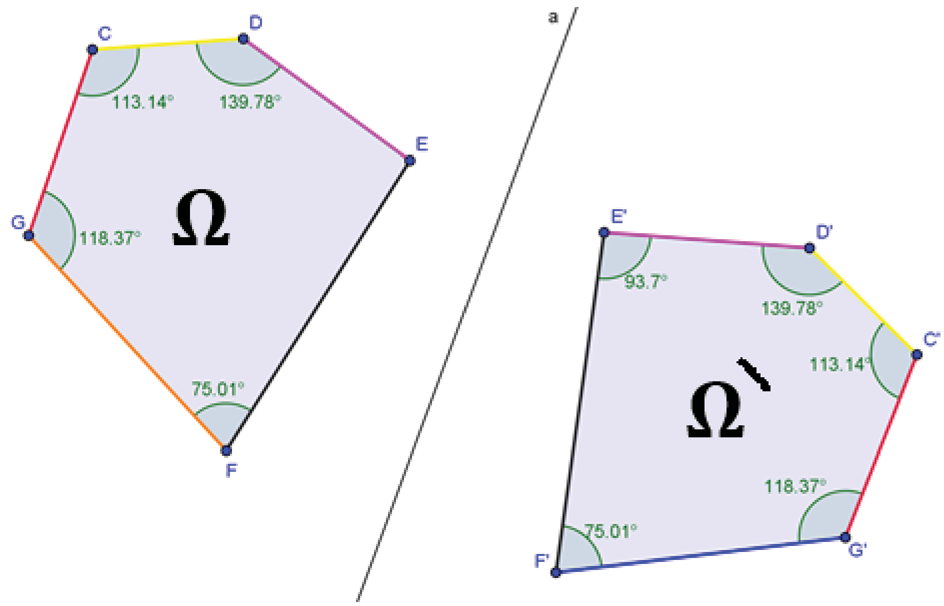
Aplique una reflexión al polígono Ω a la recta a. Luego, complete las tablas.



Si llamamos Ω′ a la imagen obtenida del polígono Ω, complete la siguiente tabla.

Tabla de información							
Ángulos del polígono Ω		Ángulos del polígono Ω′		Lados del polígono Ω		Lados del polígono Ω′	
Ángulo	Medida	Ángulo	Medida	Lado	Medida	Lado	Medida

A continuación se presenta la respuesta esperada en esta actividad. El polígono Ω, el polígono Ω' y la recta a, eje de simetría.



En conjunto con el grupo curso analizan la actividad anterior para extraer información a partir de las figuras.

Dos figuras son congruentes si una es la imagen de la otra, mediante una transformación isométrica.

Dos segmentos son congruentes sí y sólo sí tienen igual medida.

Se denominan elementos en figuras geométricas congruentes a aquellos que tienen la misma posición relativa. Por ejemplo, de la actividad anterior,

$\overline{CD}$ es homólogo con $\overline{C'D'}$.

$\overline{DE}$ es homólogo con $\overline{D'E'}$.

$\overline{EF}$ es homólogo con $\overline{E'F'}$.

$\overline{FG}$ es homólogo con $\overline{F'G'}$.

$\overline{GC}$ es homólogo con $\overline{G'C'}$.

Luego, el profesor o profesora, realizará la siguiente pregunta, para que el estudiante encuentre los ángulos homólogos.

- ✓ ¿Cuáles son los ángulos homólogos correspondientes al polígono 6?

<u>Cierre de la clase</u>

Cuando los estudiantes hayan finalizado la actividad, el profesor realiza las siguientes preguntas para luego cerrar la clase con la formalización de los aprendizajes.

- ✓ ¿Son las figuras congruentes?
- ✓ ¿Qué necesitan dos figuras para que sean congruentes?
- ✓ ¿Qué nombre reciben los lados y ángulos de igual medida?
- ✓ ¿Qué ocurre con el área y perímetro en cada figura?
- ✓ ¿Qué pueden concluir de los polígono CDEFG y C’D’E’F’G’?

Formalización

Se consideran dos figuras congruentes sí y sólo sí coinciden en forma y tamaño; para ello, si sus lados y ángulos de una figura son congruentes con los lados y ángulos homólogos de la otra figura.

CONGRUENCIA DE FIGURAS PLANAS

CLASE 20

APLICACIÓN DE LA FASE 2 y 3: El profesor o profesora, presentará actividades y problemas, que consisten en que el o la estudiante comience por representar el criterio de congruencia LLL mediante problemas, que serán trabajados en forma grupal. Para esto, la tarea del profesor será guiar a los grupos de trabajo a establecer estos criterios mediante ensayos de prueba y error.

Objetivo: Representar los criterios de congruencia LLL y LAL.

Inicio de la clase

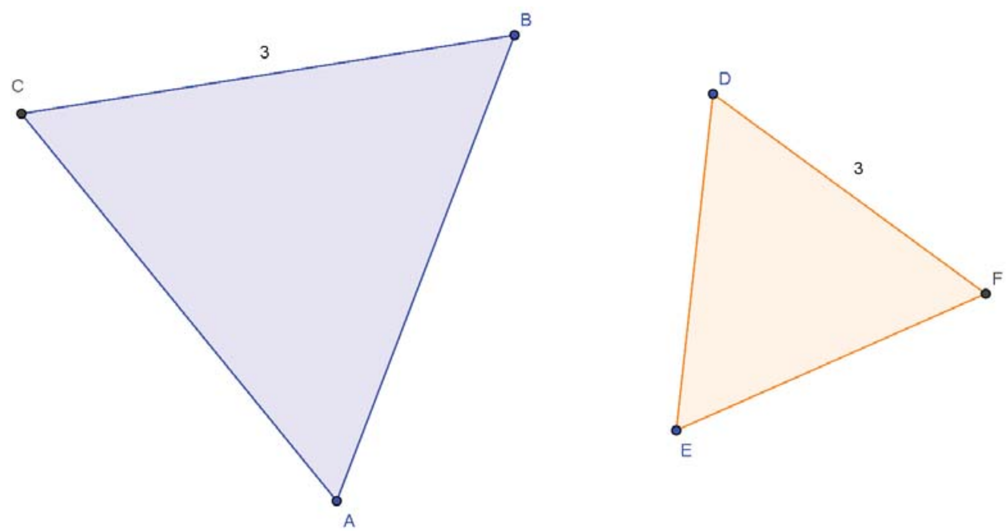
El profesor o profesora, en conjunto con el grupo curso, realizará un breve resumen de lo descubierto, en las actividades, en la clase anterior, y centrándose hacia los criterios de congruencia. Para lograrlo, el profesor o profesora, planteará las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué características deben tener dos figuras para ser congruentes?
- ✓ ¿Cuál es el símbolo de la congruencia?
- ✓ ¿Qué nombre reciben los lados, y los ángulos, que respectivamente correspondientes y congruentes?
- ✓ ¿Cuáles son los elementos mínimos que hay que establecer para que dos circunferencias sean congruentes? ¿Podría ocurrir lo mismo para dos cuadrados? Justifique su respuesta.
- ✓ ¿Es verdad que dos triángulos cualesquiera siempre serán congruentes? Justifique su respuesta.

El profesor o profesora, presentará el siguiente problema que consiste en, a partir de la indagación, observar si dos figuras pueden o no ser congruentes. Para ello, los y las estudiantes deberán trabajar con instrumentos geométricos como regla y transportador, y en grupos de no más de tres estudiantes, para los siguientes problemas y actividades.

Problema 19

¿Podrían ser los triángulos ABC y DEF congruentes?



A partir de la actividad anterior, y pasado un tiempo para que sea respondida por los estudiantes, el profesor o la profesora, realizará preguntas, cuyo fin será el de observar si existen estudiantes que se guían por la apariencia de las figuras en vez de los datos de las mismas, para luego dirigir el estudio hacia el primer criterio de congruencia que se estudiará. Se plantearán las preguntas siguientes son.

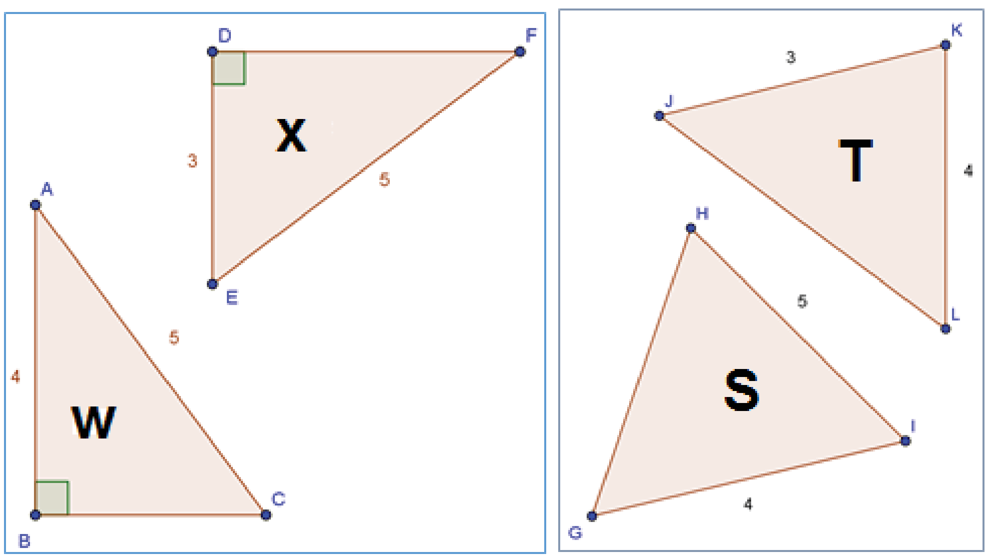
- ✓ ¿Pueden ser las figuras dadas congruentes? ¿Por qué?
- ✓ ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior en cada triángulo? ¿Qué tipo de triángulos son? ¿Cuál es la característica principal en cada uno?
- ✓ ¿Cuál es la información mínima que debemos conocer en dos triángulos para asegurar que ellos sean congruentes? ¿Ocurre siempre así?

Desarrollo de la clase

De la última pregunta, el profesor o la profesora, presenta la siguiente actividad que consiste en comparar dos pares de triángulos, y así observar si estos pueden o no ser congruentes. La actividad puede ser resuelta en grupos de no más de tres estudiantes.

Actividad 17

Determina si las siguientes figuras pueden o ser congruentes.



Una vez concluida la actividad por parte de los estudiantes, el profesor o la profesora, realizará las siguientes preguntas.

