



Universidad Austral de Chile

Facultad de Ciencias de la Ingeniería

Escuela de Ingeniería Civil en Obras Civiles

ANALISIS ESTRUCTURAL GLOBAL DE EDIFICIOS

Tesis presentada como parte de
de los requisitos para optar al Título
de Ingeniero Civil en Obras Civiles

Profesor Patrocinante:

Adolfo Castro Bustamante

Ingeniero Civil. M.Sc. Eng. Civil

Profesor Informante:

Ricardo Larsen Hoetz

Ingeniero Civil. MBA UACH

Profesor Informante:

Julio Lopetegui Torres

Ingeniero Civil. Ph.D. Eng. Civil

JORGE ORLANDO MIRANDA VERA

VALDIVIA – CHILE

2010

Dedicado a mis padres y a mi familia en general, por todo el apoyo entregado para finalizar mis estudios, y especialmente a mi hija Camila por todo el amor y motivación que me ha entregado para superarme cada día más.

INDICE GENERAL

Índice General.....	i
Índice Figuras	v
Índice Ecuaciones	xiv
Índice Tablas.....	xviii
Resumen	xix
Summary.....	xix
CAPITULO I Introducción	1
1.1 Planteamiento del Problema	1
1.2 Objetivos.....	2
1.3 Metodología.....	2
CAPITULO II Estado Actual del Conocimiento	3
2.1 Introducción.....	3
2.2 Definiciones.....	3
2.3 Principios Básicos	5
2.4 Suposiciones Generales	6
2.5 El Concepto de Columna Equivalente.....	6
2.6 El Comportamiento Espacial de la Columna Equivalente.....	9
CAPITULO III Tipología de Elementos Resistentes	10
3.1 Muros.....	10
3.1.1 Muros de Corte	10
3.1.2 Muros de Corte Acoplados	10
3.2 Marcos	11
3.2.1 Marcos Empotrados	11
3.2.2 Marcos con Arriostramiento Cruzado.....	11
3.2.2.1 Marcos con Arriostramiento Simple	12
3.2.2.2 Marcos con Arriostramiento Doble.....	12
3.3 Deformaciones Características y Rigidez de Marcos	13

CAPITULO IV Método de Análisis y Carga Crítica según Método de Zalka14

4.1	Introducción.....	14
4.2	Antecedentes para la formulación del Método de Zalka	14
4.2.1	Método Continuo	14
4.2.2	Método Sandwich	16
4.3	Método de Zalka.....	18
4.3.1	Fórmula de Diseño	18
4.4	Análisis de Estabilidad	19
4.4.1	Sistemas Doblemente Simétricos (Cargas Críticas Básicas)	20
4.4.2	Sistemas Asimétricos (Acoplamiento de los Modos Básicos).....	23
4.4.3	Sistema Monosimétrico	24
4.5	Análisis de Frecuencia.....	25
4.5.1	Sistemas Doblemente Simétricos (Frecuencias Naturales Básicas)	26
4.5.2	Sistemas Asimétricos (Acoplamiento de los Modos Básicos).....	30
4.5.3	Sistemas Monosimétricos	31
4.6	Carga Crítica de los Sistemas Resistentes	31
4.6.1	Carga Crítica para Muros de Corte y Núcleos	32
4.6.2	Carga Crítica para Marcos Empotrados	32
4.6.3	Carga Crítica para Muros de Corte Acoplados	34
4.6.4	Carga Crítica para Marcos con Arriostramiento Doble	35
4.7	Muros Equivalentes	37

**CAPITULO V Carga Distribuida, Tensiones máximas y Deformaciones en el
Método de Zalka39**

5.1	Introducción.....	39
5.2	Requisitos de la Normativa Chilena para Carga Distribuida	39
5.2.1	Carga de Viento	39
5.2.2	Carga Sísmica	39
5.3	Modelo de Carga Distribuida para Método de Zalka	42
5.3.1	Deformación de la Columna Equivalente	44
5.3.1.1	Desplazamientos Horizontales	44
5.3.1.2	Rotaciones	45
5.3.2	Deformación del Edificio.....	45
5.3.2.1	Desplazamientos Horizontales.....	45
5.4	Distribución de Carga entre Elementos Resistentes	46
5.4.1	Fuerzas de Corte Máximo.....	46

5.4.2	Momentos Flectores Máximos.....	47
5.4.3	Momentos Torsores	47
5.5	Razón de Carga Crítica Global.....	49
CAPITULO VI Aplicación del Método a 4 casos particulares.....		51
6.1	Introducción.....	51
6.2	Características del Modelo	51
6.3	Caso 1	52
6.3.1	Ingreso de Datos	52
6.3.2	Viento en X	53
6.3.3	Análisis de Estabilidad.....	62
6.3.4	Análisis de Frecuencia	65
6.3.5	Tensiones y Deformación (viento en X)	68
6.3.6	Viento en Y	74
6.3.7	Tensiones y Deformación (viento en Y).....	75
6.4	Caso 2	82
6.4.1	Ingreso de Datos	82
6.4.2	Viento en X	83
6.4.3	Análisis de Estabilidad.....	86
6.4.4	Análisis de Frecuencia	89
6.4.5	Tensiones y Deformación (viento en X)	92
6.4.6	Viento en Y	97
6.4.7	Tensiones y Deformación (viento en Y).....	97
6.5	Caso 3	104
6.5.1	Ingreso de Datos	104
6.5.2	Viento en X	105
6.5.3	Análisis de Estabilidad.....	113
6.5.4	Análisis de Frecuencia	115
6.5.5	Tensiones y Deformación (viento en X)	118
6.5.6	Viento en Y	124
6.5.7	Tensiones y Deformación (viento en Y).....	124
6.6	Caso 4 (Análisis Sísmico).....	132
6.6.1	Ingreso de Datos	132
6.6.2	Sismo en X	136
6.6.3	Análisis de Estabilidad.....	143
6.6.4	Análisis de Frecuencia	145
6.6.5	Tensiones y Deformación (sismo en X)	147

6.6.6	Sismo en Y	154
6.6.7	Tensiones y Deformación (sismo en Y)	154
CAPITULO VII Modelación de algunos casos en SAP2000.....		162
7.1	Introducción.....	162
7.2	Modelación de las Estructuras.....	162
7.3	Ingreso de Datos Edificio Caso 3	162
7.3.1	Periodos y Frecuencias Naturales	165
7.3.2	Ingreso de Fuerzas Estáticas	166
7.3.2.1	Viento en X	167
7.3.2.1.1	Datos de Salida.....	169
7.3.2.2	Viento en Y	170
7.3.2.2.1	Datos de Salida.....	172
7.4	Ingreso de Datos Edificio Caso 4 (Análisis Sísmico)	173
7.4.1	Periodos y Frecuencias Naturales	173
7.4.2	Ingreso de Fuerzas Estáticas	174
7.4.2.1	Sismo en X	174
7.4.2.1.1	Datos de Salida.....	177
7.4.2.2	Sismo en Y	178
7.4.2.2.1	Datos de Salida.....	178
CAPITULO VIII Presentación y Evaluación de Resultados.....		180
8.1	Introducción.....	180
8.2	Análisis de Parámetros de la Columna Equivalente (caso 1 al 3)	180
8.3	Parámetros Globales arrojados por el Método Aproximado (caso 1 al 4).....	182
8.4	Análisis de Parámetros de la Columna Equivalente (caso 3 y 4)	184
8.5	Análisis Comparativo entre ambos Métodos (caso 3 y 4)	186
CAPITULO IX Conclusiones		190
Bibliografía.....		192

Anexos

INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Esquema de edificio con estructuras resistentes y la columna equivalente	6
Figura 2.2	Acoplamiento de modos básicos. a) Asimétrico, b) Monosimétrico, c) Doblemente simétrico.....	9
Figura 3.1	Muro de corte	10
Figura 3.2	Muros de corte acoplados. a) Arreglo típico, b) Deformación de una viga con secciones finales rígidas.....	11
Figura 3.3	Marcos empotrados	12
Figura 3.4	Diferentes tipos de arriostramiento cruzado. a) Simple, b) —c) Doble, d) Continuo, e) —f) Arriostramiento K, g) Arriostramiento knee.....	12
Figura 3.5	Deformaciones características. a) Flexión de altura total de las columnas individuales, b) Flexión de altura total del marco en conjunto, c) Deformación por corte.....	13
Figura 3.6	Deformaciones de corte. a) Deformación de corte total, b) Corte de altura total (continuo), c) Corte a nivel de piso	13
Figura 4.1	Origen del modelo continuo para marcos en apoyo fijo. a) Marco, b) Reemplazo de carga de viga, c) Distribución de la carga sobre la altura, d) Corte de cada viga, e) Columna equivalente	15
Figura 4.2	Parámetro α de carga crítica y α_p para marcos empotrados	16
Figura 4.3	Origen y análisis del modelo de emparedado. a) Marco, b) Emparedado, c) Forma pandeada, d) Sección elemental.....	16
Figura 4.4	Parámetro α_s de carga crítica	18
Figura 4.5	Diagramas de carga, a) Carga en edificio de varios pisos, b) Primera parte de la carga equivalente: carga uniformemente distribuida, c) Segunda parte: fuerza concentrada en la parte superior	21

Figura 4.6	Parámetro de carga crítica α	22
Figura 4.7	Parámetro ε de modo acoplado para el caso monosimétrico.....	25
Figura 4.8	Formas de modo para vibraciones laterales	27
Figura 4.9	Parámetro de frecuencia η	28
Figura 4.10	Formas de modos fundamentales para vibraciones torsionales puras.....	29
Figura 4.11	Deformación de corte de una sección de un piso.....	36
Figura 5.1a)	Carga de viento uniformemente distribuida en edificio de dos pisos	39
Figura 5.1b)	Distribución de cargas horizontales en edificio de dos pisos	40
Figura 5.1c)	Distribución de cargas horizontales sobre pilares y centro de masa en edificio de dos pisos	41
Figura 5.2	Carga distribuida trapezoidal como aproximación de distribución de cargas horizontales F_k	41
Figura 5.3	Carga horizontal de distribución trapezoidal	43
Figura 5.4	La columna equivalente y su carga externa	44
Figura 5.5	Máximos desplazamientos en los puntos A y B	45
Figura 5.6	Factor de fuerza de corte $\eta_{T_{\max}}$ para fuerza de corte máxima, debido a rotación	47
Figura 5.7	Equilibrio torsional de un elemento diferencial.....	48
Figura 5.8	Ubicación del momento torsional máximo de Saint-Venant $M_{t,\max}$ sobre la altura	49
Figura 6.1	Distribución de muros de corte y núcleos en planta de edificio	52
Figura 6.2	Incorporación datos de entrada	54
Figura 6.3	Incorporación características geométricas y de rigidez de muros de corte.....	55
Figura 6.4	Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "Z" Tipol	56
Figura 6.5	Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipol	57
Figura 6.6	Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "U" Tipol	60
Figura 6.7	Datos de salida de características geométricas y de rigidez.....	62
Figura 6.8	Datos de salida de cargas críticas en X e Y.....	63
Figura 6.9	a) Interpolación de valores cercanos a k_s , b) Relación entre k_s y α	63
Figura 6.10	Datos de salida de carga crítica de pandeo torsional puro	64
Figura 6.11	Datos de entrada interpolación de valores cercanos a r_1	64
Figura 6.12	Interpolación de valores cercanos a r_1	64
Figura 6.13	Datos de salida κ y obtención de N_{cr}	65

Figura 6.14	Datos de salida de frecuencias naturales en X e Y	65
Figura 6.15	a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y η	66
Figura 6.16	Datos de salida de frecuencia natural para vibración torsional puro	66
Figura 6.17	Datos de entrada interpolación de valores cercanos a r_1	67
Figura 6.18	Interpolación de valores cercanos a r_1	67
Figura 6.19	Datos de salida κ y obtención de f	67
Figura 6.20	Datos de salida de torque producto de la carga de viento	68
Figura 6.21	Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.....	69
Figura 6.22	Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.....	69
Figura 6.23	Obtención de factor de carga, factor de corte máximo y factor de momento flector máximo	69
Figura 6.24	Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.....	70
Figura 6.25	Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos	70
Figura 6.26	Datos de salida momentos máximos en muros de corte	72
Figura 6.27	Datos de salida de momentos máximos en núcleos	72
Figura 6.28	a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y z/H	73
Figura 6.29	Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.....	74
Figura 6.30	Incorporación datos de entrada	74
Figura 6.31	Datos de salida de torque producto de la carga de viento	75
Figura 6.32	Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.....	76
Figura 6.33	Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.....	76
Figura 6.34	Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.....	77
Figura 6.35	Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos	77
Figura 6.36	Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.....	78
Figura 6.37	Datos de salida de momentos máximos en núcleos	79
Figura 6.38	a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y z/H	80
Figura 6.39	Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.....	80
Figura 6.40	Distribución de muros de corte en planta de edificio.....	82
Figura 6.41	Incorporación datos de entrada	83
Figura 6.42	Incorporación características geométricas y de rigidez de muros de corte	84