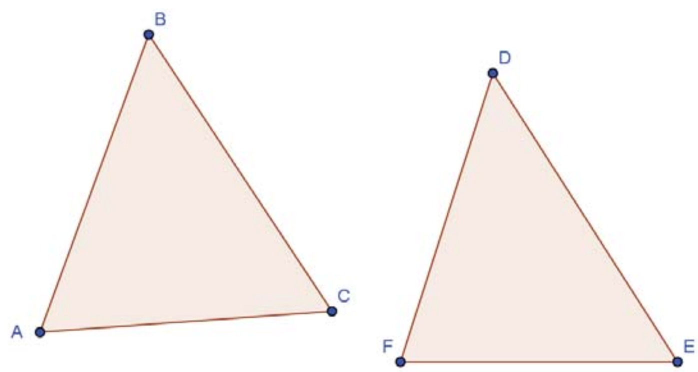
- ✓ ¿Pueden ser el polígono W y polígono X, figuras congruentes? ¿Por qué?
- ✓ ¿Cuáles serían sus lados homólogos? ¿Y sus ángulos homólogos?
- ✓ ¿Puede ser el polígono S y el polígono T, triángulos congruentes? ¿Por qué?
- ✓ ¿Es el lado AB, del polígono W que usted puede garantizar, congruente con el lado GI, del polígono S?
- ✓ De ser afirmativa la respuesta anterior, ¿es suficiente esa información para asegurar que los polígonos W y S sean congruentes?
- ✓ ¿Cuál es la información mínima para dos triángulos congruentes?

El profesor, formaliza los aprendizajes adquiridos en la actividad anterior

Criterio LLL

Para determinar la congruencia entre dos triángulos, se utilizan criterios de congruencia, que corresponden a la mínima información que se necesita para asegurar congruencia de dos triángulos.

Dados los siguientes triángulos



El criterio de congruencia lado, lado, lado, o bien LLL, especifica que dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes, es decir,

$$\overline{AB} \cong \overline{\mathrm{DE}}$$
$$\overline{\mathrm{BC}} \cong \overline{\mathrm{EF}}$$
$$\overline{\mathrm{AC}} \cong \overline{\mathrm{DF}}$$

Luego se establece que $\Delta\,\mathrm{ABC} \cong \Delta\mathrm{DEF}$.

Formalizada la actividad anterior, el profesor o profesora, introduce el siguiente problema, para abordar el próximo criterio de congruencia, lado-ángulo-lado. Para esto, se propone el siguiente problema.

Problema 20

Se observó que dos triángulos que tengan sus tres lados respectivamente iguales son, congruentes. Si se conoce que en dos triángulos solo dos de los lados de uno de ellos son congruentes, respectivamente, con dos de los lados de otro triángulo, ¿qué otra condición puede agregar, sin involucrar a los terceros lados, respectivamente, que permita garantizar que los triángulos resulten congruentes?

Los y las estudiantes, al investigar para encontrar una respuesta al problema 20, deberán realizar pruebas de ensayo y error, para comprobar si las hipótesis que van agregando son suficientes. La tarea del profesor o la profesora, en este momento, es conducir el aprendizaje, a través de las preguntas siguientes:

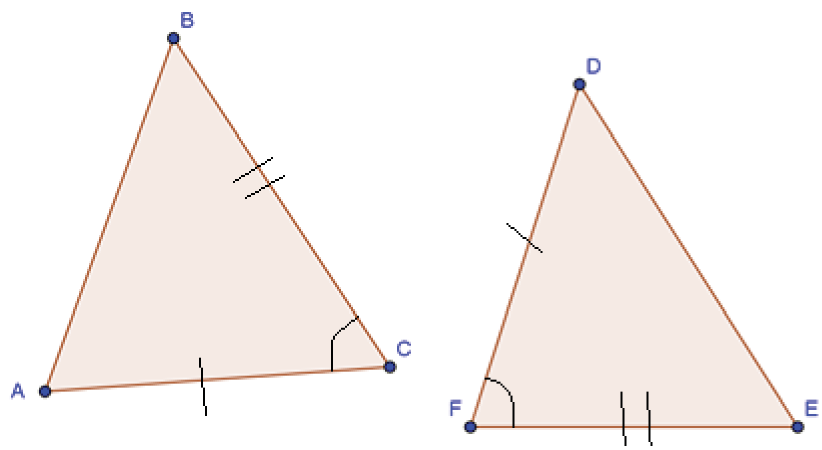
- ✓ ¿Qué información entrega el problema?
- ✓ ¿Es suficiente con conocer solo los dos lados de un triángulo, para ser congruentes? ¿Qué ocurre respecto a los ángulos de los triángulos?
- ✓ ¿Qué características deberían tener los triángulos para que se cumplan las hipótesis del problema?
- ✓ ¿El ángulo descrito en el planteamiento, puede estar colocado en cualquiera de los tres vértices, sin importar el orden de los lados?

Cierre de la clase

Se discutirá la respuesta del problema anterior con el grupo curso, para después realizar la siguiente formalización.

Criterio LAL

Teniendo la siguiente representación



El criterio lado, ángulo, lado, o bien LAL, especifica que dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente congruentes, esto es:

$$\overline{CA} \cong \overline{FD}$$

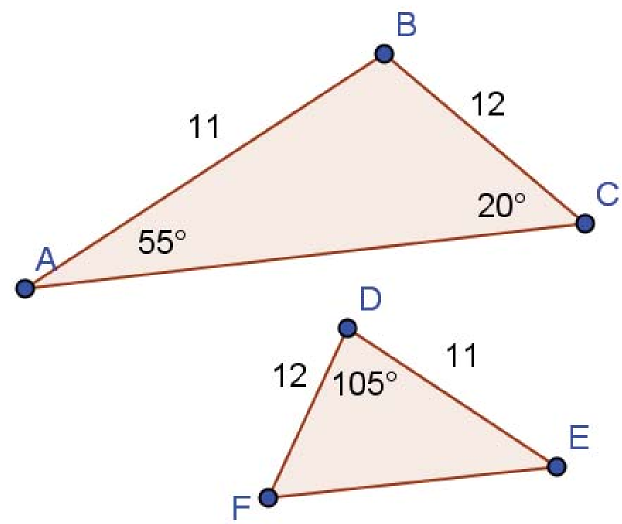
$$\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle EFD$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$

Luego se establece que $\Delta\,\mathrm{ABC} \cong \Delta\mathrm{DEF}$.

Finalmente, el profesor o profesora, plantea la siguiente actividad de cierre que consiste en reconocerla congruencia de dos triángulos, bajo el segundo criterio estudiado en clases, la que se resuelve en participación con el grupo curso.

Actividad 18



De la representación anterior:

- ✓ **Identifique si se aplica el criterio de congruencia LAL.**
- ✓ **¿Cuáles son sus lados homólogos y el ángulo que comprende sus lados? Menciónelos.**

CONGRUENCIA DE FIGURAS PLANAS

CLASE 21

APLICACIÓN DE LA FASE 4 y 5: El profesor o la profesora a cargo, planteará en la clase los dos criterios de congruencia de triángulos ya estudiados y propondrá el análisis de estos criterios para comprobar si son aplicables a los triángulos que se presentarán en las actividades, y de esta forma introducir a un tercer criterio de congruencia (ALA).

Objetivo: Ampliar los criterios de congruencia de triángulos y aplicarlos en la resolución de problemas.

Inicio de la clase

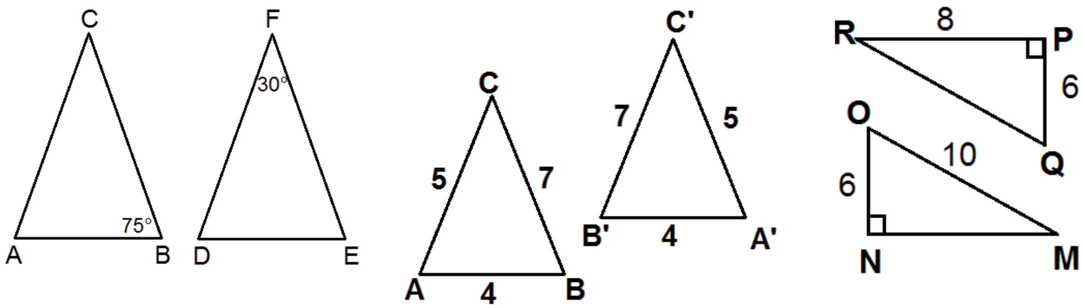
El profesor o la profesora, propondrá al grupo curso realizar un resumen acerca de los conceptos y criterios de congruencia de triángulos, tratados en las clases anteriores.

Para observar si los y las estudiantes han aprendido la diferencia entre los criterios estudiados de congruencia de triángulos LLL y LAL, retomará la actividad final de la clase anterior y propondrá ejemplos de aplicación.

A continuación el profesor propone el siguiente problema, cuyo objetivo es reconocer los criterios de congruencia de triángulos e introducir el tercer criterio, LAL.

Problema 21

¿Son todos los siguientes pares de triángulos, congruentes entre sí?



ΔABC y ΔDEF son isósceles y $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

<u>Desarrollo de la clase</u>

A partir del problema anterior, el profesor o profesora, planteará las siguientes preguntas dirigidas a establecer el tercer criterio de congruencia. Estas preguntas son:

- ✓ ¿Cómo determinaron la congruencia de cada par de triángulos?
- ✓ ¿Qué criterio aplicaron para determinar la congruencia de los triángulos ΔABC y ΔDEF? Argumente su respuesta.

El profesor o la profesora, plantea los criterios de congruencia de triángulos vistos en la clase anterior y propone el otro criterio de congruencia que falta, Ángulo-Lado-Ángulo. Para ello, el profesor o la profesora, debe explicar a los estudiantes que los criterios de congruencia principales son tres, estos son: LLL, LAL y ALA.

Para dar inicio a la siguiente actividad, el profesor planteará el siguiente criterio de congruencia a estudiar: ALA.

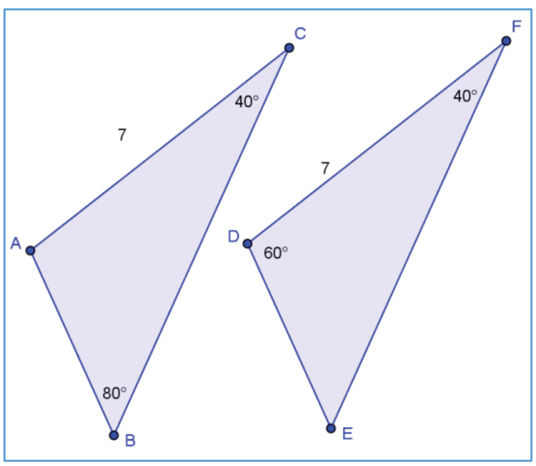
Criterio ALA

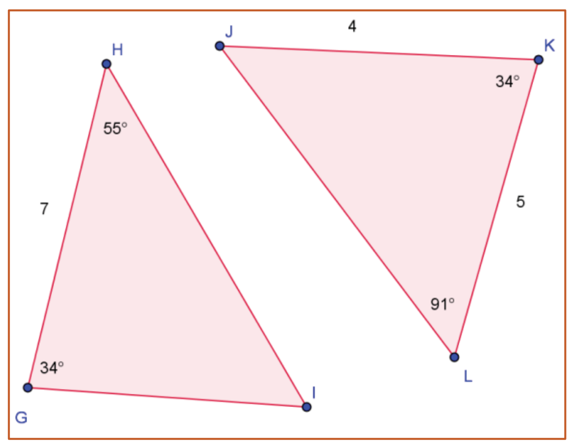
El criterio ángulo, lado, ángulo, o bien ALA, establece que dos triángulos que tengan un lado respectivamente igual e iguales sus ángulos adyacentes, son congruentes.

La actividad siguiente, consiste en que los y las estudiantes identifiquen si en los siguientes pares de triángulos se puede aplicar este criterio, para después formalizar la situación.

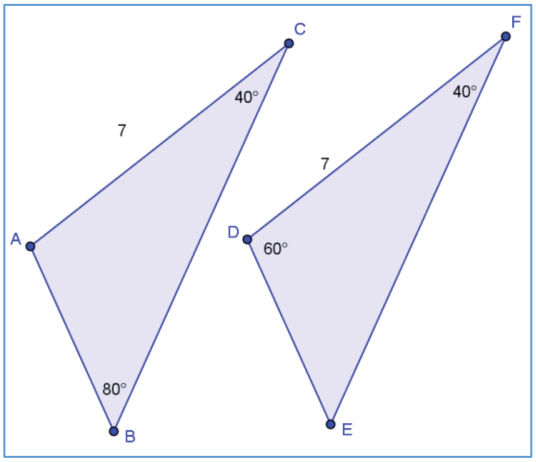
Actividad 19

¿Es posible identificar si en el análisis de la congruencia en los triángulos se puede aplicar el criterio ALA?





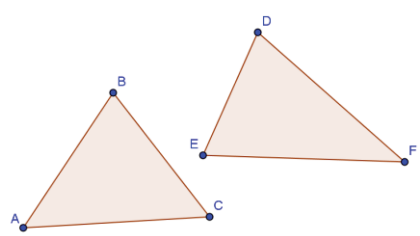
Los y las estudiantes observarán que en la primera figura sí se puede aplicar el criterio de congruencia ALA. El profesor o la profesora, conducirá el análisis del caso en que no se cumple que haya congruencia. En esta instancia, el profesor o la profesora, en conjunto con el grupo curso, formalizarán la congruencia del primer par de triángulos, bajo el criterio de congruencia ALA, como a continuación se propone.

	Si tenemos $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle FDE$ $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle EFD$ Entonces, $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

En el siguiente par de triángulos, el o la estudiante, observará que no se puede establecer una congruencia de triángulos bajo ese criterio pero sí los estudiantes podrían formular las condiciones que deben cumplir ambos triángulos, para que sean congruentes. Por eso, es importante que el profesor o profesora cree una discusión en el grupo curso, para poder observar si sus estudiantes han comprendido el criterio, aplicándolo en la actividad.

Cierre de la clase

El profesor formaliza los aprendizajes emanados en la actividad anterior, agregando un ejemplo que irá acorde a la formalización.



El criterio ángulo – lado – ángulo (ALA), indica que dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado adyacente a ellos, respectivamente congruentes, por ejemplo:

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$$
$$BC \cong EF$$
$$\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle EFD$$

Entonces, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

El capítulo presente tiene por objetivo analizar las estrategias utilizadas para elaborar una propuesta de "secuencia metodológica" para la unidad de Geometría. Este trabajo va dirigido a profesores y profesoras que impartan clases de Matemáticas en un Primer Año de la Enseñanza Media, simplemente, Primer Año Medio.

Los párrafos siguientes, consisten en presentar los objetivos y tareas principales de la Propuesta, para abordar los siguientes puntos centrales de este capítulo: Elaboración Prueba de Diagnóstico, Análisis de contenido y Discusión de los resultados en base al marco teórico.

La propuesta de "secuencia metodológica" basada en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y se enfoca en los siguientes objetivos:

- ✓ Apoyar al profesor o profesora a realizar clases de Geometría, bajo la metodología de Resolución de Problemas.
- ✓ Promover en los y las estudiantes, la habilidad de resolver problemas, con el uso de sus propias herramientas y conocimientos, mediante la orientación de actividades concretas y ubicando al estudiante en un escenario que los y las obligue a "resolver problemas".

En la construcción de la secuencia se abordaron las siguientes tareas de investigación, promoviendo a partir del planteamiento de un problema. Estas tareas son:

- ✓ Estudiar el Modelo de Van Hiele compuesto por sus propiedades, fases y niveles de razonamiento geométrico, con el objetivo de organizar las clases en cada subunidad de Geometría.
- ✓ Analizar estudios de otros investigadores, para realizar un "pre test", con el propósito de diseñar un Modelo de Prueba de Diagnóstico.
- ✓ Estudiar, en cada subunidad, el diseño y enfoque de los problemas, y actividades presentados a los y las estudiantes.

4. 1. Elaboración Prueba de Diagnóstico

La Prueba de Diagnóstico (Anexo 1) ha sido construida con el propósito de observar los siguientes aspectos, referentes a "capacidades" de los y las estudiantes:

- ✓ Tomar conocimiento del nivel de dominio, o el desconocimiento que poseen los y las estudiante sobre los conceptos y propiedades fundamentales involucradas en el desarrollo de los temas de la unidad de Geometría, todo ello, a los efectos de poder diseñar una secuencia metodológica que tenga en cuenta esta diversidad.
- ✓ La capacidad de diseñar estrategias coherentes, que los y las estudiantes utilicen para hallar con la solución al problema o desarrollar la actividad propuesta.
- ✓ Identificar, mediante la resolución de problemas planteados, el nivel de razonamiento geométrico de los y las estudiantes, a partir del lenguaje técnico utilizado y el conocimiento previo sobre el tema.

A través de la Prueba de Diagnóstico, junto con su rúbrica de respuestas esperadas y observaciones complementarias, se identifica si los y las estudiantes establecen un lenguaje técnico apropiado para, lo que permite en un nivel determinado de razonamiento geométrico según el Modelo de Van Hiele.

Al aplicar la Prueba de Diagnóstico a los y las estudiantes, se observan los siguientes puntos:

- ✓ En ningún caso existe una estrategia coherente que ayude o establezca cómo resolver los problemas propuestos, observándose poca capacidad para describir cómo llegar a las respuestas.
- ✓ Se aprecia un insuficiente vocabulario técnico en cada situación planteada.
- ✓ Se constata que poseen conocimientos sobre los conceptos básicos relacionados con la unidad de Geometría, por ejemplo: traslación, gráfico, eje de abscisas y eje de ordenadas, entre otros.

Luego de las observaciones anteriores, se logra establecer que los estudiantes, en su totalidad, se encuentran en el nivel básico del Modelo de Van Hiele y lo que conlleva a las siguientes consideraciones:

1. La elaboración de las clases de la secuencia se enfoca hacia la necesidad de que el estudiante aborde problemas y actividades diseñadas con el propósito de alcanzar el nivel 2 de razonamiento geométrico, según el Modelo de Van Hiele.

4. 2. Análisis de contenido

La secuencia metodológica elaborada, se caracteriza por su propósito fundamental, que los y las estudiantes, desarrollen la habilidad de "Resolución de Problemas" en las horas de clases, consoliden sus conocimientos básicos sobre Geometría y fortalezcan su formación matemática, por ello, que en cada planificación de clases se diseñaron problemas y actividades que fomenten la práctica de "resolver problemas".

La unidad de Geometría se distribuye en un total de 52 horas aproximadamente, e impartidas a través de, lo que se ha llamado, subunidades. Estas subunidades son:

- ✓ Figuras en el plano cartesiano
- ✓ Vectores en el plano
- ✓ Traslación de figuras planas en el plano cartesiano
- ✓ Reflexión de figuras planas en el plano cartesiano
- ✓ Rotación de figuras planas en el plano cartesiano
- ✓ Criterios de congruencia en triángulos

Los problemas y actividades presentados en la secuencia, tienen por objetivo construir un concepto o saber geométrico, tratado en las subunidades que la componen. La construcción de estos conceptos se realiza por medio de la aplicación de la “Resolución de Problemas”.

La función del profesor o profesora, en la implementación de la secuencia, es la de “mediador” entre los y las estudiantes, y el problema o actividad, siendo, además, el encargado de formalizar cada aprendizaje desarrollado en los problemas y actividades en el transcurso de la clase.

A continuación, se muestra una tabla que indica la distribución de los contenidos pedagógicos en base a las subunidades, sus conceptos centrales y una aproximación mínima de horas de clases para cubrir la Unidad de Geometría. Todo ello, previa consulta a especialistas expertos.

Tabla 5 Organización de subunidades de Geometría

Ítem	Título	Conceptos a estudiar	Número de clases propuestas	N° horas. Pedagógicas Base
Subunidades de Geometría	**Figuras en el plano cartesiano**	Área. Perímetro. Teorema de Pitágoras. Plano Cartesiano.	**3**	**6**
	Vectores en el plano cartesiano	Vector. Clasificación de Vectores. Aplicación del teorema de Pitágoras. Componentes de un Vector.	**4**	**8**
	Traslaciones en el plano	Vector de traslación. Traslación de figuras planas.	**3**	**6**
	Reflexiones en el plano	Simetría central. Reflexión de figuras. Simetría axial. Distancia.	**4**	**8**
	Rotaciones en el plano	Rotación de figuras según ángulos axiales. Centro de rotación.	**4**	**8**
	Criterios de congruencia de triángulos	Congruencia de figuras planas Criterios de congruencia: LAL, ALA y LLL.	**3**	**6**

Fuente: Elaboración de la Autora.

La tabla 5 presenta la distribución de las subunidades, el número de clases y el tiempo, en horas pedagógicas, que se ha propuesto para el desarrollo de cada subunidad. Se observa que las subunidades que abarcan un mayor tiempo de trabajo, con 8 horas pedagógicas cada una, son: “Vectores en el plano cartesiano”, “Reflexiones en el plano” y “Rotaciones en el plano”.