Figura 6.43	Datos de salida de características geométricas y de rigidez.....	86
Figura 6.44	Datos de salida de cargas críticas en X e Y.....	87
Figura 6.45	a) Interpolación de valores cercanos a k_s , b) Relación entre k_s y α	87
Figura 6.46	Datos de salida de carga crítica de pandeo torsional puro	88
Figura 6.47	Datos de entrada interpolación de valores cercanos a r_2	88
Figura 6.48	a) Interpolación de valores cercanos a r_2 , b) Relación entre r_2 y \mathcal{E}	89
Figura 6.49	Datos de salida ε y obtención de N_{comb}	89
Figura 6.50	Datos de salida de frecuencias naturales en X e Y	90
Figura 6.51	a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y η	90
Figura 6.52	Datos de salida de frecuencia natural para vibración torsional puro	91
Figura 6.53	Datos de entrada interpolación de valores cercanos a r_2	91
Figura 6.54	a) Interpolación de valores cercanos a r_2 , b) Relación entre r_2 y \mathcal{E}	92
Figura 6.55	Datos de salida ε y obtención de f_{comb}	92
Figura 6.56	Datos de salida de torque producto de la carga de viento	93
Figura 6.57	Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.....	93
Figura 6.58	Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.....	93
Figura 6.59	Obtención de factor de carga, factor de corte máximo y factor de momento flector máximo.....	94
Figura 6.60	Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.....	94
Figura 6.61	Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.....	96
Figura 6.62	Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.....	96
Figura 6.63	Incorporación datos de entrada	97
Figura 6.64	Datos de salida de torque producto de la carga de viento	98
Figura 6.65	Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.....	98
Figura 6.66	Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.....	99
Figura 6.67	Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.....	99
Figura 6.68	Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.....	100
Figura 6.69	a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y z/H	101

Figura 6.70	Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.....	102
Figura 6.71	Distribución de elementos resistentes en planta de edificio.....	104
Figura 6.72	Incorporación datos de entrada	105
Figura 6.73	Incorporación características geométricas y de rigidez de muros de corte.....	106
Figura 6.74	Incorporación características geométricas y de marcos empotrados	107
Figura 6.75	Datos de salida carga crítica y espesor muro equivalente.....	108
Figura 6.76	Incorporación características geométricas y de rigidez de muros ficticios (marcos empotrados)	109
Figura 6.77	Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo1	111
Figura 6.78	Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo3	111
Figura 6.79	Datos de salida de características geométricas y de rigidez.....	113
Figura 6.80	Datos de salida de cargas críticas en X e Y.....	114
Figura 6.81	a) Interpolación de valores cercanos a k_s , b) Relación entre k_s y α	114
Figura 6.82	Datos de salida de carga crítica de pandeo torsional puro	115
Figura 6.83	Datos de salida de carga de oscilación crítica del edificio en X e Y.....	115
Figura 6.84	Datos de salida de frecuencias naturales en X e Y	116
Figura 6.85	a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y η	116
Figura 6.86	Datos de salida de frecuencia natural para vibración torsional puro	117
Figura 6.87	Datos de salida de frecuencias y periodo natural del edificio.....	117
Figura 6.88	Datos de salida de torque producto de la carga de viento	118
Figura 6.89	Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.....	118
Figura 6.90	Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.....	119
Figura 6.91	Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.....	119
Figura 6.92	Datos de salida fuerzas de corte máxima en marcos empotrados	120
Figura 6.93	Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos	120
Figura 6.94	Orientación de los núcleos "T", a) Tipo 1, b) Tipo 3	121
Figura 6.95	Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.....	122
Figura 6.96	Datos de salida de momentos máximos en marcos empotrados	122
Figura 6.97	Datos de salida de momentos máximos en núcleos	123
Figura 6.98	Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.....	123

Figura 6.99	Incorporación datos de entrada	124
Figura 6.100	Datos de salida de torque producto de la carga de viento	125
Figura 6.101	Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.....	125
Figura 6.102	Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.....	125
Figura 6.103	Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.....	126
Figura 6.104	Datos de salida fuerzas de corte máxima en marcos empotrados	127
Figura 6.105	Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos	127
Figura 6.106	Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.....	128
Figura 6.107	Datos de salida de corte máxima en marcos empotrados.....	129
Figura 6.108	Datos de salida de momentos máximos en núcleos	129
Figura 6.109	Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.....	130
Figura 6.110	Distribución de elementos resistentes en planta de edificio.....	132
Figura 6.111	Incorporación datos de entrada para análisis sísmico	135
Figura 6.112	Incorporación datos de entrada	136
Figura 6.113	Incorporación características geométricas y de rigidez de muros de corte.....	137
Figura 6.114	Incorporación características geométricas y de marcos empotrados	137
Figura 6.115	Datos de salida carga crítica y espesor muro equivalente.....	139
Figura 6.116	Incorporación características geométricas y de rigidez de muros equivalentes (marcos empotrados)	140
Figura 6.117	Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo1	141
Figura 6.118	Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo3	142
Figura 6.119	Datos de salida de características geométricas y de rigidez.....	143
Figura 6.120	Datos de salida de cargas críticas en X e Y.....	144
Figura 6.121	a) Interpolación de valores cercanos a k_s , b) Relación entre k_s y α	144
Figura 6.122	Datos de salida de carga crítica de pandeo torsional puro	145
Figura 6.123	Datos de salida de carga de oscilación crítica del edificio en X e Y.....	145
Figura 6.124	Datos de salida de frecuencias naturales en X e Y.....	146
Figura 6.125	a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y η	146
Figura 6.126	Datos de salida de frecuencia natural para vibración torsional puro	147
Figura 6.127	Datos de salida de frecuencias y periodo natural del edificio.....	147
Figura 6.128	Datos de salida de torque producto de la carga de viento	148

Figura 6.129	Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente	148
Figura 6.130	Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación	148
Figura 6.131	Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.....	149
Figura 6.132	Datos de salida fuerzas de corte máxima en marcos empotrados	150
Figura 6.133	Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos	150
Figura 6.134	Orientación de los núcleos “T” a) <i>Tipo 1</i> b) <i>Tipo 3</i>	151
Figura 6.135	Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.....	152
Figura 6.136	Datos de salida de momentos máximos en marcos empotrados	152
Figura 6.137	Datos de salida de momentos máximos en núcleos	153
Figura 6.138	Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.....	154
Figura 6.139	Incorporación datos de entrada	154
Figura 6.140	Datos de salida de torque producto de la carga de viento	155
Figura 6.141	Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente	155
Figura 6.142	Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación	155
Figura 6.143	Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.....	156
Figura 6.144	Datos de salida fuerzas de corte máxima en marcos empotrados	157
Figura 6.145	Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos	157
Figura 6.146	Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.....	158
Figura 6.147	Datos de salida de momentos máximos en marcos empotrados	159
Figura 6.148	Datos de salida de momentos máximos en núcleos	159
Figura 6.149	Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.....	160
Figura 7.1	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de propiedades del material.....	163
Figura 7.2	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Discretización de muros	163
Figura 7.3	Vista en 3D modelo. <i>SAP2000</i>	164
Figura 7.4	Incorporación de cachos rígidos en el modelo. <i>SAP2000</i>	164
Figura 7.5	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ejecución del programa para encontrar los periodos y frecuencias naturales del edificio.....	165
Figura 7.6	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Periodos y frecuencias naturales del edificio	166
Figura 7.7	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Incorporación de diafragma rígido	

	al modelo	166
Figura 7.8	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de carga concentrada de viento en <i>X</i> para los primeros cuatro pisos	167
Figura 7.9	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de carga concentrada de viento en <i>X</i> para el último piso	167
Figura 7.10	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ejecución del programa para cargas estáticas	168
Figura 7.11	Deformación debido a carga de viento en dirección <i>X</i> . <i>SAP2000</i>	168
Figura 7.12	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de carga concentrada de viento en <i>Y</i> para los primeros cuatro pisos	170
Figura 7.13	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de carga concentrada de viento en <i>Y</i> para el último piso	170
Figura 7.14	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ejecución del programa para cargas estáticas	171
Figura 7.15	Deformación debido a carga de viento en dirección <i>Y</i> . <i>SAP2000</i>	171
Figura 7.16	Cuadro de dialogo <i>SAP2000</i> - Ejecución del programa para encontrar los periodos y frecuencias naturales del edificio	173
Figura 7.17	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Periodos y frecuencias naturales del edificio	174
Figura 7.18	Cuadro de dialogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de fuerza sísmica en nivel 1 de la estructura.....	175
Figura 7.19	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de fuerza sísmica en nivel 2 de la estructura.....	175
Figura 7.20	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de fuerza sísmica en nivel 3 de la estructura.....	175
Figura 7.21	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de fuerza sísmica en nivel 4 de la estructura.....	175
Figura 7.22	Cuadro de diálogo <i>SAP2000</i> - Ingreso de fuerza sísmica en nivel 5 de la estructura.....	176
Figura 7.23	Deformación debido a carga sísmica en dirección <i>X</i> . <i>SAP2000</i>	176
Figura 7.24	Deformación debido a carga sísmica en dirección <i>Y</i> . <i>SAP2000</i>	178
Figura 8.1	Cuadro comparativo de las características geométricas y de rigidez de la columna equivalente para cada caso	181
Figura 8.2	Porcentaje de incremento y disminución de parámetros para cada caso	182
Figura 8.3	Cuadro comparativo de parámetros globales entregados por el método aproximado para cada caso.....	184
Figura 8.4	Cuadro comparativo de las características geométricas y de rigidez de la columna equivalente para cada caso	185
Figura 8.5	Porcentaje de incremento y disminución de parámetros para caso cuatro.....	185
Figura 8.6	Cuadro comparativo para centro de corte, centro geométrico y peso total de la estructura para cada caso, entregados por planilla <i>Excel</i> y <i>SAP2000</i>	186

Figura 8.7	Cuadro comparativo de indicadores de desempeño (caso tres) entregados por planilla <i>Excel</i> y <i>SAP2000</i>	187
Figura 8.8	Cuadro comparativo de indicadores de desempeño (caso cuatro) entregados por planilla <i>Excel</i> y <i>SAP2000</i>	188

ANEXO A

Figura A.1	Sección de muro de corte	193
Figura A.2	Sección de núcleo “Z”	194
Figura A.3	Sección de núcleo “T”	195
Figura A.4	a) Elevación de núcleo “U” b) Sección de núcleo “U”.	196
Figura A.5	Sección de núcleo rectangular	197

INDICE DE ECUACIONES

Ecuación (2.1)	Coordenada x del centro de corte en el sistema $\bar{x} - \bar{y}$	7
Ecuación (2.2)	Coordenada y del centro de corte en el sistema $\bar{x} - \bar{y}$	7
Ecuación (2.3)	Sumatoria de los momentos de inercia de los elementos resistentes con respecto a sus ejes centroidales	7
Ecuación (2.4)	Constante de torsión de Saint-Venant	7
Ecuación (2.5)	Constante de alabeo	7
Ecuación (2.6)	Coordenada x y del centro de corte del i -ésimo elemento resistente en el sistema $x - y$	8
Ecuación (2.7)	Distancia entre el centro de corte (0) y el centro de la carga vertical (C)	8
Ecuación (2.8)	Radio de giro para planta de edificio rectangular	8
Ecuación (2.9)	Coordenada x e y del centro geométrico de la planta del edificio	8
Ecuación (4.1)	Ecuación diferencial gobernante de la columna equivalente para método continuo	14
Ecuación (4.2)	Intensidad de la carga vertical uniformemente distribuida	14
Ecuación (4.3a)	Condiciones de borde para ecuación diferencial gobernante	15
Ecuación (4.3b)	Condiciones de borde para ecuación diferencial gobernante	15
Ecuación (4.3c)	Condiciones de borde para ecuación diferencial gobernante	15
Ecuación (4.3d)	Condiciones de borde para ecuación diferencial gobernante	15
Ecuación (4.4)	Carga crítica para carga uniformemente distribuida (método continuo).....	15
Ecuación (4.5)	Razón de rigidez (método continuo).....	16
Ecuación (4.6)	Ecuación diferencial gobernante de la columna equivalente para método sandwich	17
Ecuación (4.7a)	Condiciones de borde para ecuación diferencial gobernante	17
Ecuación (4.7b)	Condiciones de borde para ecuación diferencial gobernante.....	17
Ecuación (4.7c)	Condiciones de borde para ecuación diferencial gobernante	17
Ecuación (4.7d)	Condiciones de borde para ecuación diferencial gobernante.....	17
Ecuación (4.8)	Carga crítica para carga uniformemente distribuida (método sandwich)	18
Ecuación (4.9)	Razón de rigidez (método sandwich).....	18
Ecuación (4.10)	Carga crítica para carga uniformemente distribuida (método combinado).....	19
Ecuación (4.11)	Factor de combinación	19
Ecuación (4.12)	Razón de carga crítica para combinación de carga vertical	

	uniformemente distribuida.....	19
Ecuación (4.13)	Ecuación diferencial gobernante (análisis de estabilidad)	19
Ecuación (4.14)	Ecuación diferencial gobernante (análisis de estabilidad)	19
Ecuación (4.15)	Ecuación diferencial gobernante (análisis de estabilidad)	19
Ecuación (4.16)	Cargas críticas para carga uniformemente distribuida en las direcciones principales (caso doblemente simétrico).....	20
Ecuación (4.17)	Factor de reducción.....	20
Ecuación (4.18)	Carga crítica uniformemente distribuida por pandeo torsional puro (caso doblemente simétrico)	21
Ecuación (4.19)	Parámetro de torsión modificado	21
Ecuación (4.20)	Parámetro de torsión	21
Ecuación (4.21)	Determinante que define el acoplamiento de modos básicos	23
Ecuación (4.22)	Ecuación cúbica generada por determinante.....	23
Ecuación (4.23)	Coefficientes de ecuación cúbica	23
Ecuación (4.24)	Coefficientes de ecuación cúbica	23
Ecuación (4.25)	Parámetros de excentricidad de la carga	23
Ecuación (4.26)	Razón de carga crítica para modo acoplado.....	24
Ecuación (4.27)	Obtención de carga crítica (modo acoplado conocido).....	24
Ecuación (4.28)	Carga crítica de oscilación-torsión combinada (caso monosimétrico)	24
Ecuación (4.29)	Coefficientes de carga crítica	24
Ecuación (4.30)	Ecuación diferencial gobernante (análisis de frecuencia).....	25
Ecuación (4.31)	Ecuación diferencial gobernante (análisis de frecuencia).....	25
Ecuación (4.32)	Ecuación diferencial gobernante (análisis de frecuencia).....	25
Ecuación (4.33)	Densidad de la masa por unidad de volumen del material del edificio	26
Ecuación (4.34)	Frecuencia angular para vibración en las direcciones principales	26
Ecuación (4.35)	Relación entre frecuencia natural y frecuencia angular	26
Ecuación (4.36)	Frecuencia natural en las direcciones principales	26
Ecuación (4.37)	Primera frecuencia natural en las direcciones principales	27
Ecuación (4.38)	Primer periodo natural en las direcciones principales	27
Ecuación (4.39)	Factor de reducción para análisis de frecuencia.....	28
Ecuación (4.40)	Fórmula general de frecuencia natural de vibración torsional pura.....	28
Ecuación (4.41)	Frecuencia natural de vibración torsional pura (para $k > 1000$)	28
Ecuación (4.42)	Determinante que define el acoplamiento de modos básicos	30
Ecuación (4.43)	Ecuación cúbica generada por determinante.....	30
Ecuación (4.44)	Coefficientes de ecuación cúbica	30
Ecuación (4.45)	Coefficientes de ecuación cúbica	30
Ecuación (4.46)	Parámetros de excentricidad de la carga	30

Ecuación (4.47)	Razón de frecuencia (modo acoplado).....	31
Ecuación (4.48)	Frecuencia fundamental combinada (lateral-torsional).....	31
Ecuación (4.49)	Frecuencia lateral-torsional combinada (caso monosimétrico)	31
Ecuación (4.50)	Razón de frecuencia (caso monosimétrico)	31
Ecuación (4.51)	Carga crítica uniformemente distribuida para muros de corte y núcleos	32
Ecuación (4.52)	Carga crítica de flexión local para marcos empotrados	32
Ecuación (4.53)	Rigidez de flexión.....	32
Ecuación (4.54)	Carga crítica de flexión global para marcos empotrados.....	32
Ecuación (4.55)	Rigidez de flexión.....	33
Ecuación (4.56)	Segundo momento de área global de columnas para marcos empotrados.....	33
Ecuación (4.57)	Carga crítica global de corte para marcos empotrados	33
Ecuación (4.58)	Carga crítica local de corte para marcos empotrados	33
Ecuación (4.59)	Carga crítica de corte para marcos empotrados	33
Ecuación (4.60)	Carga crítica para marcos empotrados.....	33
Ecuación (4.61)	Carga crítica global de corte para muros de corte acoplados.....	34
Ecuación (4.62)	Carga crítica local de corte para muros de corte acoplados.....	34
Ecuación (4.63)	Carga crítica de corte para muros de corte acoplados.....	34
Ecuación (4.64)	Carga crítica para muros de corte acoplados	34
Ecuación (4.65)	Factor de combinación.....	35
Ecuación (4.66)	Razón de rigidez modificada.....	35
Ecuación (4.67)	Razón de rigidez modificada (modelo sandwich).....	35
Ecuación (4.68)	Desplazamiento angular para marcos con arriostramiento doble	35
Ecuación (4.69)	Desplazamiento angular.....	35
Ecuación (4.70)	Rigidez de corte para marcos.....	36
Ecuación (4.71)	Desplazamiento lateral para marcos con arriostramiento doble	36
Ecuación (4.72)	Rigidez de corte para marcos con arriostramiento doble.....	36
Ecuación (4.73)	Carga crítica para marcos con arriostramiento simple o doble.....	36
Ecuación (4.74)	Carga crítica uniformemente distribuida (muros equivalentes).....	37
Ecuación (4.75)	Espesor muro equivalentes	37
Ecuación (5.1a)	Rigidez de corte para marcos con arriostramiento doble.....	40
Ecuación (5.1b)	Fuerza resultante carga sísmica.....	41
Ecuación (5.1c)	Intensidad de carga uniformemente distribuida	41
Ecuación (5.1d)	Intensidad de carga triangular	42
Ecuación (5.2)	Carga horizontal de distribución trapezoidal	42
Ecuación (5.3)	Razón de función de carga	42
Ecuación (5.4)	Componente X de la carga horizontal	43

Ecuación (5.5)	Componente Y de la carga horizontal	43
Ecuación (5.6)	Torque distribuido.....	43
Ecuación (5.7)	Torque distribuido (diferente expresión)	43
Ecuación (5.8)	Momento torsional de la parte uniforme de la carga	43
Ecuación (5.9)	Desplazamientos horizontales en la dirección X	44
Ecuación (5.10)	Desplazamientos horizontales en la dirección Y	44
Ecuación (5.11)	Funciones auxiliares.....	44
Ecuación (5.12)	Funciones auxiliares de carga	44
Ecuación (5.13)	Desplazamientos horizontales máximos en la dirección X	45
Ecuación (5.14)	Desplazamientos horizontales máximos en la dirección Y	45
Ecuación (5.15)	Rotación máxima	45
Ecuación (5.16)	Desplazamientos horizontales adicionales en la dirección X e Y	45
Ecuación (5.17)	Desplazamientos horizontales admisibles en los ejes principales	46
Ecuación (5.18)	Componente X de las fuerzas máximas de corte del i -ésimo elemento resistente	46
Ecuación (5.19)	Componente Y de las fuerzas máximas de corte del i -ésimo elemento resistente	46
Ecuación (5.20)	Factor de fuerza de corte máximo.....	46
Ecuación (5.21)	Componente X del momento flector máximo del i -ésimo elemento resistente	47
Ecuación (5.22)	Componente Y del momento flector máximo del i -ésimo elemento resistente	47
Ecuación (5.23)	Factor de momento flector máximo.....	47
Ecuación (5.24)	Parte de momento torsor de Saint-Venant del i -ésimo elemento resistente	47
Ecuación (5.25)	Parte de momento torsor de alabeo del i -ésimo elemento resistente	48
Ecuación (5.26)	Sumatoria de momento torsor de Saint-Venant y momento torsor de alabeo	48
Ecuación (5.27)	Momento torsor de Saint-Venant.....	48
Ecuación (5.28)	Momento torsor de alabeo	48
Ecuación (5.29)	Torque total.....	48
Ecuación (5.30)	Momento torsional de alabeo máximo.....	49
Ecuación (5.31)	Razón de carga crítica global	49
Ecuación (5.32)	Carga vertical total	49
Ecuación (5.33)	Razón de carga crítica global máxima	50
Ecuación (6.1)	Módulo de elasticidad del material	51
Ecuación (6.2)	Módulo de corte del material	51

INDICE DE TABLAS

Tabla 7.1	Deformaciones máximas y rotación debido a carga de viento en dirección X (<i>SAP2000</i>).....	169
Tabla 7.2	Parámetros globales debido a cargas de viento en dirección X , coordenadas de centro geométrico y de corte. (<i>SAP2000</i>)	170
Tabla 7.3	Deformaciones máximas y rotación debido a carga de viento en dirección Y (<i>SAP2000</i>).....	172
Tabla 7.4	Parámetros globales debido a cargas de viento en dirección Y , coordenadas de centro geométrico y de corte. (<i>SAP2000</i>)	172
Tabla 7.5	Obtención de fuerzas horizontales sísmicas según <i>NCh 433 Of.96</i>	174
Tabla 7.6	Deformaciones máximas y rotación debido a carga sísmica en dirección X (<i>SAP2000</i>).....	177
Tabla 7.7	Parámetros globales debido a cargas sísmicas en dirección X , coordenadas de centro geométrico y de corte. (<i>SAP2000</i>)	177
Tabla 7.8	Deformaciones máximas y rotación debido a carga sísmica en dirección Y (<i>SAP2000</i>).....	179
Tabla 7.9	Parámetros globales debido a cargas sísmicas en dirección Y , coordenadas de centro geométrico y de corte (<i>SAP2000</i>)	179
ANEXO B		
Tabla 4.1	Factor de reducción r_s	199
Tabla 4.2	Parámetro de carga crítica α para marcos en apoyos empotrados	199
Tabla 4.3	Parámetro α_s de carga crítica para columnas sándwich	200
Tabla 4.4	Parámetro de carga crítica	201
Tabla 4.5	Parámetro ε de modo acoplado para el caso monosimétrico	202
Tabla 4.6	Factores para las primeras tres frecuencias naturales.....	203
Tabla 4.7	Factor de reducción r_f	203
Tabla 4.8	Parámetro de frecuencia η	204
Tabla 4.9	Segundo parámetro de frecuencia natural η_2	205
Tabla 4.10	Tercer parámetro de frecuencia natural η_3	206
Tabla 5.1	Factor de fuerza de corte máximo $\eta_{T_{\max}}$	207
Tabla 5.2	Factor de momento flector máximo $\eta_{M_{\max}}$	208
Tabla 5.3	Ubicación del momento torsional máximo de Saint-Venant $M_{t,\max}$ sobre la altura.....	209

RESUMEN

Esta Tesis muestra la aplicación de un método aproximado mediante ejemplos numéricos, con el fin de obtener ciertos parámetros que definen el desempeño global de la estructura bajo sollicitaciones de cargas externas. Este método analítico está basado en la aplicación del concepto de columna equivalente y demuestra que el análisis de estabilidad, tensiones y frecuencias pueden ser relacionados mediante la razón de carga crítica.

Posteriormente, se llevó a cabo un estudio comparativo entre dicho método (aproximado) y un método exacto, basado en el análisis de elementos finitos (*SAP2000*), todo esto con el fin de evaluar el nivel de aproximación del método analítico.

SUMMARY

This Thesis shows the application of an approximate method by means of numeric examples, in order to obtain certain parameters that define the global performances of the structure under requests of external loads. This analytic method is based on the application of the concept of equivalent column and demonstrates that the stability, stress and frequency analysis can be related by means of the reason of critical load.

Then, is carried out a comparative study between this method (approximate) and an exact method, based on the finite elements analysis (*SAP2000*), all this in order to evaluate the approximation level of the analytic method.

CAPITULO I

Introducción

1.1 Planteamiento del Problema

El proceso de diseño convencional es normalmente basado en el análisis estructural local de elementos individuales (columnas, vigas, losas de piso, muros de corte, etc.). Esto es lógico, ya que el sistema estructural está conformado de elementos individuales. Sin embargo, investigación teórica, pruebas a pequeña y gran escala, fallas (y en algunos casos la falta de fallas) en sistemas estructurales han indicado que estructuras complejas no pueden ser consideradas simplemente como una colección de elementos individuales. La respuesta de la estructura en términos globales es a menudo más que la suma de las respuestas de los elementos individuales, ya que la integridad estructural asegura que los elementos trabajan en conjunto en un sistema correctamente diseñado y la estructura desarrolla cierta respuesta global a través de la interacción compleja de sus elementos.

El método de análisis estructural local se basa principalmente en elementos finitos, que pese a ser un método más exacto, muchas veces puede resultar un problema, debido a la gran cantidad de datos a manejar, a la complejidad de los resultados que pueden ser difíciles de interpretar, etc., y esto puede conducir a una fuente de errores. Otra desventaja de este método es que la importancia de los elementos estructurales claves, es a veces oculta detrás del gran número de datos de entrada y de salida. Es por esto que en la presente tesis, se quiere dar a conocer un método aproximado que aborda el análisis estructural de un edificio de forma global, y que se basa en procedimientos analíticos. Un método aproximado bueno depende de las características estructurales más importantes e ignora éstos que no tienen ninguna influencia real en la respuesta de la estructura. Esto es por lo tanto simple, rápido y ofrece una visión clara del comportamiento estructural. (Zalka, 2000).

Ambas aproximaciones local y global son importantes, ya que estos métodos se complementan mutuamente, ambos procedimientos tienen su propia significación. En el proceso de diseño, las características estructurales principales son a menudo establecidas usando un método aproximado. Dependiendo de los resultados del método aproximado, un procedimiento exacto puede llevar a la solución estructural final. (Zalka, 2000).

Como las teorías detrás los métodos exactos y aproximados son a menudo diferentes, los resultados del análisis aproximado pueden ser usados como chequeo independiente de los resultados del método exacto. Cuando los dos conjuntos del resultado muestran el mismo comportamiento estructural, es una indicación fuerte que los resultados son correctos. Este respaldo es importante para el diseñador estructural, ya que a veces no es fácil de detectar un error con el análisis exacto donde miles de datos están involucrados. (MacLeod, 1995).

1.2 Objetivos.

Generales:

- Aplicar y evaluar mediante algunos ejemplos numéricos, el método analítico presentado en el libro “Global Structural Analysis of Buildings” de Karoly A. Zalka.

Específicos:

- Comparar los resultados obtenidos entre el método analítico y un método exacto para un caso puntual.
- Verificar si los resultados obtenidos con el método analítico pueden ser empleados para chequear los resultados obtenidos por un método exacto.
- Comprender la importancia de la razón de carga crítica, la cual puede ser usada para llevar a cabo soluciones estructurales óptimas.

1.3 Metodología.

Se procederá a elaborar una planilla en *Excel*, ingresando las fórmulas y procedimientos basados en el concepto de columna equivalente. Luego, el estudio se dividirá en dos fases.

En primer lugar, se aplicará el método analítico (aproximado) a tres edificios de similares características geométricas y de material pero que se diferenciarán tanto por la distribución, como por el tipo de elementos resistentes (muros de corte, marcos empotrados, núcleos), que contribuirán a proporcionar rigidez lateral y torsional a la estructura frente a la carga de viento considerada. Cabe señalar que el primer caso será el más sencillo en cuanto a estructuración. En las estructuras siguientes se incorporarán o reubicarán elementos resistentes para mejorar el comportamiento global de la estructura, hecho que debería reflejarse en la razón de carga crítica.

En una segunda fase, se tomará la estructura más estable de las tres anteriores y se modelará en el programa *SAP2000*, a fin de comparar parámetros globales como: desplazamientos máximos, ángulo de rotación, fuerzas de corte y momentos globales del sistema. También se aplicará el método analítico a una estructura adicional, sometida a solicitaciones sísmicas y paralelamente se modelará en *SAP2000*, para comparar los parámetros ya mencionados.