Por otro lado, el número de horas que aparece en la Tabla 5, corresponde al número mínimo de horas pedagógicas consideradas para el desarrollo de cada subunidad. De modo que, el tiempo real que se ocupará, para el desarrollo de cada subunidad, puede variar, de acuerdo al número de horas pedagógicas que, en total, se requieran para el desarrollo del programa de la asignatura.

4. 3. Discusión de los resultados en base al marco teórico

De la elaboración de la secuencia metodológica para la unidad de Geometría de primer año medio y la bibliografía referida en el marco teórico, así como del problema planteado, se extraen los siguientes puntos de análisis.

4. 3. 1. La habilidad de resolver problemas a través del estudio de los conceptos geométricos presente en la propuesta

El estudio de la Matemática en el currículum chileno para un Primer Año Medio (Ministerio de Educación, 2011) se distribuye en cuatro ejes: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar. Cada uno de ellos se propone el desarrollo de capacidades, tales como la de adquirir habilidades en la solución de problemas, argumentar, modelar, representar y comunicar.

De las habilidades descritas en el párrafo anterior, la argumentación y la comunicación, el modelamiento y la representación, son partes esenciales de la "Resolución de Problemas". Es por ello, que en el trascurso de la secuencia, se trabajan estas habilidades, mediante la función de problemas y el desarrollo de actividades. Esta labor metodológica incluye la propuesta de preguntas dirigidas y preguntas orientadoras, que realiza el profesor o la profesora, según sea el caso, y la formalización de los contenidos a través de la corrección y evaluación del vocabulario técnico.

La secuencia tiene por característica fundamental, el diseño de problemas para Geometría, donde el estudiante se enfrenta a un problema y mediante las orientaciones del profesor, a través de preguntas dirigidas, hacen que el estudiante aprenda a resolver problemas, usando sus habilidades al participar en grupos de trabajo y, además, presentar en forma individual sus razonamientos, para explicar las estrategias de resolución de los problemas que se han propuesto.

En la secuencia metodológica elaborada se propone que:

- ✓ El profesor observe cómo interactúa el o la estudiante con el problema, así como las estrategias que ocupa para resolverlo.
- ✓ El o la estudiante, junto con el resto de sus compañeros y compañeras, comparten sus conocimientos para un propósito en común, la solución del problema.

La propuesta de trabajar en Geometría unido al Modelo de Razonamiento de Van Hiele, permite crear problemas y actividades en cada fase del Modelo, donde el profesor o profesora resulta ser un mediador del procedimiento que realizan los y las estudiantes con el propósito de resolver un problema o realizar una actividad.

A continuación, se presenta la Tabla 6 que muestra las características del problema, o actividad, y la participación del profesor o la profesora, en las fases del modelo de Van Hiele.

Tabla 6 Participación del profesor en cada fase del Modelo presente en la secuencia.

Fase	Participación del profesor	Descripción del problema o actividad
Fase 1 o fase de información	Observar los conocimientos que trae el o la estudiante.	Proposición de un problema que recopile elementos básicos del tema.
Fase 2 o Fase de Orientación Dirigida	Dirigir al estudiante, a partir de lo trabajado en la fase 1, hacia el concepto en estudio mediante preguntas dirigidas.	Proposición de un problema seguido de una actividad, que busque afianzar sus conocimientos respecto de la fase 1.
Fase 3 o Fase de Explicitación	Establecer conceptos tratados en la fase 1, lo observado, y los conceptos asociados en la fase 2, mediante la discusión de vías de solución, propendiendo a que los estudiantes compartan sus repuestas, para establecer el vocabulario técnico.	Planteamiento de una actividad que consolide los nuevos conceptos relacionados en la fase 1 y 2, seguido de un problema que promueva el desarrollo de estrategias de resolución empleando los conceptos tratados.
Fase 4 o Fase de Orientación Libre	Observar y verificar el vocabulario que plantean los y las estudiantes.	Planteamiento de un problema que tenga diferentes vías de solución.
Fase 5 o Fase de Integración	Proporcionar una visión generalizada de los conceptos estudiados, recopilando los resultados más importantes, a partir de las estrategias observadas en la fase 4.	Proposición de un problema que integre los conceptos abordado en las fases anteriores.

Fuente: Elaboración de la autora.

De lo expuesto en la Tabla 6, se infiere que la participación del profesor es la de mediador o facilitador entre los y las estudiantes y el problema o actividades propuestas en cada fase del modelo, permitiendo la interacción entre ellos y orientando las propuestas de solución que emanan de la reflexión individual o grupal de los estudiantes.

4. 3. 2 ¿Cómo fomentar el lenguaje técnico de la Geometría en los estudiantes?

Parte importante en el área de la Geometría de la Resolución de Problemas, consiste en que el estudiante comunique información a través de la argumentación, pero esa habilidad requiere usar un lenguaje apropiado al contexto.

En la secuencia, los problemas que se plantean, provocan que el estudiante, intuitivamente formule *palabras claves* que conoce, y que a partir de los aprendizajes, las reconozcas, formando parte de un concepto, en este caso un concepto geométrico que va asociado a sus características. Esto se enfoca hacia una de las propiedades que presenta el Modelo de Van Hiele, es decir, para que un estudiante alcance un nivel dentro de este modelo, uno de los criterios es operar con un lenguaje apropiado para el nivel que se quiere completar lo que se realiza a través de la formalización de los aprendizajes durante los momentos de cada clase.

4. 3. 3. La resolución de problemas en la clase: problemas y actividades

Las metas de las clases consisten en que el o la estudiante, mediante la interacción con el problema o actividad, encuentre un concepto y luego conecte tal concepto con otro nuevo, es decir, construya su propio conocimiento a partir de lo que sabe.

La secuencia provee su innovación, respecto a la metodología clásica, en que el o la estudiante ahora enfrenta situaciones desconocidas (el problema a resolver), situaciones a las que debe aportar una solución que satisfaga los requerimientos impuestos y que genere la necesidad de ocupar sus propias herramientas.

Además, los problemas que se plantean tienen varias estrategias de solución que podrían considerar los y las estudiantes.

Por ejemplo, en la clase 3 de la secuencia, se crea el *problema 3* (ver página 39) que consiste en comparar si las áreas sombreadas de dos polígonos tienen la misma medida de sus áreas, ¿cuál es la diferencia entre el problema 3, como ejemplo, y otros problemas que plantean una aplicación de procedimientos? La diferencia es que el estudiante, respondiendo a lo planteado en la secuencia, comprenda cómo obtener el área de la figura a partir de sus conocimientos, versus la conducta tradicional, que consiste en que el estudiante aplique una fórmula para obtener el área de una figura, y que, por lo tanto, sólo deberá conocer los elementos necesarios del problema y luego, reemplazar en valores de forma mecanicista.

Los problemas y actividades presentes en la secuencia, permite construir un concepto. El o la estudiante, como protagonista de la secuencia, habrá analizado e interpretado información a partir del planteamiento de un problema, sintiéndose capaz de abordar cualquier situación problemática, propuesta en Matemáticas o Geometría.

4. 3. 4. ¿Cómo entendemos la resolución de problemas hacia los y las estudiantes?

Si nos preguntamos, simplemente, acerca de la evolución del ser humano ¿por qué aún sigue existiendo y no se ha extinguido en el tiempo? Seguro que muchos especialistas coincidirán en que es debido a que la humanidad ha sabido resolver problemas.

Desde inicios de la historia de la humanidad, el ser humano se ha encontrado con problemas y que, a partir, de conocer sus propias herramientas, ha sido capaz de afrontarlos, es por eso que "resolver problemas" no implica que debamos conocer un método óptimo y universal que satisfaga su solución.

Polya (1945) en su trabajo "How to solve it: A new aspect of Mathematical model" presenta una estrategia, a base de preguntas, que deriva en un procedimiento para dar solución a un problema de Matemáticas, y lo explica en cuatro pasos:

1) Entender el problema.
2) Configurar un plan.
3) Ejecutar el plan.
4) Mirar hacia atrás.

Cada uno de estos pasos, genera una serie de interrogantes que sirven para hallar la solución del problema. Es decir, existen fuentes que permiten apoyar al estudiante en la búsqueda de soluciones al problema propuesto.

Actualmente, con los nuevos enfoques y propuestas dirigidas al profesor, para trabajar en clases, se ofertan nuevas estrategias, en donde él y la estudiante son el centro de atención y de acción.

Entre las nuevas ofertas existen talleres, como se menciona en el marco teórico, para profesores y estudiantes de pedagogía, que apoyan la idea de la Resolución de Problemas en Matemáticas y que buscan observar cómo el estudiante resuelve un problema sin anteponer un procedimiento. En este caso, la secuencia promueve la misma intención, para el caso de la Geometría, los y las estudiantes indagan información acerca de lo que conocen o tienen a su alrededor.

Tanto la participación individual como grupal de estudiantes, fomenta la búsqueda de una solución a un problema y se realiza mediante el "compartir información", es decir, los y las estudiantes se involucran con el problema y entre ellos ofertan una solución apoyada a través de una estrategia, los que se pueden dar a través de dibujos, diagramas, etc. Es por ello que la en la Secuencia se ofertan problemas y actividades, para ser trabajados, a través del software

GEOGEBRA, que presentan herramientas interactivas y de fácil entendimiento para el usuario.

La observación que realizan los y las estudiantes permiten al profesor o la profesora promover preguntas guías que redirijan la atención hacia una estrategia que se ajuste a la respuesta,

Por lo tanto, una de las características especiales que brinda la secuencia es permitir al estudiante ser parte del problema, en este caso de geometría, puesto que al dar una respuesta, se está promoviendo las habilidades de Representar, Modelar, Argumentar y Comunicar, y que al complementarse resulta, Resolver Problemas, mediante las estrategias que presenta el estudiante, al interactuar con sus compañeros y compañeras, para dar explicación, sobre el fundamento de su respuesta, a través de dibujos, la manipulación de herramientas geométricas, diagramas, etc.

4. 3. 5. ¿Cómo se trabaja el Modelo Van Hiele aplicado en la propuesta?