CAPITULO II

Estado Actual del Conocimiento

2.1 Introducción

Con el uso extendido de elementos estructurales más esbeltos y materiales ligeros, y con la demanda creciente para estructuras más económicas, el diseño para la estabilidad ha llegado a ser más y más importante. Al reconocer esta tendencia, los métodos y procedimientos presentados en esta tesis, para la tensión, estabilidad y los análisis dinámicos son asociadas en conjunto a través de carga global crítica, el cual también muestra ser un indicador de ejecución genérico. (Zalka, 2000).

Con el creciente avance informático, hay quienes han aprovechado este desarrollo para la creación de softwares destinados al diseño y cálculo estructural, por otra parte, la presión en la oficina por producir más y más rápidamente, ha contribuido en parte a que el diseñador dependa cada vez más de estos softwares, y no dé cabida al razonamiento analítico de un problema determinado.

Algunos podrían decir que no es realmente importante para el diseñador comprender la teoría detrás del análisis ya que la computadora sabe todo de cualquier modo. La tendencia en los últimos veinte años indica que el conocimiento general de la generación joven con respecto al comportamiento estructural básico es menos que satisfactorio. Brohn *et al* (1977).

Es por eso que esta tesis esta enfocada al desarrollo analítico como método complementario al método tradicional de diseño.

2.2 Definiciones

A continuación se definirá una serie de conceptos básicos para una mayor comprensión del tema:

- *Estructura resistente*: la estructura resistente de un edificio comprende el conjunto de elementos que se han considerado en el cálculo como colaboradores para mantener la estabilidad de la obra frente a todas las sollicitaciones a que pueda quedar expuesta durante su vida útil.
- *Nivel basal*: plano horizontal en el cual se supone que se ha completado la transferencia de las fuerzas horizontales entre la estructura y el suelo de fundación. A partir de este nivel se mide la altura y el número de pisos del edificio.

- *Esfuerzo de corte basal*: esfuerzo de corte producido por la acción sísmica en el nivel basal del edificio.
- *Carga permanente*: acción cuya variación en el tiempo es despreciable en relación a sus valores medios o aquella para lo cual la variación tiende a un valor constante; por ejemplo, peso de los elementos estructurales, instalaciones, recubrimientos, terminaciones, pavimentos, empujes de tierra, líquidos, etc.
- *Sobrecarga de uso*: acción variable en el tiempo que se determina por la función y uso del edificio. Presenta variaciones frecuentes o continuas, no despreciables en relación a su valor medio.
- *Análisis de la columna equivalente*: método de simplificación de un modelo tridimensional a un cantilever simple, mediante procedimientos analíticos, considerando al edificio como un todo.
- *Centro de rigidez*: Punto central de los elementos verticales de un sistema que resiste a las fuerzas laterales. También llamado centro de resistencia.
- *Torsión*: se produce en un edificio sometido a una fuerza externa cuando el centro de rigidez no coincide con el centro de masa o centro de gravedad de un piso.
- *Momento de inercia*: el momento de inercia es una magnitud escalar que refleja la distribución de masas de un cuerpo o un sistema de partículas en rotación, respecto al eje de giro. El momento de inercia sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento.
- *Pandeo*: es un fenómeno de inestabilidad elástica que puede darse en elementos comprimidos esbeltos, y que se manifiesta por la aparición de desplazamientos importantes transversales a la dirección principal de compresión.
- *Pandeo flexional*: Modo de pandeo en el cual un elemento en compresión se flecta lateralmente sin giro ni cambios en su sección transversal.
- *Pandeo torsional*: Modo de pandeo en el cual un elemento en compresión gira alrededor de su centro de corte.

2.3 Principios Básicos

Los elementos estructurales primarios de un edificio son aquellos que soportan y transmiten cargas verticales y horizontales. Las cargas verticales (muerta y viva) son transmitidas a los muros de corte, marcos y columnas, etc., por otro lado las cargas horizontales como el viento y sismos se transmiten a través de las losas de piso a los elementos soportantes de cargas verticales, que a su vez transmiten estas cargas a las fundaciones.

Dichos elementos estructurales se denominan también elementos resistentes del edificio, cuya tarea principal es proporcionar al edificio la rigidez lateral adecuada. Ellos representan un sistema, que será llamado sistema resistente del edificio. (Zalka, 2000).

De los elementos que soportan cargas verticales, los marcos son básicamente responsables de transmitirlos, y la tarea principal de los núcleos es proporcionar la rigidez lateral y de torsión necesarias. Los muros de corte y muros de corte acoplados contribuyen a ambas tareas. Las losas de piso actúan como elementos soportantes de las cargas horizontales y son también responsables de transmitir las cargas tanto verticales como horizontales a los elementos soportantes de dichas cargas. Comparado con los muros de corte, los marcos son más flexibles y a menudo se desprecian cuando la rigidez lateral de un edificio es evaluada. Sin embargo, el efecto de los marcos también tiene que ser tomado en consideración, es por eso, que a modo de aproximación, pueden reemplazarse por muros ficticios. Estos muros ficticios pueden ser incluidos en el análisis, el cual puede ser llevado a cabo de una manera simple cuando el sistema resistente solo compromete muros y núcleos. (Zalka, 2000).

Sometido a cargas externas, un sistema de muros de corte y núcleos pueden desarrollar tres tipos de la deformación: la oscilación en los dos planos principales de inercia y rotación alrededor del centro de corte. Aparte de algunos arreglos simétricos especiales, los tres modos se acoplan resultando un comportamiento combinado de oscilación-torsión. El análisis espacial exacto de estas estructuras es más bien complicado, en parte debido a la interacción entre los sistemas soportantes de la carga horizontal y vertical en parte debido al gran número de elementos envueltos en el análisis. Aplicando la aproximación de columna equivalente, sin embargo, el análisis puede simplificarse y las soluciones pueden ser producidas para las tensiones y deformaciones, la distribución de carga entre los elementos estructurales, las cargas elásticas críticas y las frecuencias naturales. (Zalka, 2000).

2.4 Suposiciones Generales

El concepto de columna equivalente puede ser aplicado a estructuras regulares donde las características tanto geométricas como de rigidez no varían a lo largo de la altura del edificio. Las siguientes condiciones deben cumplirse.

- El material de las estructuras es homogéneo, isotrópico y obedece a la ley de Hooke.
- Las losas de piso son rígidas en su plano y flexible en su plano perpendicular.
- Las estructuras no tienen imperfecciones geométricas, su deformación es pequeña y los efectos de tercer orden de fuerzas axiales es despreciado.
- Las cargas son aplicadas estáticamente y conservan su dirección (fuerzas conservativas).
- La ubicación del centro de corte solo depende de las características geométricas.

2.5 El Concepto de Columna Equivalente

El análisis tridimensional está basado en el análisis de la columna equivalente. La columna equivalente es obtenida por la combinación de muros de corte y núcleos del edificio para formar un cantilever simple. Su rigidez de torsión y de flexión representa al edificio entero. Como la columna equivalente coincide con el centro de corte (centro de rigidez) de los elementos resistentes del edificio, el primer paso es localizar este centro de corte global (0 en Fig. 2.1). Cabe señalar que el centro de rigidez es constante en cada planta del edificio, puesto que el tipo y distribución de los elementos resistentes es el mismo en cada una de ellas.

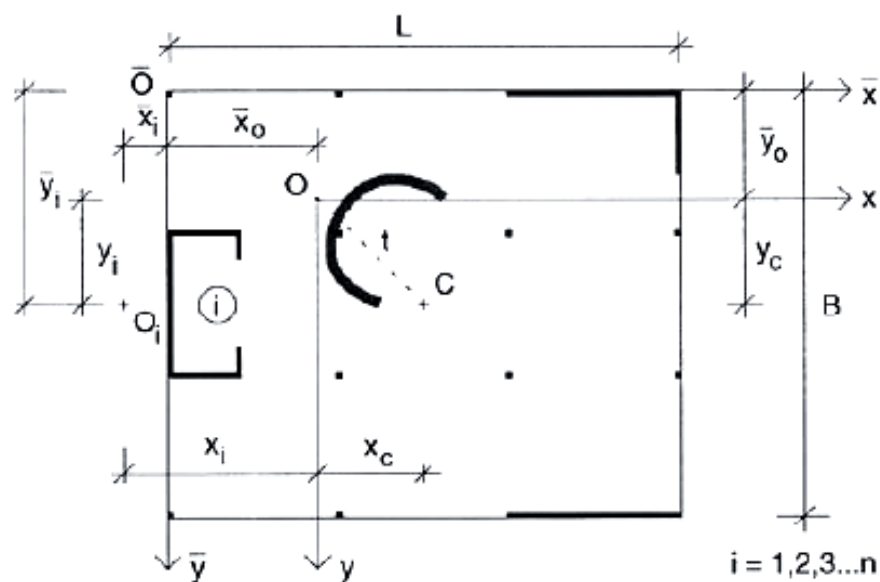


Figura 2.1
Esquema de edificio con estructuras resistentes y la columna equivalente
(Zalka, 2000).

La posición de dicho centro de corte es determinada haciendo uso de las características geométricas básicas y de rigidez de los elementos resistentes. Beck *et al* (1969).

El cálculo es llevado a cabo en el sistema coordenado $\bar{x} - \bar{y}$, cuyo origen se ubica en la esquina superior izquierda de la planta del edificio (Fig. 2.1) y cuyos ejes están alineados con los lados del edificio:

$$\bar{x}_0 = \frac{I_{xy} \left(\sum_1^n I_{y,i} \bar{y}_i - \sum_1^n I_{xy,i} \bar{x}_i \right) - I_y \left(\sum_1^n I_{xy,i} \bar{y}_i - \sum_1^n I_{x,i} \bar{x}_i \right)}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (2.1)$$

$$\bar{y}_0 = \frac{I_x \left(\sum_1^n I_{y,i} \bar{y}_i - \sum_1^n I_{xy,i} \bar{x}_i \right) - I_{xy} \left(\sum_1^n I_{xy,i} \bar{y}_i - \sum_1^n I_{x,i} \bar{x}_i \right)}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (2.2)$$

La sumatoria de los momentos de inercia de los elementos resistentes son características importantes de un edificio en relación con su flexión global. El producto de inercia juega un papel importante al determinar la orientación de los ejes principales del sistema resistente. (Zalka, 2000).

$$I_x = \sum_1^n I_{x,i} \quad I_y = \sum_1^n I_{y,i} \quad I_{xy} = \sum_1^n I_{xy,i} \quad (2.3)$$

donde $i=1\dots n$, y n es el número de elementos resistentes.

Además de las características de flexión anteriores, allí están dos características más de la columna equivalente, que están asociadas con la torsión: la constante de torsión de Saint-Venant (J_i) y la constante de alabeo (I_ω). (Zalka, 2000).

$$J_i = \frac{1}{3} \sum_k t_{i,k}^3 h_{i,k} \quad (2.4)$$

donde J_i es constante de torsión de Saint-Venant del i -ésimo elemento resistente.

$$I_\omega = \sum_1^n (I_{\omega,i} + I_{x,i} x_i^2 + I_{y,i} y_i^2 - 2I_{xy,i} x_i y_i) \quad (2.5)$$

donde $I_{\omega,i}$ es la constante de alabeo y x_i e y_i , son las coordenadas del centro de corte del i -ésimo elemento resistente en el sistema de coordenadas $x - y$.

$$x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_0 \qquad y_i = \bar{y}_i - \bar{y}_0 \qquad (2.6)$$

La constante de torsión de Saint-Venant es la suma de los constantes de torsión de Saint-Venant de los elementos resistentes y se obtiene de una manera similar a los momentos de inercia. La constante de alabeo es una sumatoria calculada en un sistema coordenado cuyo origen es el centro de corte global (Beck *et al* 1968). Para este propósito, después de hacer el uso de la fórmula (2.1) y (2.2), el sistema coordenado $\bar{x} - \bar{y}$, es transferido al sistema coordenado $x - y$, cuyo origen coincide con el centro de corte global y cuyas ejes son paralelos con las ejes \bar{x} e \bar{y} (Fig. 2.1). (Zalka, 2000).

La distancia t entre el centro de corte (0) y el centro geométrico (C) (Fig. 2.1), se calcula

$$t = \sqrt{(x_c^2 + y_c^2)} \qquad (2.7)$$

Asumiendo una carga uniformemente distribuida sobre el plano del edificio, el radio de giro para una planta rectangular es obtenido de:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} \qquad (2.8)$$

donde

L : dimensión de la planta del edificio en dirección X.

B : dimensión de la planta del edificio en dirección Y.

Las coordenadas x_c e y_c son las coordenadas del centro geométrico de la planta del edificio en el sistema de coordenadas $x - y$ en el centro de corte. (Zalka, 2000).

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_0, \qquad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_0 \qquad (2.9)$$

2.6 El comportamiento espacial de la Columna Equivalente

Aparte de ciertos casos especiales, las estructuras de un edificio desarrollan una combinación de los tres modos básicos (desplazamiento en los planos principales y torsión). La naturaleza del comportamiento (y la extensión de la combinación) depende de la posición relativa del centro de corte del sistema resistente y el centro de la carga externa, y para las cargas laterales, la dirección de la carga. (Zalka, 2000).