¿Qué ofrece esta secuencia al docente? En cuanto a los y las profesoras que impartan la unidad de Geometría, las planificaciones presentadas utilizan las fases del Modelo de Razonamiento geométrico de Van Hiele. Como ya se ha descrito, estas fases son cinco y cada una de ellas presenta una característica importante. Al aplicar la primera fase, asegura al docente tener la información necesaria sobre los saberes y conceptos previos que manejan los estudiantes. Esta situación se refleja cuando los estudiantes resuelven o intentan resolver un problema; es por eso que la primera fase recibe el nombre de “información”. Además, en esta primera instancia, el problema queda propuesto para ser trabajado en forma grupal, de esta manera el estudiante comparte su información y la analiza con el resto del equipo para corroborar si la vía de solución es viable o no. Se discuten ideas y se recorre el conjunto de conceptos asociados al tema, se consolidan saberes.

¿Cómo se manifiesta la aplicación de la segunda fase del Modelo? Se manifiesta cuando el profesor realiza preguntas, previamente elaboradas, dirigidas a la comprensión de un concepto. Por ejemplo, en la Figura 3 se muestran dos preguntas y se observa cómo el profesor debe direccionar estas preguntas para que los estudiantes generen el saber geométrico a estudiar. Estas preguntas se derivan de la interacción de una actividad inicial.

Figura 3 Recorte de una actividad de la Secuencia Metodológica

Actividad 2.1: componentes de un vector

- ✓ ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial y del punto final del vector $\vec{u}$? ¿Cuál es la magnitud y dirección del vector $\vec{u}$?
- ✓ Si la coordenada inicial del vector $\vec{u}$ fuese (0, 0) encuentre la coordenada final mediante vector equipolente al vector $\vec{u}$, llamándolo $\vec{u}'$. Argumente la estrategia para encontrar el punto final de $\vec{u}'$ y verifique la congruencia entre $\vec{u}$ y $\vec{u}'$.

La aplicación de la tercera fase consiste en que el estudiante se enfrente a un problema, ya sea grupal como individual, y se apropie de los conceptos estudiados mediante el razonamiento que provoca el uso de un lenguaje técnico adecuado, lo que lo conduce a la solución del problema. En esta etapa, es el profesor quien, al observar las tareas y acciones desarrolladas por los diferentes grupos de trabajos, solicita al estudiante que argumente y comunique cómo llega a la solución del problema planteado, provocando la necesidad de la precisión del lenguaje, con el rigor que exige la explicación clara de un problema y la estrategia de la solución utilizada.

La cuarta fase consiste en “orientación libre”, es aquella en que el estudiante, en forma independiente, debe hacer uso de lo aprendido en las fases anteriores para abordar un nuevo problema y lograr su solución. Por lo tanto, en esta fase el estudiante ya ha adquirido herramientas suficientes para enfrentar un nuevo problema. El diseño de los problemas para esta fase está basado en el conocimiento de las estrategias que facilitan la solución de un problema.

La quinta y última fase, “integración”, no se caracteriza por generar un nuevo conocimiento, sino realizar una mirada desde lo aprendido. Es por eso que, la participación del profesor o profesora, es afianzar el saber para dar inicio al próximo saber, con base sólida, mediante:

- ✓ La discusión que se genera en los estudiantes a partir del intento por resolver un problema propuesto.
- ✓ Planteamiento de actividades que engloben los conceptos tratados en la clase y que provoquen el desempeño independiente de los estudiantes, haciendo uso de una argumentación rigurosa basada en un lenguaje técnico apropiado.

Anteriormente, se realiza una descripción acerca de las características de las fases y su aplicación en la Secuencia Metodológica. El proceso de cada una de las fases aplicada para cada subunidad, es para alcanzar el nivel dos de Razonamiento Geométrico, en los y las estudiantes, los cuales se exponen en la Tabla 7.

Tabla 7 Relación entre el objetivo del Nivel 2 y sus características en cada Subunidad temática.

Subunidad	Objetivo del Nivel 2	Características del Nivel 2
Subunidad 1: Figuras planas en el plano	Deducir algunas propiedades de polígonos a partir de la observación en el plano cartesiano.	El razonamiento geométrico visto en esta subunidad es trabajado a través del: Análisis de los elementos de polígonos en el plano cartesiano. Deducción de la distancia entre dos puntos mediante el teorema de Pitágoras. Deducción del área de figuras planas en el plano.
Subunidad 2: Vectores	Extraer propiedades de los vectores a partir de la observación en el plano cartesiano	El razonamiento geométrico visto en esta subunidad es trabajado a través del: Análisis del concepto de componentes de un vector y su relación en el plano cartesiano. Descripción de una estrategia para multiplicar un vector por un escalar. Descubrimiento de un método para sumar o restar vectores.

Fuente: Elaboración de la Autora.

Continuación Tabla 7.

Subunidad 3: Traslación de figuras geométricas en el plano	Establecer procedimientos que impliquen realizar traslaciones de figuras planas en el plano.	El razonamiento geométrico visto en esta subunidad es trabajado a través del: Reconocimiento de los elementos en una traslación. Relación de las propiedades de traslación con los elementos participantes. Descubrimiento de la composición de dos traslaciones.
Subunidad 4: Reflexión de figuras geométricas en el plano	Establecer procedimientos que permitan facilitar el ejercicio de realizar reflexiones, según un eje de simetría, en figuras planas en el plano cartesiano.	El razonamiento geométrico visto en esta subunidad es trabajado a través del: Análisis de las propiedades en una reflexión, tales como perpendicularidad y equidistancia. Descubrimiento de la composición de dos reflexiones.
Subunidad 5: Rotación de figuras geométricas en el plano	Establecer procedimientos que permitan facilitar el ejercicio de realizar rotaciones en diferentes ángulos de figuras planas en el plano cartesiano.	El razonamiento geométrico visto en esta subunidad es trabajado a través del: Reconocimiento de la rotación como un movimiento isométrico. Identificación de los elementos que intervienen en una rotación. Análisis de la composición de rotaciones, a partir de la consideración de ángulos axiales. Generalización de la composición de transformaciones isométricas. Reconocimiento de los símbolos de una rotación y del resto de las transformaciones isométricas.
Subunidad 6: Congruencia de figuras planas	Deducir los criterios de congruencia de triángulos.	El razonamiento geométrico visto en esta subunidad es trabajado a través del: Reconocimiento de dos figuras congruentes. Reconocimiento de propiedades de la congruencia de figuras planas. Descubrimiento de los criterios de congruencia de triángulos.

Fuente: Elaboración de la Autora.

El estudiante aprende a reconocer y analizar las partes de la figura geométrica, los cuales presentan propiedades pero no conecta la figura a la familia o grupo del que pertenece; además, no es capaz de elaborar una definición. No relacionan unas propiedades con otras. Reconoce la propiedad matemática mediante la observación de la figura y sus elementos y deducen otras propiedades mediante la experimentación.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS.

5. 1. Conclusiones

Hay diversos factores que fueron descritos en el planteamiento del problema y observados en la construcción de la secuencia metodológica, como los que se presentan a continuación:

- ✓ El contexto para el desarrollo de una asignatura, parte de conocer el total de horas para su desarrollo semestral o anual, según sea el caso. Y de ahí poder planificar los tiempos para impartir cada una de las unidades de enseñanza, que contiene el programa. El caso de la unidad de Geometría es de 65 horas pedagógicas como parte del programa del Primer Año Medio.
- ✓ Se ha observado que, en la práctica, el desarrollo de las Matemáticas en general, y de Geometría en particular, refleja un aprendizaje memorístico, con énfasis en la actividad mayormente expositiva del profesor o profesora.
- ✓ Existe un sistema de creencias con respecto a las Matemáticas, que se adquiere a medida que la persona crece, e implica una recepción distorsionada del desarrollo de habilidades matemáticas, donde entre otras deficiencias, es posible observar una escasa aplicación de la Geometría.

En la secuencia, que se presenta en este trabajo, se aborda un aspecto metodológico muy importante. El profesor o la profesora, propone el problema, pero no indica cómo resolverlo, sino que, mediante el desarrollo de preguntas, orienta a los estudiantes para que, a través del trabajo en equipos elaboren una estrategia adecuada y coherente para obtener una solución, de modo que la tarea del profesor, o la profesora, es la de guiar y controlar la labor de los equipos de trabajo y, posteriormente, formalizar los conceptos abordados en la solución del problema.

El aprendizaje de las Matemáticas, sin excluir cualquiera de sus ejes, requiere realizar el ejercicio de razonamiento y la aplicación de métodos deductivos. La propuesta de secuencia metodológica elaborada, para la unidad de Geometría, permite esa orientación, a través de las propiedades que se estudian y la forma en cómo se aborda cada uno de los niveles de razonamiento geométrico que presenta el Modelo utilizado.

El trabajo del profesor o la profesora de Matemáticas insta a que los estudiantes aprendan a construir un concepto geométrico mediante la resolución de problemas.

En conclusión, para responder a la pregunta central que orientó la presente investigación, se indica que:

- ✓ Al utilizar el Modelo de Van Hiele y confeccionar las diferentes etapas de las clases (inicio, desarrollo y cierre), se debe trabajar con las cinco fases que determina el modelo, independientemente del nivel asociado al modelo que se trabaje.
- ✓ La unidad de Geometría debe ser organizada en subunidades, para luego determinar cuántas clases serán necesarias para aplicar cada fase del Modelo de Van Hiele.
- ✓ El diseño de problemas y actividades, debe enfocarse a la construcción de un conocimiento, en este caso geométrico, empleando un aprendizaje constructivista.
- ✓ Se debe pensar en la posibilidad que el diseño de las actividades y los problemas sean usados con algún programa computacional. Por ejemplo, en esta investigación, los problemas y actividades pueden ser desarrollados a través del programa GEOGEBRA.

- ✓ Las formas de trabajo deben ser tanto grupales como individuales y así promover y compartir las estrategias de solución empleadas.
- ✓ Se plantea, que el tratamiento que debe realizar el profesor o la profesora, luego de su intervención tutorial y de haber obtenido la solución del problema, es formalizar el aprendizaje logrado, destacando el rigor del lenguaje geométrico presentes en la situación estudiada.

5. 2. Sugerencias

A pesar que esta secuencia está enfocada hacia un cierto grupo de estudiantes, aquellos que cursan el primer año medio, el profesor o profesora, con este estudio, cuenta con una estrategia de enseñanza para elaborar una secuencia metodológica que abarque la unidad de Geometría y que trabaje la resolución de problemas en la clase para el tercer nivel de razonamiento geométrico según el Modelo de Van Hiele.

Aplicar la secuencia metodológica no implica que su efectividad sea óptima y que, por lo tanto, los y las estudiantes aprenderán a resolver problemas de Geometría, sino que hay que considerar los otros factores que están presentes a la hora de impartir una clase, tales como:

- ✓ La motivación del estudiante y la del profesor o profesora.
- ✓ La asistencia y participación de todos los estudiantes junto con a disposición del trabajo en equipo.
- ✓ Que las salas estén acomodadas para realizar un trabajo grupal efectivo y cuente con las facilidades tecnológicas necesarias.
- ✓ El tiempo de duración de cada formalización y cierre de la clase.