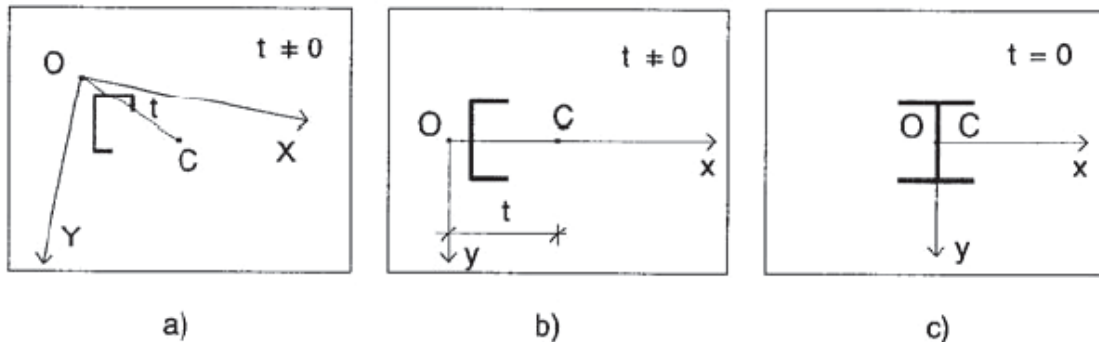


Figura 2.2

Acoplamiento de modos básicos.

a) Asimétrico, b) Monosimétrico, c) Doblemente simétrico.

(Karoly, 2000).

Como puede apreciarse en la Fig. 2.2/a), el centro geométrico (donde actúa el centro de masa del piso) de la planta de edificio C, se mueve en las dos direcciones principales X e Y, y está acoplado por torsión pura.

Cuando el centro C se mueve sobre uno de los ejes principales (Fig. 2.2/b), se desarrolla independientemente de los otros dos modos. La oscilación en la dirección perpendicular a este eje se combina con torsión. Ambas cargas críticas tienen que ser calculadas, la carga crítica independiente en el plano principal y la carga crítica de oscilación-torsión combinada en la dirección perpendicular, y el más pequeño de estas dos es la carga crítica global del edificio. El caso más simple se da cuando el centro de corte y el centro C coinciden (Fig. 2.2/c). La oscilación en las direcciones principales y torsión sobre el centro de corte se desarrolla independientemente. La carga crítica global es la más pequeña de las cargas críticas básicas independientes. (Zalka, 2000).

CAPITULO III

Tipología de Elementos Resistentes

3.1 Muros

Tienen un papel importante en terrenos blandos, en que el periodo predominante del suelo es largo. El muro al dar rigidez a la estructura reduce su periodo fundamental de vibración, alejándola del peligro de resonancia. (Ibáñez, 1976).

3.1.1 Muros de Corte

Es uno de los sistemas estructurales más usados en Chile.

Los muros de corte se caracterizan porque la deformación lateral es principalmente, por cizalle. (Ibáñez, 1976).

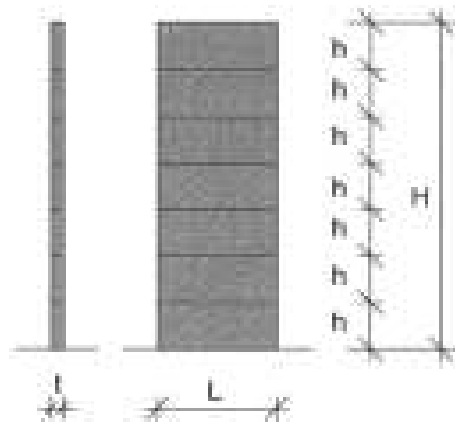


Figura 3.1
Muro de corte. (Zalka, 2000).

3.1.2 Muros de Corte Acoplados

Los muros de corte acoplados pueden fijarse como marcos especiales donde los muros (en lugar de columnas) son conectados con vigas (vigas de acople) o dinteles (Fig. 3.2). Sin embargo, hay dos diferencias básicas entre muros de corte acoplados y marcos.

- Las dos secciones de los extremos de las vigas que conectan los muros no pueden desarrollar flexión, ya que estos (muros) poseen mayor rigidez y no lo permiten. El eje centroidal de estas secciones son caracterizadas por líneas rectas (Fig. 3.2/b).
- Por regla general, la profundidad de la sección de las vigas es relativamente grande y las vigas son relativamente cortas por lo tanto su deformación de corte debe tomarse en cuenta.

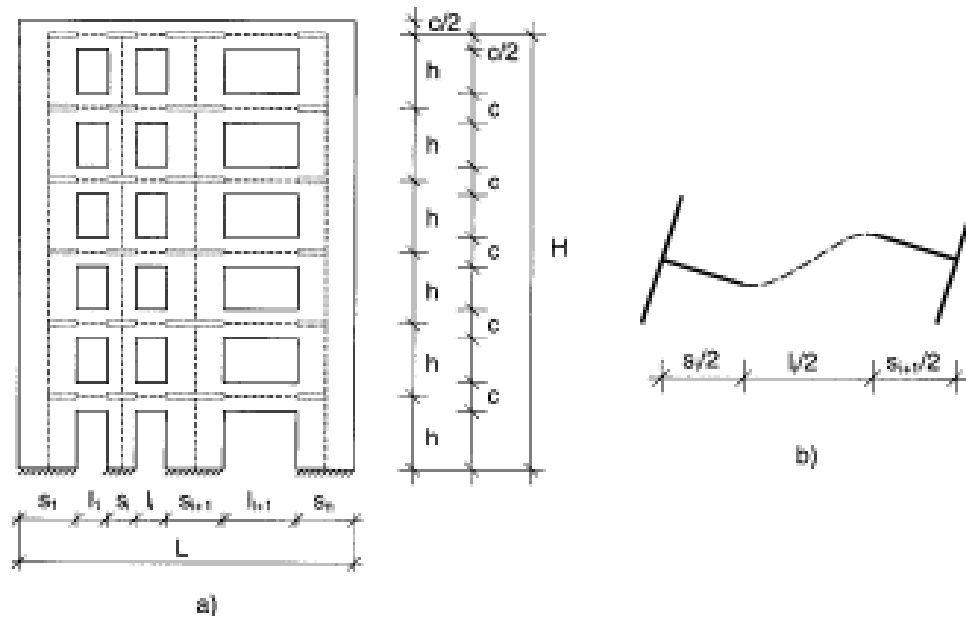


Figura 3.2
Muros de corte acoplados. a) Arreglo típico, b) Deformación de una viga con secciones finales rígidas.
(Zalka, 2000).

3.2 Marcos

Existe una diversidad de marcos que son utilizados para la estructuración de un edificio, como los marcos empotrados, marcos sobre apoyos fijos, con arriostramiento cruzado, revestidos, etc.

3.2.1 Marcos Empotrados

Durante el pandeo, los marcos empotrados normalmente desarrollan una deformación tal que es la combinación de los tres tipos de deformación, que se estudiarán en detalle en el próximo capítulo.

3.2.2 Marcos con Arriostramiento Cruzado

Los marcos de arriostramientos cruzados tienen un largo historial en la práctica de ingeniería civil en diferentes áreas: estructuras costeras, torres de transmisión, estructuras de edificios, techos, auditorios, etc. Cuando los marcos con arriostramiento cruzado son usados en edificios industriales y comerciales de varios pisos, su tarea principal normalmente es proporcionar a la estructura la rigidez suficiente para resistir cargas laterales.

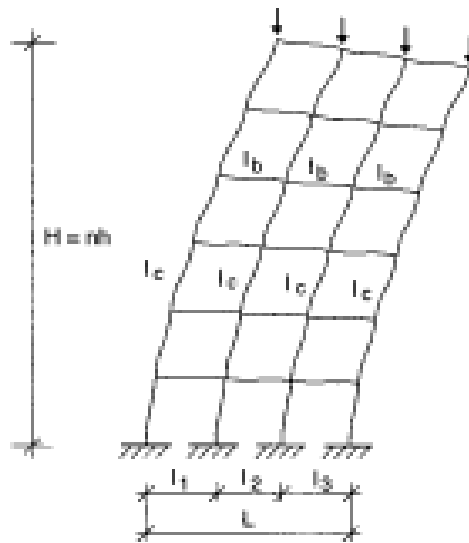


Figura 3.3
Marcos empotrados. (Zalka, 2000).

Entre los arriostramientos más utilizados esta el arriostramiento simple y doble, que puede aplicarse en marcos empotrados.

3.2.2.1 Marcos con Arriostramiento Simple

La Fig. 3.4/a muestra un marco con arriostramiento simple donde tanto la barra horizontal como la diagonal sufren un alargamiento debido al desplazamiento lateral del marco.

3.2.2.2 Marcos con Arriostramiento Doble

Con arriostramiento cruzado doble (Fig. 3.4/b), una diagonal está en tensión y la otra en compresión mientras que la barra horizontal no toma parte en la transmisión de la fuerza de corte. El sistema es equivalente a uno que no tiene barra horizontal (Fig.3.4/c).

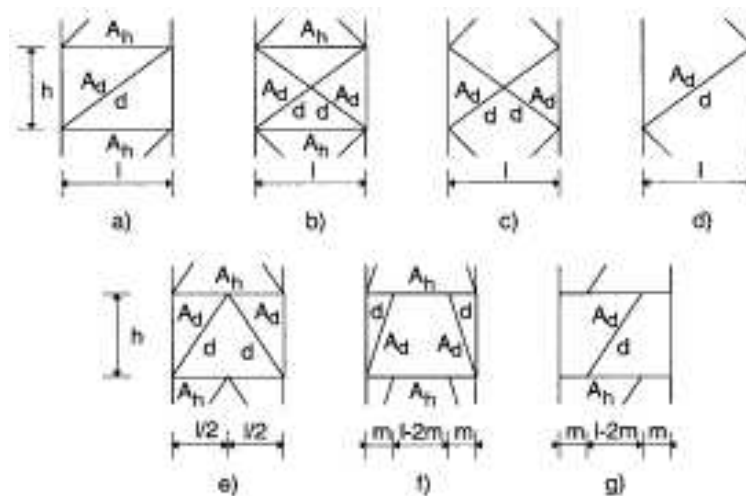


Figura 3.4
Diferentes tipos de arriostramientos cruzado. a) Simple, b) —c) Doble, d) Continuo, e) —f) Arriostramiento K, g) Arriostramiento knee. (Zalka, 2000).

3.3 Deformaciones Características y Rigidez de Marcos

Para la aplicación de las fórmulas y métodos entregados en el próximo capítulo, primero se debe entender el comportamiento de un marco en cuanto a su deformación y rigidez que puede desarrollar. La deformación de un marco puede superponerse usando tres diferente tipos de deformación: la deformación por flexión de altura total de las columnas individuales (Fig. 3.5/a), la deformación por flexión de la altura total de la estructura como un todo (Fig. 3.5/b) y la deformación de corte de la estructura (Fig. 3.5/c). Una rigidez característica puede ser asignada a cada tipo de deformación, tal que lleve a la parte de la carga crítica correspondiente. La carga crítica total es finalmente obtenida por la combinación de estas partes de carga crítica.

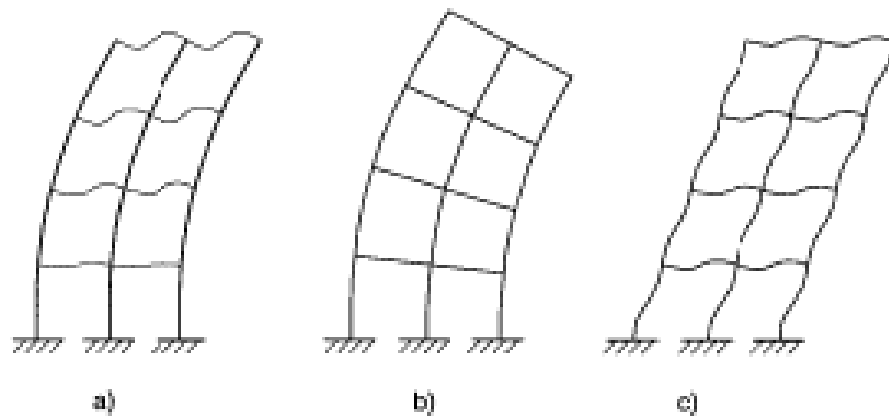


Figura 3.5
Deformaciones características. a) Flexión de altura total de las columnas individuales, b) Flexión de altura total del marco en conjunto, c) Deformación por corte. (Zalka, 2000).

La deformación de corte es caracterizada por oscilación lateral que es principalmente resistida por el efecto rigidizador de las vigas (Fig. 3.5/c; Fig. 3.6/a). La deformación de corte y rigidez de corte son asociadas por dos fenómenos: la oscilación de altura total, (Fig. 3.6/b). (debido al efecto de rigidizador de las vigas sobre la altura total del marco), y la oscilación a nivel de cada de piso (el efecto rigidizador es sólo concentrado en los niveles de piso). (Fig. 3.6/c). (Zalka, 2000).

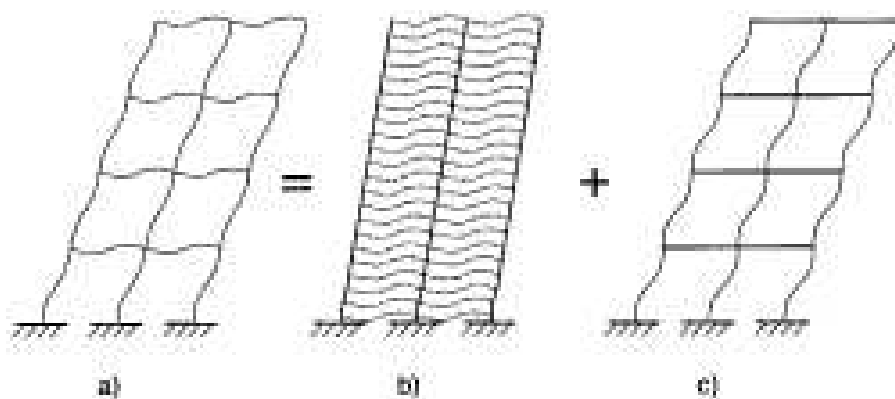


Figura 3.6
Deformaciones de corte. a) Deformación de corte total, b) Corte de altura total (continuo), c) Corte a nivel de piso. (Zalka, 2000).

CAPITULO IV

Método de Análisis y Carga Crítica según Método de Zalka

4.1 Introducción

El presente capítulo da a conocer el Método de Zalka y su aplicación en el análisis de estabilidad, frecuencia y carga crítica, además de mostrar la importancia de este último parámetro para la determinación de muros equivalentes.

4.2 Antecedentes para la formulación del Método de Zalka

4.2.1 Método Continuo

Uno de los métodos de cálculo aproximado más utilizados se basa en el método continuo, donde la estructura de edificio se reemplaza por una viga continua. (Potzta, 2002).

El modelo continuo es obtenido cortando las vigas en los puntos de inflexión y entonces se combinan las columnas individuales del marco para formar una columna equivalente. El efecto de amortiguación de las vigas es tomado en cuenta aplicando los momentos de flexión concentrados a las columnas a nivel de piso, tal que son uniformemente distribuidos, llevando a la rigidez de corte del modelo. De una manera similar, la carga uniformemente distribuida sobre las vigas es remplazada primero por las fuerzas concentradas a niveles de piso, luego estas fuerzas son distribuidas uniformemente sobre la altura de la columna (Fig. 4.1). (Zalka, 2000).

El equilibrio de una sección elemental de la columna equivalente lleva a la ecuación diferencial gobernante.

$$y'''' + \left(\frac{N(z) - K}{r_s E_c I_c} y' \right)' = 0 \quad (4.1)$$

donde la $N(z) = qz$ es la carga vertical de la estructura en z y q es la intensidad de la carga vertical uniformemente distribuida. El factor de reducción r_s esta dado por la fórmula (4.17) y en la Tabla 4.1 (Ver Anexo). La relación entre la intensidad de la carga vertical uniformemente distribuida, las vigas (p) y la intensidad de la carga vertical uniformemente distribuida (q) es

$$q = \frac{pLn}{H} \quad (4.2)$$

donde L es el ancho total del muro y n es el número de pisos.

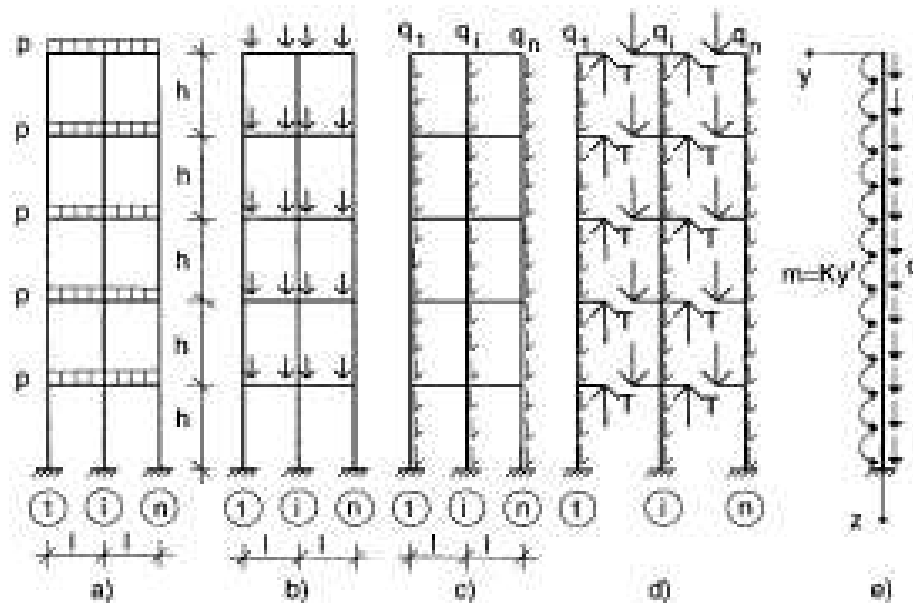


Figura 4.1

Origen del modelo continuo para marcos en apoyo fijo. a) Marco, b) Reemplazo de carga de viga, c) Distribución de la carga sobre la altura, d) Corte de cada viga, e) Columna equivalente (Zalka, 2000).

La ecuación diferencial gobernante es acompañada por las condiciones de borde en el sistema de coordenadas cuyo origen es fijo a la parte superior de la columna equivalente (Fig. 4.1/e).

$$y(0) = 0 \quad (4.3a)$$

$$y'(H) = 0 \quad (4.3b)$$

$$y''(0) = 0 \quad (4.3c)$$

$$y'''(0) = 0 \quad (4.3d)$$

El modelo toma directamente en consideración la flexión de altura total de las columnas individuales y la deformación de corte de los marcos mientras que la flexión global de la estructura en conjunto es incorporado en el modelo y en la fórmula después.

La solución del problema de valores propios definida por la ecuación (4.1) lleva a

$$N_{cr} = \frac{r(\alpha - \beta)N_l + K + rN_lK / N_g}{1 + K / N_g} \quad (4.4)$$

donde N_l , N_g y K son cargas de flexión local, global y de corte respectivamente y r , el factor de combinación. Todos estos parámetros serán definidos más adelante en la sección 4.6.

El parámetro α de carga crítica (valor propio del problema) en la fórmula (4.4) es dada en la Fig. 4.2 y en la Tabla 4.2 como una función de la razón de rigidez. (Ver Anexo).

$$\beta = \frac{K}{N_l} \tag{4.5}$$

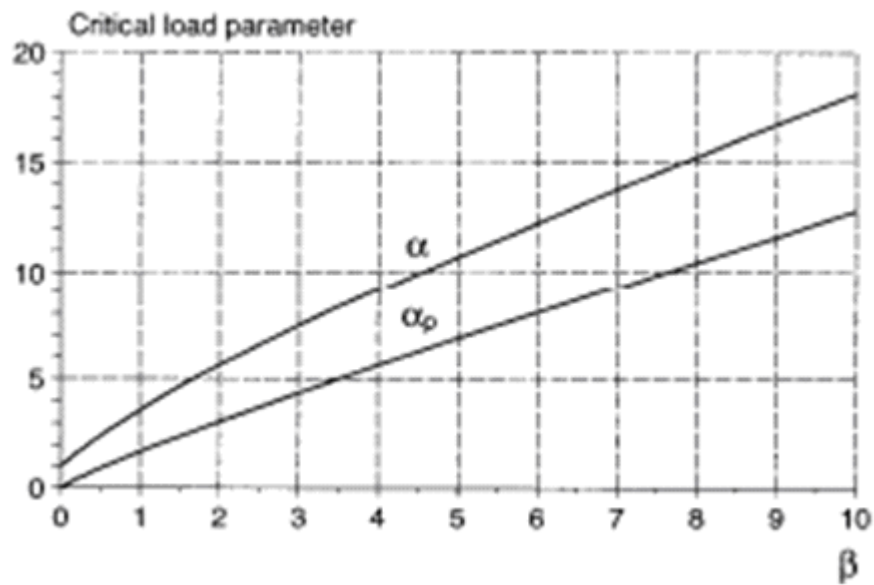


Figura 4.2
Parámetro α de carga crítica y α_p para marcos empotrados. (Zalka, 2000).

4.2.2 Método Sandwich

El modelo de sandwich ofrece una aproximación diferente al problema. Las caras de la columna de sandwich representan las columnas del marco (con sus rigidez de flexión "local" y "global") y los medios de unión representan las vigas (con su rigidez de corte) (Fig. 4.3/a/b).

Según esta aproximación, el marco es analizado usando una columna sandwich equivalente con caras delgadas. Este modelo toma en consideración las rigideces de flexión y corte "globales" pero desprecia la rigidez de flexión "local" del marco.

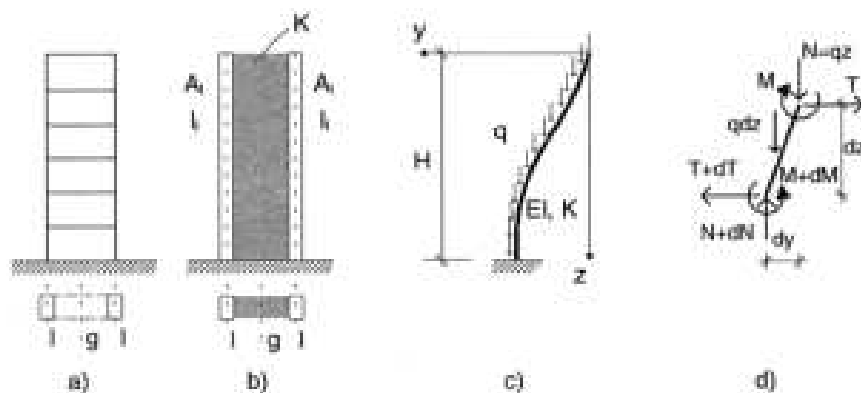


Figura 4.3
Origen y análisis del modelo de emparedado. a) Marco, b) Emparedado, c) Forma pandeada, d) Sección elemental. (Zalka, 2000).

La ecuación diferencial gobernante del problema es obtenida considerando el equilibrio de una sección elemental de la columna sandwich (Fig. 4.3/c/d) que es caracterizado por la rigidez de flexión "global" y la rigidez de corte del sistema (Zalka and Armer, 1992):

$$y'''' - \frac{q}{K}(3y'''' + zy''''') + \frac{q}{r_s E_c I_g}(y' + zy'') = 0 \quad (4.6)$$

En la ecuación diferencial gobernante q representa la intensidad de la carga vertical uniformemente distribuido, $E_c I_g$ es la rigidez de flexión global de las columnas, r_s es el modificador como se define por la fórmula (3.6) y se dio en la tabla 4.1 y K es la rigidez de corte del sistema.

La ecuación diferencial gobernante es suplementada por las condiciones de borde

$$y(0) = 0 \quad (4.7a)$$

$$y'(H)(1 - \frac{qH}{K}) = 0 \quad (4.7b)$$

$$y''(0) - \frac{q}{K} y'(0) = 0 \quad (4.7c)$$

$$y'''(0) - \frac{2q}{K} y''(0) = 0 \quad (4.7d)$$

tal que expresa que el desplazamiento lateral es igual a cero en la parte superior de la columna, la tangente a la columna equivalente y la base de la columna es paralela al eje z, los momentos de flexión desaparecen en la parte superior de la columna y las fuerzas de corte también es cero en la parte superior de la columna, en el sistema de coordenadas cuyo origen es fijo en la parte superior de la columna equivalente (Fig. 4.3/c).

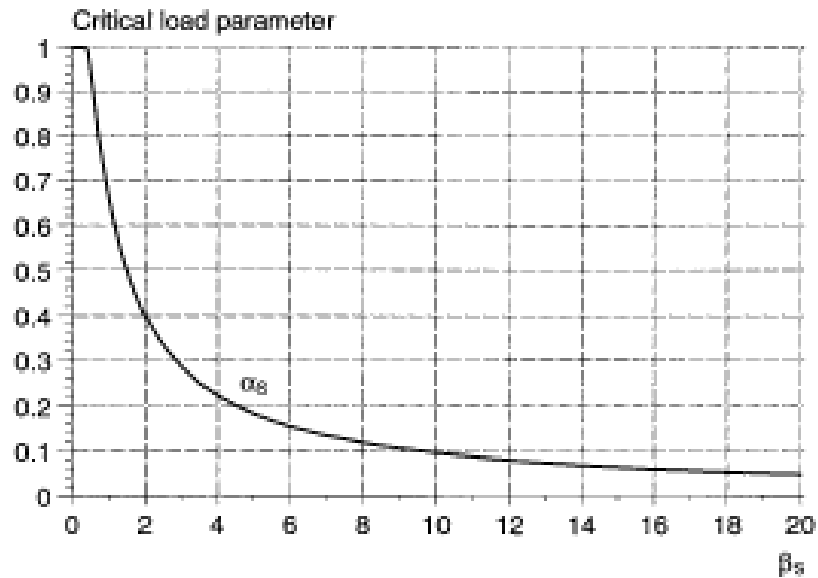


Figura 4.4

Parámetro α_s de carga crítica. (Zalka, 2000).

La solución del problema de valores propios (4.6) lleva a una fórmula simple y la carga crítica de marcos sujetos a una carga de piso uniformemente distribuida es obtenido de

$$N_{cr} = \alpha_s K \quad (4.8)$$

El parámetro α_s es dado en la Fig. 4.4 y en la Tabla 4.3 como una función de la razón de rigidez β_s definido por

$$\beta_s = \frac{K}{N_g} \quad (4.9)$$

Donde N_g es la parte de la carga crítica caracterizando el pandeo de flexión global de los marcos, este parámetro se definirá mas adelante en la sección 4.6.

4.3 Método de Zalka

4.3.1 Fórmula de diseño

La importancia de la carga crítica elástica en la práctica a sido reconocido y los medios por los cuales la inestabilidad elástica es considerada ha sido presentada (Stevens, 1983).

Como ambos modelos, el Continuo y el Sandwich se aproximan al mismo problema de una manera diferente, parece sensato combinar las dos fórmulas relevantes.

Combinando las dos fórmulas el margen de error puede ser estrecho, resultando cargas críticas más exactas. La combinación es llevada a cabo en dos pasos.

Primero, la fórmula (4.8) es remplazada por el término rN_l . Este paso, basado en el teorema de sumatoria de Southwell, hace posible tomar en consideración aproximadamente la deformación de flexión “local” de las columnas en el modelo sandwich. Segundo, la fórmula modificada es combinada con la fórmula (4.4) resultando la fórmula para el cálculo de la carga crítica. (Zalka, 2000).

$$N_{cr} = \frac{rN_l(1 + \alpha - \beta + 2\beta_s) + K(1 + \alpha_s + \alpha_s\beta_s)}{2(1 + \beta_s)} \quad (4.10)$$

El parámetro α y α_s son dados en la Tabla 4.2 y Tabla 4.3, como una función de β y β_s , definido por la fórmula (4.5) y (4.9), respectivamente. El factor de combinación r es calculado usando (4.11).

$$r = \frac{K_l}{K_g + K_l} \quad (4.11)$$

Teóricamente, la estructura es estable si el valor de la carga crítica es mayor que la carga vertical total, por ejemplo, si para la carga uniformemente distribuida sobre vigas, la desigualdad

$$\frac{N}{N_{cr}} < 1 \quad (4.12)$$

donde N es la carga vertical total medido a nivel de la piso. Si se cumple, entonces la estructura es estable, con la rigidez lateral necesaria para ser considerada como un elemento resistente en un edificio.