El profesor o profesora, debe promover el aprendizaje significativo, y no memorístico, es por eso que se propone que el diseño de los problemas debe tener un enfoque constructivista.

Aquellos profesores y profesoras, que deseen elaborar una Evaluación Diagnóstica, con el fin de obtener información de sus estudiantes sobre el conocimiento y resolución de problemas en Geometría, deben tener presente las siguientes consideraciones:

- ✓ Al seleccionar o diseñar un problema, se busca que la respuesta del estudiante sea lo suficientemente extensa, a la vez resumida, para visualizar por una parte la claridad de sus ideas y, por otra, su capacidad de síntesis.
- ✓ La evaluación debe estar diseñada para conocer la información y el nivel de dominio de los conceptos asociados al tema, que poseen los estudiantes.
- ✓ En caso de querer observar el nivel de razonamiento geométrico de sus estudiantes, tener presente que la rúbrica de respuestas debe considerar a lo menos dos respuestas esperadas, de acuerdo a las características planteadas en los niveles de Van Hiele.

BIBLIOGRAFÍA

Agencia de Calidad de la Educación. (2014). Análisis de los resultados de la Prueba PISA 2012. *Apuntes sobre la Calidad de la Educación*(15).

Algarín, D., & Fiallo, J. (2013). Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. *Revista Científica*, 61-65.

Alsina, C.; Fortuny, J. M. & Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO.* Síntesis, Madrid.

Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de Razonamiento Geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule, Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2*(16), 139-178.

Aravena, M., Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de edución media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias, 1*(34), 107-128. Obtenido de http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1664

Campistrous, L., & Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2*(2-3), 31-45. Obtenido de http://www.redalyc.org/artículo.oa?id=33520304

Campistrous, L., & Rizo, C. (2013). La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático. *La Resolución de Problemas en la Escuela.* Montevideo.

Cruz, M. (2006): La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

educarchile. (27 de diciembre de 2016). *Acerca de nosotros: educarchile.* Obtenido de educarchile web site: http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0029/File/Objetos_Didacticos/TPEmpleabilidad/modulo6/Recursos_conceptuales_RESOLUCION_PROBLEMAS_%20APLICAR_ALTERNATIVAS_DE_SOLUCION.pdf

Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el Modelo de Van Hiele. *Sigma*, 33-57.

Gómez, C. (2005). *El Modelo de Van Hiele en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, tomando como base la ecuación de Riccati.* En Luque, Carlos Julio (Ed.), Memorias XV Encuentro de Geometría y III Encuentro de Aritmética, 97-114. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Goncalvez, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la Geometría? *Revista Ciencias de la Educación, 1*(27), 83-96.

Guillén, G. (2004). El Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16*(3), 103-125. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516306

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1989). Bibliografía sobre el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele. *Enseñanza de la Ciencias, 7*(1), 89-96.

Gutiérrez, A. & Jaime, A., (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.). Teoría y práctica en educación matemática (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Disponible en <www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1991). El Modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática, 3*(2), 49-95.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática.* Colombia: una empresa docente.

Hernández V. y Villalba, M. (2001). Perspectiva en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI. PRIME-UNISION. Traducción del documento original. Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/articles2.htm

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación* (Quinta ed.). México: Mc Graw Hill.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (1991). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw-HILL.

Hiele, P. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education.* Londres: Academic Press.

Ibarra, T., Sucerquia, E., & Jaramillo, C. (2013). El concepto de proporcionalidad en el contexto del Modelo de Van Hiele. *Revista Científica*, 236-239.

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. (Tesis inédita de doctorado). Universidad de Valencia, Valencia.

Laurito, F., & Valdivié, C. (2011). Razonamiento geométrico en la resolución de problemas de conjeturación y demostración utilizando el Cabri Géométre II. *Revista educare, 15*(2), 3-22.

López, F. (2013). Didáctica de la geometría: análisis de la enseñanza de la geometría a partir de un estudio de campo según el Modelo de Van Hiele (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Ministerio de Educación. (2011). *Programa de Estudio para Primer Año Medio .* Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación, Santiago.

Ministerio de Educación. (2013). *Bases Curriculares 7° y 8° Básico 1° y 2° Medio.* Santiago.

Ministerio de Educación. (2014). *Orientaciones e Instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y Final en Resolución de Problemas. 1er.* Santiago: Salesianos Impresores S.A.

Miniterio de Educación. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media.* Santiago.

Molero, M., & Cierva, J. (s.f.). ¿Cómo resolver problemas de Geomtetría? *Un Paseo por la Geometría*, 117-146.

Perales, F. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las ciencias, 11*(2), 170-178.

Perdomo-Díaz, J., & Felmer, P. (s.f.). *El taller RPaula: Activando la Resolución de Problemas en las Aulas.* Universidad de Chile, Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE).

Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical model. Recuperado desde https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf

Restrepo, U., Zapata, S. & Jaramillo, C. (2012). *Una aproximación al teorema de Pitágoras en el contexto de Van Hiele.* En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 537-542). Medellín: Gaia.

Van Hiele, P. (1999). Desarrollar un pensamiento geométrico a través de actividades que comienzan con el juego. *La enseñanza de las matemáticas de los niños, 5*(6), 310.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El Modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. *UNICIENCIA, 27*(1), 74-94.

Zambrano, M. (2006). El razonamiento geométrico y la teoría de Van Hiele. *Kaleidoscopio, 3*(5), 28-33.

ANEXOS

ANEXO 1: Evaluación Diagnóstica de Geometría

Geometría

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA- 1°Año de Enseñanza Media

Contenidos a observar:

- ✓ Caracterización del plano cartesiano.
- ✓ Ubicación de puntos y figuras en el plano cartesiano e identificación de las coordenadas de los vértices de polígonos dibujados en él.
- ✓ Vectores en el plano cartesiano.
- ✓ Aplicación de transformaciones isométricas y composiciones de ellas en el plano cartesiano.
- ✓ Concepto de congruencia.
- ✓ Criterios de congruencia en triángulos.
- ✓ Aplicaciones de los criterios de congruencia.

Continuación ANEXO 1.

1. De acuerdo a la figura 1, ¿cuál(es) es (son) polígono(s)? Argumente su respuesta.

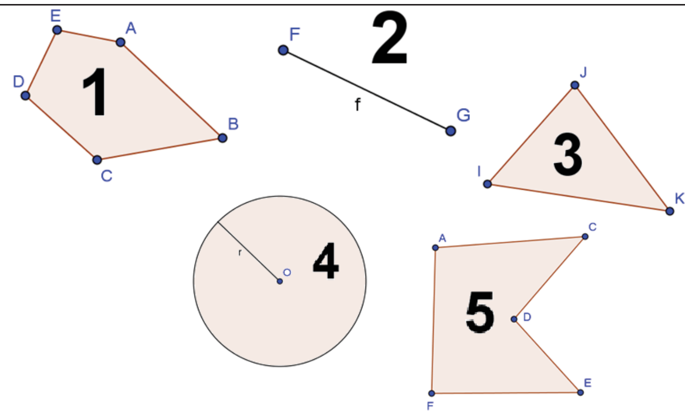
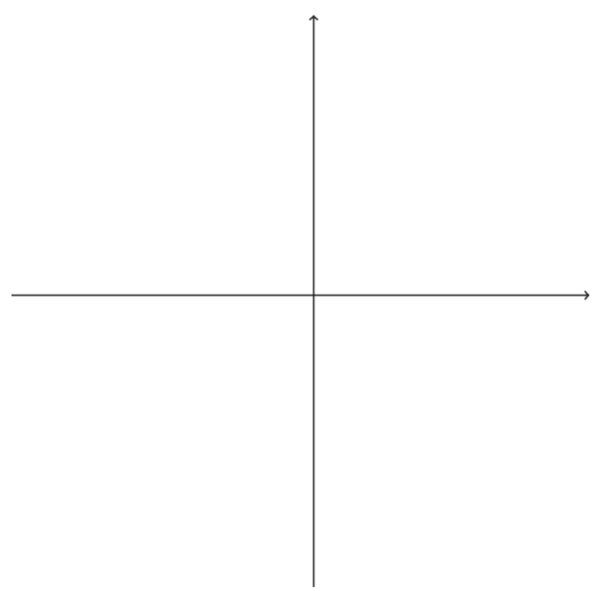


Figura 1

Argumente aquí.

2. Represente en una misma gráfica los siguientes elementos.

Eje de Ordenada
B(1, 0)
A(2, -3)
Cuadrantes I, II, III y IV
Punto de Origen O.
Eje de Abscisa



Continuación ANEXO 1.

3. **¿Cuál es el vector $\vec{u}$ de traslación aplicado al segmento $\overline{AB}$ (ver Figura 2)? Argumente la elección del vector escogido.**

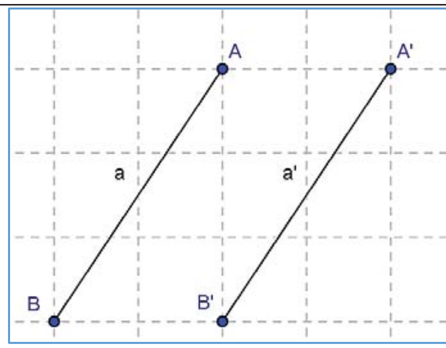
<table>
<tr><td>

Figura 2</td><td>Argumente aquí.</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué más conoce de un vector?</td></tr>
</table>

4. **Se presenta la trayectoria de un auto (ver Figura 4) ubicado en $A(-4,3)$ que se dirige hasta $D(-1,0)$.**

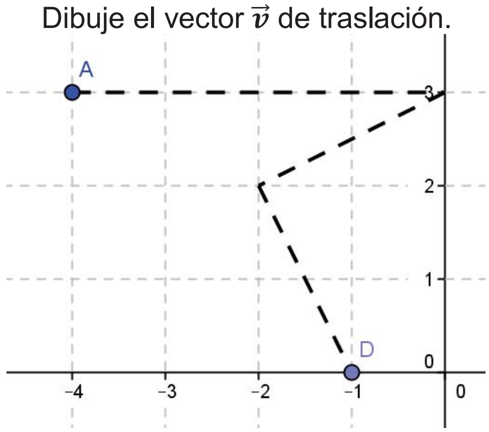
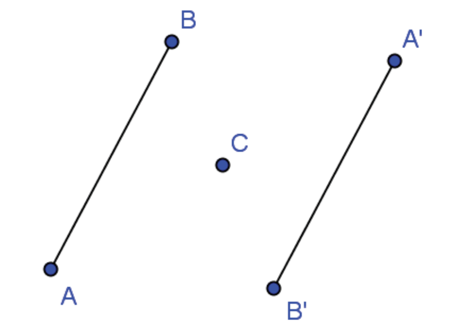
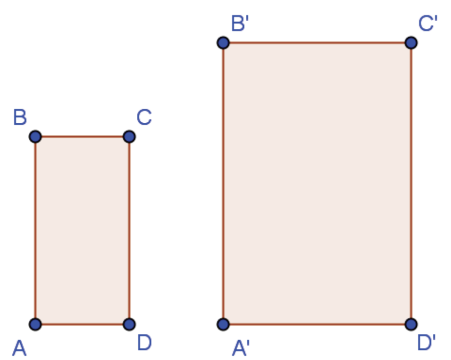
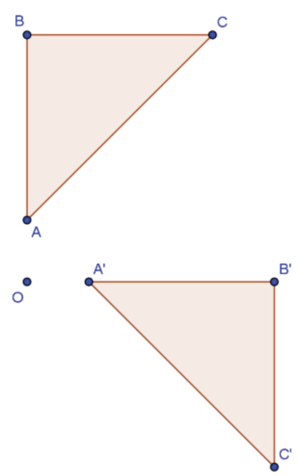
<table>
<tr><td>Dibuje el vector $\vec{v}$ de traslación.