4.4 Análisis de Estabilidad

El problema del pandeo flexión-torsión combinado de una columna de sección de muros delgados se ha resuelto para fuerzas concentradas finales y Timoshenko presentó una fórmula simple y una ecuación cúbica. Timoshenko *et al* (1961). La estabilidad de la columna equivalente (representando el edificio) se define por el sistema de cuarto orden, ecuaciones diferenciales homogéneas de coeficientes variables.

$$EI_y u'''' + [N(z)(u' - y_c \varphi')] = 0, \quad (4.13)$$

$$EI_x v'''' + [N(z)(v' - x_c \varphi')] = 0, \quad (4.14)$$

$$EI_\omega \varphi'''' - (GJ \varphi' - N(z) i_p^2 \varphi')' + [N(z)(x_c v' - y_c u')] = 0, \quad (4.15)$$

donde:

E : módulo de elasticidad,

G : módulo de corte,

I_x, I_y : Segundo momento de área con respecto a los ejes principales X e Y,

I_ω : Constante de alabeo,

J : constante de torsión de Saint- Venant,

u, v : translación del centro de corte en dirección X e Y,

φ : rotación alrededor del centro de corte (rotación en el sentido de las manecillas del reloj es positivo),

x_c, y_c : coordenadas del centro geométrico de la planta,

i_c : radio de giro.

Las cargas de la columna equivalente son obtenidas por la distribución de la carga del piso (de igual magnitud en cada piso) sobre la altura del edificio, creando una carga vertical uniformemente distribuida. $N(z)=q(H-z)$.

4.4.1 Sistemas Doblemente Simétricos – Cargas Críticas Básicas

Las cargas críticas básicas son aquellas que pertenecen a los modos críticos básicos: el pandeo de oscilación en los planos principales y pandeo torsional puro. Esto es el caso con los sistemas doblemente simétricos cuando el centro de corte del sistema resistente y el centro de la carga vertical coincide y los tres modos básicos se desarrollan independientemente uno de otro. (Fig. 2.2 /c).

Las cargas críticas básicas para edificios sujetos a una carga uniformemente distribuida en cada piso están dadas en la siguiente fórmula. Basado en la fórmula clásica muy conocida para un cantilever sujeto a una carga axial uniformemente distribuida (Timoshenko *et al*, 1961), las dos cargas críticas en las direcciones principales son:

$$N_{cr,X} = \frac{7.84r_s EI_y}{H^2}, \quad N_{cr,Y} = \frac{7.84r_s EI_x}{H^2}, \quad (4.16)$$

donde el parámetro r_s es un factor de reducción.

$$r_s = \frac{n}{n + 1.588} \quad (4.17)$$

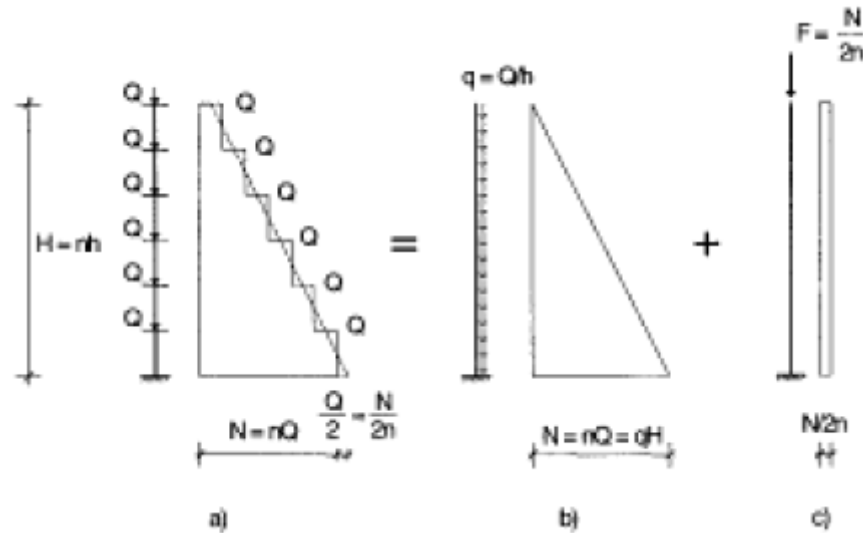


Figura 4.5

Diagramas de carga, a) Carga en edificio de varios pisos, b) Primera parte de la carga equivalente: carga uniformemente distribuida, c) Segunda parte: fuerza concentrada en la parte superior. (Zalka, 2000).

La fórmula (4.16) sólo difiere de la fórmula de Timoshenko en el factor r_s . Este es un factor de reducción (definido por la formula 4.17 y la Tabla 4.1 en Anexo) que toma en cuenta el hecho de que la masa del edificio está concentrada a niveles de piso (Fig.4.5/a) y no distribuida uniformemente como lo supuesto para la derivación de la fórmula clásica de un cantilever sometido a esta carga.

La carga continua es obtenida por la distribución de las fuerzas *hacia abajo* resultando más favorable la distribución de carga. Esta maniobra no conservadora deja una fuerza concentrada en la parte superior de la columna (Fig. 4.5/c), que no está considerada por la fórmula clásica. En ciertos casos dicha carga concentrada F_{cr} puede ser considerada (estanques de agua, piscinas u otra carga adicional que se ubique en la parte superior del edificio). (Zalka, 2000).

La carga crítica por pandeo torsional puro es obtenido de:

$$N_{cr,\varphi} = \frac{\alpha r_s EI_{\omega}}{i_p^2 H^2}, \quad (4.18)$$

En la fórmula (4.16) los valores del parámetro de carga crítica α son dados en la fig.4.6 como una función de:

$$k_s = \frac{k}{\sqrt{r_s}}, \quad (4.19)$$

donde

$$k = H \sqrt{\frac{GJ}{EI_{\omega}}}, \quad (4.20)$$

es el parámetro de torsión y r_s es el modificador cuyos valores son dados en la Tabla 4.1.

El diagrama en la fig. 4.6 cubre el rango $0 \leq k_s \leq 2$ donde mas casos prácticos caen. Cuando el valor de k_s excede 2.0, o es necesaria una gran exactitud, puede ser usada la Tabla 4.4.

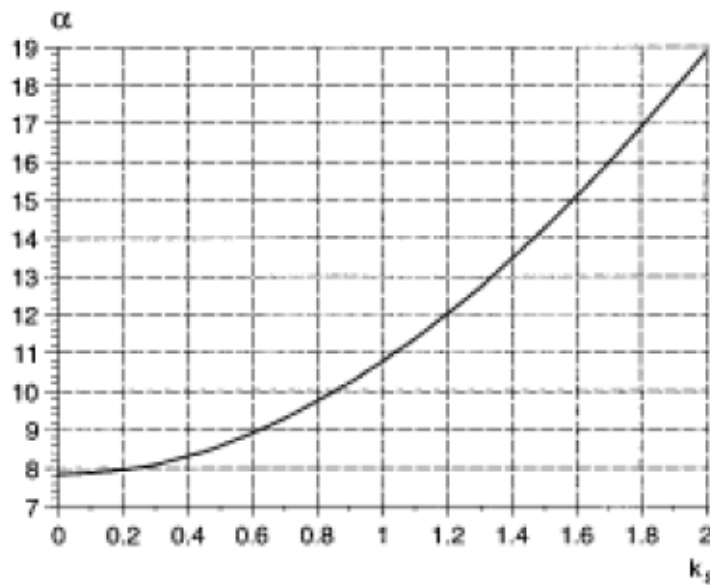


Figura 4.6
Parámetro de carga crítica α . (Zalka, 2000).

La evaluación de la fórmula de las cargas críticas básicas (4.16) y (4.18) muestra que las características más importantes que influyen en los valores de las cargas críticas básicas son:

- la altura del edificio,
- las rigideces de flexión del sistema resistente,
- la rigideces de curvatura del sistema resistente,
- el radio de giro.

La oscilación de las cargas críticas está en directa proporción a las rigideces de flexión del sistema resistente y en proporción inversa al cuadrado de la altura del edificio.

De una manera similar, la carga crítica torsional pura está en proporción directa a la rigidez de alabeo del sistema resistente y en proporción inversa al cuadrado de la altura. La rigidez torsional de Saint-Venant afecta el valor de la carga crítica a través del parámetro de carga crítica α (k_s) pero su efecto es normalmente pequeño como en la mayor parte de los casos prácticos $k_s < 1$. Sin embargo, existe una diferencia significativa entre las cargas críticas de oscilación y de torsión pura. El valor de carga crítica de torsión pura depende del radio de giro. El efecto del radio de giro es mostrado por la fórmula (2.10). De acuerdo a la fórmula que asume una carga de piso uniformemente distribuida, mientras mayor sea el tamaño del edificio (y la

distancia entre el centro de corte y el centro geométrico), mayor es el radio de giro y consecuentemente menor será la carga crítica de torsión pura. Esto está en contraste al pandeo cuando las características geométricas del proyecto de edificio no influyen en la carga crítica.

4.4.2 Sistemas Asimétricos (Acoplamiento de los Modos Básicos)

Un acoplamiento de los modos básicos ocurre cuando el centro de corte del sistema resistente y el centro de la carga vertical no coinciden y los tres modos básicos son dependientes entre si. (Fig. 2.2 /a).

La solución exacta de las ecuaciones diferenciales simultáneas (4.13) a (4.15) lleva al determinante

$$\begin{vmatrix} N - N_{cr,X} & 0 & -Ny_c \\ 0 & N - N_{cr,Y} & Nx_c \\ -Ny_c & Nx_c & i_p^2(N - N_{cr,\phi}) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.21)$$

que define el acoplamiento de los modos básicos y que puede ser usado para el cálculo de la carga crítica del pandeo oscilación-torsión combinado si las cargas críticas básicas ($N_{cr,X}$, $N_{cr,Y}$ y $N_{cr,\phi}$) son conocidas. El determinante genera una ecuación cúbica de la forma

$$N^3 + a_2N^2 + a_1N - a_0 = 0, \quad (4.22)$$

donde los coeficientes son

$$a_2 = \frac{N_{cr,X}\tau_X^2 + N_{cr,Y}\tau_Y^2 - N_{cr,\phi} - N_{cr,X} - N_{cr,Y}}{1 - \tau_X^2 - \tau_Y^2}, \quad (4.23)$$

$$a_1 = \frac{N_{cr,X}N_{cr,Y} + N_{cr,\phi}N_{cr,X} + N_{cr,\phi}N_{cr,Y}}{1 - \tau_X^2 - \tau_Y^2}, \quad a_0 = \frac{N_{cr,\phi}N_{cr,X}N_{cr,Y}}{1 - \tau_X^2 - \tau_Y^2}, \quad (4.24)$$

$$\tau_X = \frac{x_c}{i_p}, \quad \text{y} \quad \tau_Y = \frac{y_c}{i_p}, \quad (4.25)$$

En la fórmula (4.23) y (4.24) los parámetros τ_X y τ_Y caracterizan la excentricidad de la carga. La ecuación (4.22) puede ser usada para tomar en cuenta el acoplamiento de las cargas

críticas básicas. De las tres raíces de la ecuación cúbica, la más pequeña es la más importante en la aplicación práctica. Para agilizar el cálculo, la ecuación cúbica (4.22) ha sido resuelta para un gran número de cargas críticas básicas

$$r_1 = \frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,X}} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,Y}} \quad (4.26)$$

Cuando el parámetro de modo acoplado es conocido, la carga crítica de pandeo oscilación-torsión combinado es obtenido de

$$N_{cr} = \kappa N_{cr,\varphi} \quad (4.27)$$

donde $N_{cr,\varphi}$ es la carga crítica básica de pandeo torsional puro.

4.4.3 Sistema Monosimétrico

La solución de ecuación cúbica (4.22) se simplifica en el caso monosimétrico cuando el centro de la carga vertical depende de uno de los ejes principales (Fig. 2.2/b). En tales casos el pandeo de oscilación se desarrolla independientemente en el plano de simetría y sólo el pandeo de oscilación perpendicular a los ejes de simetría y el pandeo torsional puro se combinan. Asumiendo una carga de piso uniformemente distribuida y que el eje X es un eje de simetría tal que $y_c = 0$, la carga crítica combinada puede ser expresada por la fórmula cuando los valores del

$$N_{combinado} = \varepsilon N_{cr,Y} \quad (4.28)$$

parámetro ε del modo acoplado son dados en Fig. 4.7 y si el rango cubierto por la figura no es suficiente o si son necesarios valores mas exactos, en la Tabla 4.5, como una función de τ_x (fórmula 4.25) y

$$r_2 = \frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,Y}}, \quad (4.29)$$

La carga crítica básica $N_{cr,Y}$ y $N_{cr,\varphi}$ son definidos por la fórmula (4.16) y (4.18). La Tabla 4.5 cubre el rango $0 \leq r_2 \leq 100$. Cuando $r_2 > 100$, $r_2 = 100$ puede ser usado. El error producido por esta aproximación es siempre más pequeño que 1%. La carga crítica global para sistemas monosimétricos resistentes es el menor de la carga crítica combinada y de la carga crítica independiente en el plano de simetría. (Zalka, 2000).