Figura 3</td><td>¿Cuáles son sus componentes?</td></tr>
</table>

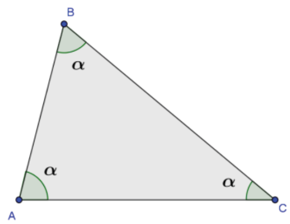
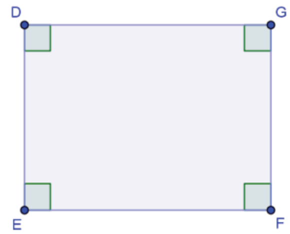
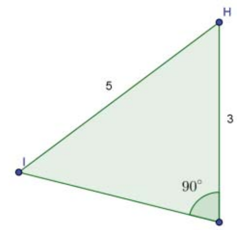
Continuación ANEXO 1.

5. De acuerdo a las figuras 5, 6 y 7, ¿qué isometría se presenta en cada una de ellas? Argumente tu respuesta.

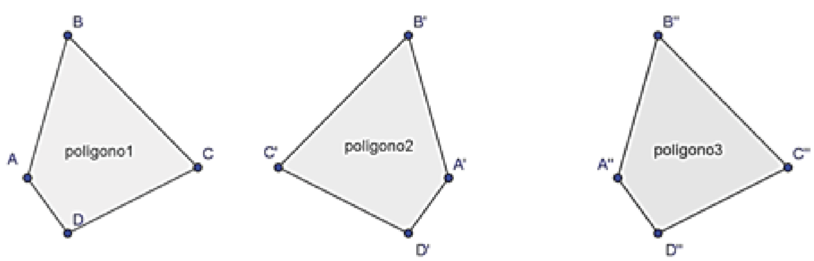
 *Figura 4*	**Argumente aquí.**
 *Figura 5*	**Argumente aquí.**
 *Figura 6*	**Argumente aquí.**

Continuación ANEXO 1.

6. **De acuerdo a los datos planteados por las figuras 8, 9 y 10, ¿qué nombre(s) recibe cada polígono? Argumente su respuesta.**

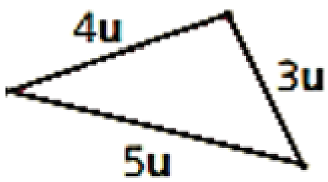
 *Figura 7*	 *Figura 8*	 *Figura 9*
Argumente aquí.	Argumente aquí.	Argumente aquí.

7. **Reconoce la(s) isometría(s) aplicada al polígono 1 para generar 3 (ver figura 11). Argumente su respuesta.**

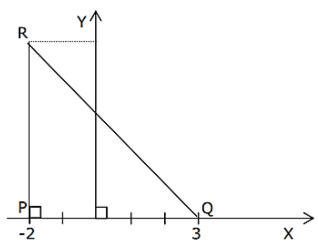
 *Figura 10*
Argumente aquí.

Continuación ANEXO 1.

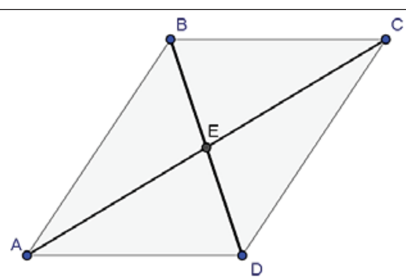
8. De acuerdo a la Figura 12 y considerando $u > 0$, ¿es el triángulo, un triángulo rectángulo? Argumente su respuesta.

 *Figura 11*	Argumente aquí.

9. Si el área del triángulo PQR es $15\,cm^2$ (ver figura 13). Entonces, ¿cuál es la coordenada del punto R? Argumente su respuesta.

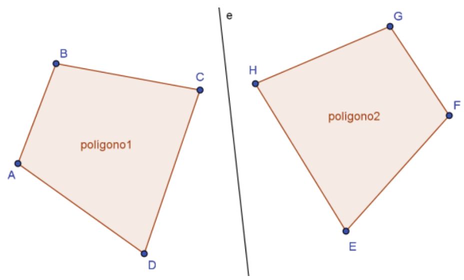
 *Figura 12*	Argumente aquí.

10. La figura ABCD es un rombo (ver Figura 14), $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales de ABCD. ¿Existen triángulos congruentes? De ser sí, ¿cuáles son congruentes? Argumente su elección.

 *Figura 13*	Argumente aquí.

Continuación ANEXO 1.

11. Si $ABCD \cong FGHE$ (ver Figura 15), reconozca los lados homólogos y la isometría aplicada al polígono 1. Argumente su respuesta.

 *Figura 14*	Argumente aquí.

12. En una hoja de papel cuadriculado se habían marcado los cuatro vértices de un cuadrado $A(3;\ 4)$, $B(-1; 1)$ y $C(6, 0)$, pero uno de ellos se ha borrado. Indique las coordenadas del vértice D que falta. Argumente la elección de ese punto.

Represente aquí.	Argumente aquí.

ANEXO 2: Rúbrica de Respuestas Esperadas de la Evaluación Diagnóstica de Geometría.

Pregunta	Respuestas esperadas	
	Nivel 1	**Nivel 2**
1	Selecciona los números 1, 3 y 5 pero no argumenta por qué son polígonos.	Selecciona los números 1, 3 y 5 argumentando que un polígono se compone por un mínimo de tres lados.
2	Representa solo algunos elementos del plano. La ubicación de los puntos A y B, o del origen, no son correctos.	Representa en el plano todos los elementos mencionados.
3	Indica que el segmento AB se ha movido dos unidades hacia la derecha pero no establece las componentes del vector de traslación. No refleja conocimientos sobre el concepto de vector.	Indica el vector de traslación es $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{0})$**.** Menciona que un vector tiene longitud, sentido y dirección. Establece la dirección del vector de traslación así como su longitud.
4	Representa el vector como línea, desde A hasta B. Argumenta que las componentes del vector son los movimientos realizados por el vector como por ejemplo: 3 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo.	Indica que el vector de en su total representación y argumenta que la componente del vector $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{3})$ se obtiene de la diferencia entre el punto final y el inicial realizando la operación de resta de entre los puntos $D(-1,0)$ – $A(-4,6) = \vec{v} = (3,-3)$.
5	Indica las isometrías aplicadas en la figura 5 y 7, pero aclara que en la figura 6 no hay isometría puesto que los polígonos representados en él no son iguales. Menciona la isometría aplicada en la figura 5 y 7 pero no identifica los elementos en cada isometría.	Indica las isometrías generadas en las figuras 5 y 7, planteando los elementos presentes como por ejemplo: el centro de rotación, el ángulo de rotación, punto de reflexión, la distancia desde el centro hacia los vértices de las figuras. Establece que la figura 6 no existe una isometría puesto que los lados homólogos de las figuras no tienen igual medida y por lo tanto estas figura no son congruentes.
6	Indica que la figura 8 es un triángulo escaleno puesto que sus tres lados son distintos. Indica que la figura 9 es un rectángulo puesto que tiene dos lados iguales y los otros dos iguales. Indica que la figura 10 es un triángulo escaleno porque sus tres lados son distintos.	Indica que el polígono de la figura 8 es un triángulo equilátero ya que tiene sus tres ángulos iguales. Indica que la figura 9 puede ser un cuadrado o un rectángulo porque solo se presentan ángulos interiores rectos pero no especifica la medida de los lados. Indica que el polígono de la figura 10 es un triángulo rectángulo puesto que uno de sus ángulos interiores mide 90° y un cateto tiene longitud 4 y la hipotenusa es 5 por lo tanto el otro cateto que falta mide 3 unidades y forman un trío pitagórico.

Continuación ANEXO 2.

7	Solo especifica que la isometría aplicada es una traslación.	Argumenta que la isometría aplicada es una traslación puesto que se obtiene a partir de una composición de dos reflexiones axiales y en la figura se presentan dos reflexiones realizadas en torno a dos ejes, respectivamente.
8	Indica que la figura no es triángulo rectángulo puesto que no hay un ángulo de 90°.	Reconoce que la medida de los lados del triángulo forma un trío pitagórico y para demostrarlo utilizan el teorema de Pitágoras.
9	Representa la medida de uno de los lados del triángulo mediante el conteo de unidades. No establece relaciona el área del triángulo con el uso de la fórmula.	Para encontrar la coordenada menciona la fórmula para obtener el área de un triángulo, luego relaciona los datos presentes en la figura con la fórmula y establece que la altura del triángulo es seis. Por lo tanto la coordenada del punto R es (-2, 6).
10	Argumenta que los triángulos ADE y CDE son congruentes así como los triángulos DEC y AEB son también congruentes. Es decir, estos son congruentes a partir de la representación de la figura.	Indica que el rombo tiene cuatro triángulos que son iguales puesto que un rombo tiene sus 4 lados iguales y las diagonales generadas desde los vértices opuestos forman un ángulo de 90° en la intersección.
11	Indica que existe una reflexión pero no argumenta que existe un eje de simetría y por lo tanto no reconoce los lados homólogos de las figuras congruentes.	Argumenta que los lados homólogos en dos figuras que son congruentes son aquellas que le corresponden lado a lado. (Establece los lados homólogos de las figuras). Indica que la isometría aplicada es un reflexión puesto que los puntos C y H, se encuentran a la misma distancia del eje de simetría *e*, y lo mismo ocurre para el resto de los vértices del cuadrilátero.
12	Sitúa en forma incorrecta las coordenadas del problema haciendo que la representación no sea un cuadrado. Por lo tanto pueda argumentar que no es un cuadrado puesto que sus lados no reflejan igualdad. Ubica correctamente los tres puntos mencionados pero no indica el punto que falta. Indica que la coordenada que falta es (2, -3) y argumenta que los lados de la figura son todos iguales	Indica que la coordenada que falta es (2, -3) y argumenta que los lados de la figura son todos iguales y los ángulos interiores de ese polígono forman un ángulo de 90°, teniendo como resultado un cuadrado. Indica que el punto se obtiene a partir del teorema de Pitágoras, siendo el lado del cuadrado la hipotenusa que solicitan en el problema.

ANEXO 3: Organización de la Secuencia para las Subunidades de Geometría de Primer Año Medio.

MATRIZ DE ORGANIZACIÓN DE LA SECUENCIA METODOLÓGICA PARA LAS SUBUNIDADES DE GEOMETRÍA DE PRIMER AÑO MEDIO

<table>
<tr><th colspan="2">Ítem</th><th>Nivel 2</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Nombre de la Subunidad</td><td>Características Van Hiele</td><td></td></tr>
<tr><td>Objetivos Esperados</td><td>✓
✓
✓</td></tr>
<tr><td>Indicadores de Logros</td><td>✓
✓
✓</td></tr>
<tr><td>Objetivos de clases</td><td>✓
✓
✓</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración de la autora.

ANEXO 4: Modelo de Planificación de Clases utilizado en cada Subunidad de Geometría.

MODELO DE PLANIFICACIÓN DE CLASES

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">NOMBRE DE LA SUBUNIDAD</td></tr>
<tr><td colspan="2"> NIVEL 2 OBJETIVO: de la subunidad a partir del nivel asociado al Modelo de Van Hiele </td></tr>
<tr><td>Indicadores de Logros del nivel</td><td></td></tr>
<tr><td>Objetivos de Clases</td><td>Clase 1:
Clase 2:
Clase 3:</td></tr>
</table>

Continuación ANEXO 4.

SUBUNIDAD 1: TÍTULO

CLASE 1

APLICACIÓN DE LA FASE N°: describir breve características de su aplicación en esta clase.

Objetivo: de la clase.

Inicio de la clase

Problema 1

El diseño del problema busca indagar los conocimientos que los y las estudiantes tienen acerca del concepto inicial que tratará la subunidad. Puede organizar la tarea mediante equipos de trabajos o individualmente.

Desarrollo de la clase

Problema 2: El diseño de este problema para esta parte de la clase, radica en introducir el concepto central que tratará la clase.

Actividad 1: Esta actividad sirve de refuerzo para el concepto central de la clase.

Formalización del contenido: A medida que se realice una actividad o desarrollo de problema, realizar la formalización de la actividad o el concepto estudiado. De esta manera se evita realizar una formalización extendida al cierre de la clase.

Cierre de la clase- metacognición

Formalización del contenido: consiste en sintetizar la información estudiada durante la clase y consolidar los conocimientos cruzados, de información ya adquirida por el estudiante y la nueva información, en cada etapa de la clase.

ANEXO 5: Validaciones por Juicio de Expertos para la Evaluación Diagnóstica

Universidad Austral de Chile

Escuela de Pedagogía en Matemáticas

FICHA de VALIDACIÓN de INSTRUMENTO de INVESTIGACIÓN

JUICIO DE EXPERTO.

SEMINARIO de TITULACIÓN

INDICACIONES:

Considerando su experiencia profesional, solicitamos de usted su validación, del instrumento que ha elaborado el(la) estudiante Katherine Ziliany Santana __________para ser aplicado en el proyecto de Seminario de Investigación que está desarrollando.

Nombre del instrumento: Prueba Diagnóstica de la Unidad de Geometría para el Primer Año de la Enseñanza Media.

Elementos que deben ser considerados para su validación:

a) Rigor en el tratamiento de los contenidos matemáticos.
b) Adecuación de las metodologías utilizadas.
c) Objetividad y aplicaciones esperadas del estudio que se realiza.

[X] **Valido, se sugiere su aplicación.**	[ ] **No valido, debe mejorarse.**
Principales observaciones que sustentan la validación y permiten perfeccionar el instrumento.	Principales observaciones para el mejoramiento del instrumento.

Nombre y Apellido	Carol Asencio González.
Grado académico	(c) magíster Didáctica Mat.
Experiencia docente (años)	7 años

Puerto Montt 19 de diciembre de 2016

Firma

Continuación ANEXO 5.

Universidad Austral de Chile

Escuela de Pedagogía en Matemáticas

FICHA de VALIDACIÓN de INSTRUMENTO de INVESTIGACIÓN
JUICIO DE EXPERTO.
SEMINARIO de TITULACIÓN

INDICACIONES:

Considerando su experiencia profesional, solicitamos de usted su validación, del instrumento que ha elaborado el(la) estudiante Katherine Ziliany Santana Pérez para ser aplicado en el proyecto de Seminario de Investigación que está desarrollando.

Nombre del instrumento: Prueba Diagnóstica de la Unidad de Geometría para el Primer Año de la Enseñanza Media.

Elementos que deben ser considerados para su validación:

a) Rigor en el tratamiento de los contenidos matemáticos.
b) Adecuación de las metodologías utilizadas.
c) Objetividad y aplicaciones esperadas del estudio que se realiza.

[X] **Valido, se sugiere su aplicación.**	[ ] **No valido, debe mejorarse.**
Principales observaciones que sustentan la validación y permiten perfeccionar el instrumento.	Principales observaciones para el mejoramiento del instrumento.

Nombre y Apellido	Luz Marina Corvalan Rodriguez
Grado académico	Magister
Experiencia docente (años)	20

Puerto Montt 19 de Diciembre de 2016

Firma

ANEXO 6: Validaciones por Juicio de Expertos de la Secuencia Metodológica.

Universidad Austral de Chile

Escuela de Pedagogía en Matemáticas

FICHA de VALIDACIÓN de INSTRUMENTO de INVESTIGACIÓN
JUICIO DE EXPERTO.
SEMINARIO de TITULACIÓN

INDICACIONES:

Considerando su experiencia profesional, solicitamos de usted su validación, del instrumento que ha elaborado el(la) estudiante KATHERINE SANTANA PEREZ, para ser aplicado en el proyecto de Seminario de Investigación que está desarrollando.

Nombre del instrumento: Secuencia metodológica de la Unidad de Geometría para el Primer Año de la Enseñanza Media.

Elementos que deben ser considerados para su validación:

a) Rigor en el tratamiento de los contenidos matemáticos.
b) Adecuación de las metodologías utilizadas.
c) Objetividad y aplicaciones esperadas del estudio que se realiza.

[x] **Valido, se sugiere su aplicación.**	[ ] **No valido, debe mejorarse.**
- Existe una adecuada progresión de los contenidos a desarrollar. - Los conceptos y contenidos son tratados con una adecuada rigurosidad. - Los ejercicios van aumentando progresivamente en su complejidad. Pero se hay que plantear otros ejercicios que se basen en situaciones reales, acordes a la realidad de los estudiantes. - Existe un buen uso de las Tic´s en el desarrollo de esta metodología. - Esta secuencia metodológica planteada, desarrolla de manera precisa y completa lo planteado por el modelo de razonamiento geométrico Van Hiele.	Principales observaciones para el mejoramiento del instrumento.

Nombre y Apellido	FERNANDO PATRICIO OSORIO TOLEDO
Grado académico	PROFESOR DE ESTADO EN MATEMATICAS
Experiencia docente (años)	25 AÑOS

Puerto Montt 19 de Diciembre de 2016

Firma

Continuación ANEXO 6.

Universidad Austral de Chile

Escuela de Pedagogía en Matemáticas

FICHA de VALIDACIÓN de INSTRUMENTO de INVESTIGACIÓN
JUICIO DE EXPERTO.
SEMINARIO de TITULACIÓN

INDICACIONES:

Considerando su experiencia profesional, solicitamos de usted su validación, del instrumento que ha elaborado el(la) estudiante Katherine Ziliany Santana Pérez para ser aplicado en el proyecto de Seminario de Investigación que está desarrollando.

Nombre del instrumento: Secuencia metodológica de la Unidad de Geometría para el Primer Año de la Enseñanza Media.

Elementos que deben ser considerados para su validación:

a) Rigor en el tratamiento de los contenidos matemáticos.
b) Adecuación de las metodologías utilizadas.
c) Objetividad y aplicaciones esperadas del estudio que se realiza.

[X] **Valido, se sugiere su aplicación.**	[ ] **No valido, debe mejorarse.**
Principales observaciones que sustentan la validación y permiten perfeccionar el instrumento.	Principales observaciones para el mejoramiento del instrumento.

Nombre y Apellido	Carol Asencio González.
Grado académico	(c) magíster Didáctica Mat.
Experiencia docente (años)	0

Puerto Montt 19 de diciembre de 2016

Firma

Continuación ANEXO 6.

Universidad Austral de Chile

Escuela de Pedagogía en Matemáticas

FICHA de VALIDACIÓN de INSTRUMENTO de INVESTIGACIÓN
JUICIO DE EXPERTO.
SEMINARIO de TITULACIÓN

INDICACIONES:

Considerando su experiencia profesional, solicitamos de usted su validación, del instrumento que ha elaborado el(la) estudiante Katherine Ziliany Santana Pérez para ser aplicado en el proyecto de Seminario de Investigación que está desarrollando.

Nombre del instrumento: Secuencia Metodológica de la Unidad de Geometría para el Primer Año de la Enseñanza Media.

Elementos que deben ser considerados para su validación:

a) Rigor en el tratamiento de los contenidos matemáticos.
b) Adecuación de las metodologías utilizadas.
c) Objetividad y aplicaciones esperadas del estudio que se realiza.

[X] **Valido, se sugiere su aplicación.**	[ ] **No valido, debe mejorarse.**
Principales observaciones que sustentan la validación y permiten perfeccionar el instrumento.	Principales observaciones para el mejoramiento del instrumento.

Nombre y Apellido	Luz Marina Corvalan Rodriguez
Grado académico	Magister
Experiencia docente (años)	20

Puerto Montt 19 de Diciembre de 2016

Firma