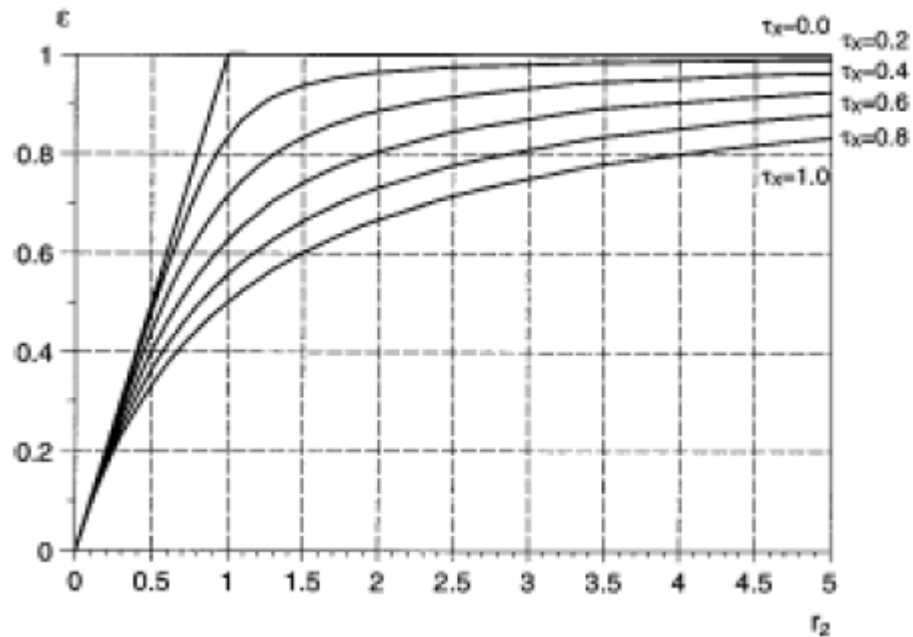


Figura 4.7

Parámetro \mathcal{E} de modo acoplado para el caso monosimétrico. (Zalka, 2000).

El caso de sistemas resistentes doblemente simétricos (Fig.2.2/c) es automáticamente cubierta en la tabla 4.5 por las filas definidas por $\tau_x = 0.0$. Los valores en la tabla 4.6 pueden también ser usados para mostrar el efecto de descuidar el acoplamiento de los modos básicos en el caso monosimétrico. (Zalka, 2000).

4.5 Análisis de Frecuencia

Suponiendo una masa uniformemente distribuida, las vibraciones del edificio son definidas por ecuaciones diferenciales parciales. (Gere *et al*, 1958).

$$EI_y u'''' + \rho A (\dot{u} - y_c \dot{\varphi})' = 0, \quad (4.30)$$

$$EI_x v'''' + \rho A (\dot{v} - x_c \dot{\varphi})' = 0, \quad (4.31)$$

$$EI_\omega \varphi'''' - GJ \varphi'' + \rho A i_p^2 \ddot{\varphi} + \rho A (x_c \dot{v} - y_c \dot{u})' = 0, \quad (4.32)$$

En las ecuaciones diferenciales de arriba las primas y puntos marcan la diferenciación con respecto a z y t , respectivamente, y

A : es el área de la planta del edificio

u, v, φ : son los movimientos laterales y torsional,

ρ : es la densidad de la masa por unidad de volumen del material del edificio, definido por

$$\rho = \frac{\gamma}{g}, \quad (4.33)$$

donde

γ : es el peso por unidad de volumen del edificio (Kgf / m^3),

g : es la aceleración de gravedad ($g = 9.81m / s^2$).

El análisis de frecuencia puede ser llevado a cabo de una manera similar al análisis de estabilidad. El primer paso es producir la frecuencia natural básica que corresponde a los modos básicos (independientes): vibraciones laterales en los planos principales y vibraciones torsionales puras. Segundo, el acoplamiento de los modos básicos tiene que ser tomados en cuenta.

4.5.1 Sistemas Doblemente Simétricos (Frecuencias Naturales Básicas)

Las ecuaciones diferenciales que caracterizan los modos básicos son obtenidos de la ecuación general (4.30), (4.31) y (4.32) usando la substitución $x_c = y_c = 0$.

Suponiendo un peso uniformemente distribuido sobre los pisos, las frecuencias naturales básicas son dadas como sigue. Modificando las solución clásica para vibraciones laterales de un cantilever bajo este peso uniformemente distribuido sobre la altura (Timoshenko *et al*, 1955), la frecuencia angular son obtenidas como

$$\omega_{x,i} = \frac{l_i r_f}{H^2} \sqrt{\frac{EI_Y}{\rho A}}, \quad \omega_{y,i} = \frac{l_i r_f}{H^2} \sqrt{\frac{EI_X}{\rho A}}, \quad (4.34)$$

donde los valores para las primeras tres frecuencias son dadas en la Tabla 4.6. (Ver Anexo).

Haciendo uso de la relación.

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (4.35)$$

Las fórmulas para las frecuencias naturales son:

$$f_{x,i} = \frac{l_i r_f}{2\pi H^2} \sqrt{\frac{EI_Y}{\rho A}}, \quad f_{y,i} = \frac{l_i r_f}{2\pi H^2} \sqrt{\frac{EI_X}{\rho A}}, \quad (4.36)$$

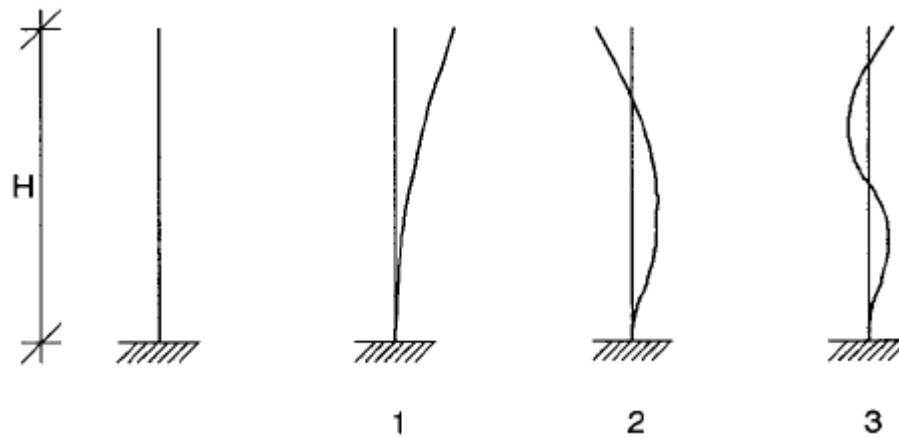


Figura 4.8
Formas de modo para vibraciones laterales. (Zalka, 2000).

de acuerdo a la Tabla 4.6 la primera frecuencia natural de la columna equivalente en los planos principales son obtenidos de

$$f_x = \frac{0.56r_f}{H^2} \sqrt{\frac{EI_Y}{\rho A}}, \quad f_Y = \frac{0.56r_f}{H^2} \sqrt{\frac{EI_X}{\rho A}}, \quad (4.37)$$

y los primeros periodos naturales son

$$T_x = \frac{1.787H^2}{r_f} \sqrt{\frac{\rho A}{EI_Y}}, \quad T_Y = \frac{1.787H^2}{r_f} \sqrt{\frac{\rho A}{EI_X}}, \quad (4.38)$$

Las formas de modos para los primeros tres modos son mostrados en la Fig. 4.8. Estudios de respuesta elástica de edificios de varios pisos indican que para la mayoría de los edificios el modo fundamental contribuye cerca del 80%, mientras que el segundo y tercer modo un 15% del total de la respuesta (Fintel, 1974).

La fórmula (4.37) muestra que el valor de las frecuencias dependen de tres factores: la altura, la rigidez lateral, y el peso del edificio. De los tres factores, la altura del edificio es lejos la más importante. El valor de las frecuencias es inversamente proporcional al cuadrado de la altura y al cuadrado de las raíces de la densidad de masa y directamente proporcional al cuadrado de las raíces de la rigidez lateral.

El factor de reducción r_f en las fórmulas (4.37) a (4.40) toma en cuenta el hecho de que la masa del edificio está concentrada a niveles de piso y no distribuida uniformemente como lo supuesto para la derivación de la fórmula clásica de un cantilever sometido a esta carga. La aplicación del teorema de sumatoria de Dunkerley ahora conduce a

$$r_f = \sqrt{\frac{n}{n+2.06}}, \quad (4.39)$$

donde n es el número de pisos. Los valores para r_f son dados en la Tabla 4.7, donde para $n=1$ y $n=2$ han sido modificados, basados en la solución exacta, para compensar la naturaleza conservativa de la fórmula de Dunkerley.

Al hacer uso de la Fig. 4.9 o la Tabla 4.8, la frecuencia fundamental es obtenida de

$$f_{\varphi} = \frac{\eta r_f}{i_p H^2} \sqrt{\frac{EI_{\omega}}{\rho A}}, \quad (4.40)$$

los parámetros de frecuencia para la segunda y tercera frecuencia natural para vibraciones torsionales puras son dados en la Tabla 4.9 y 4.10.

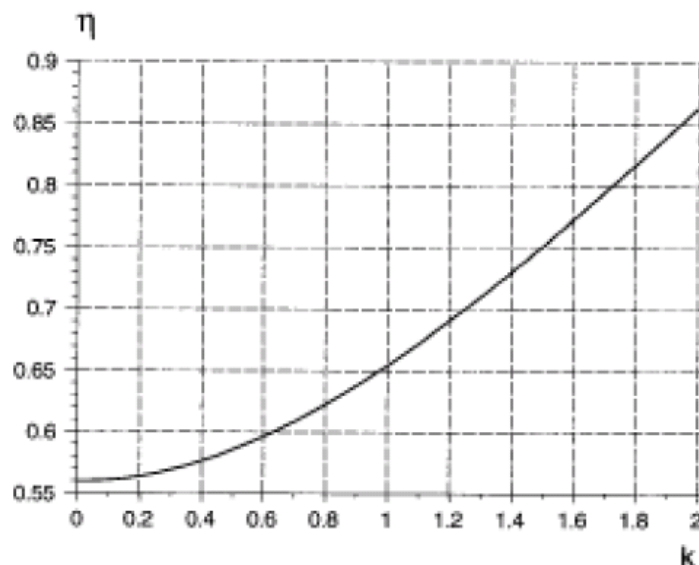


Figura 4.9
Parámetro de frecuencia η . (Zalka, 2000).

Las tablas son limitadas a $k_{\max} = 1000$. Cuando el valor del parámetro k excede 1000, la rigidez de alabeo es despreciable y la fórmula

$$f_{\varphi, i} = \frac{(i-0.5)}{2Hi_p} \sqrt{\frac{GJ}{\rho A}}, \quad (4.41)$$

puede ser usada en lugar de la fórmula (4.40), donde $i=1,2$ y 3.

Las formas de modos fundamentales son dadas en la Fig. 4.10 como una función de parámetro k . La forma de modo es una combinación de dos funciones: una está asociada a la rigidez torsional de Saint-Venant y la otra está asociada a la rigidez de alabeo. Con grandes valores de k , por ejemplo $k \gg 100$, la rigidez de alabeo domina la respuesta y cuando k es pequeño, $k \ll 1$, la forma del modo es determinada por la rigidez torsional de Saint-Venant.

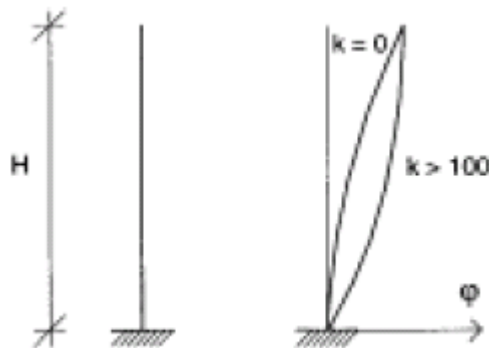


Figura 4.10

Formas de modos fundamentales para vibraciones torsionales puras. (Zalka, 2000).

La fórmula (4.40) muestra que el valor de las frecuencias torsionales puras dependen de cinco factores: la altura, la rigidez de alabeo, la densidad de masa del edificio, el radio de giro de la planta baja del edificio, y el parámetro de frecuencia. Como con las frecuencias laterales, la altura de los edificios es el factor más importante ya que su aumento reduce el valor cuadrático de las frecuencias. El valor de las frecuencias es proporcional al cuadrado de la raíz de la rigidez de alabeo y es proporcionalmente inversa a la densidad de masa del edificio. El efecto de la rigidez de Saint-Venant entra a la ecuación indirectamente, a través del parámetro de frecuencia. Debería mencionarse aquí que, de acuerdo a ejemplos prácticos, la rigidez de Saint-Venant es mucho menos significativa comparada con la rigidez de alabeo.

Finalmente los valores de las frecuencias son proporcionalmente inversos al radio de giro de la planta baja. Las fórmulas de la constante de alabeo (2.5) y el radio de giro (2.7a) muestra que el arreglo de los elementos resistentes tiene un mayor efecto sobre la respuesta torsional del edificio. El desarrollo torsional puede ser mejorado significativamente de dos maneras. Reduciendo la distancia entre el centro de corte del sistema resistente y el centroide de masa del edificio conduce a un arreglo del sistema resistente que es doblemente simétrico o aproximadamente doblemente simétrico.

Tal vez, igualmente importantes es ubicar los muros de corte resistentes de tal manera que su “brazo de torsión” (distancia perpendicular entre sus planos y el centro de corte del sistema) sea máximo.

4.5.2 Sistemas Asimétricos (Acoplamiento de los Modos Básicos)

La similitud entre las ecuaciones diferenciales gobernantes de estabilidad y vibraciones y entre las estructuras de la fórmula de las cargas críticas básicas y frecuencias naturales indican que el manejo del acoplamiento de los modos básicos también puede ser similar.

La solución de las ecuaciones diferenciales simultáneas (4.30) a (4.32) nos conduce al determinante

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_x^2 & 0 & -\omega^2 y_c \\ 0 & \omega^2 - \omega_y^2 & \omega^2 x_c \\ -\omega^2 y_c & \omega^2 x_c & i_p^2 (\omega - \omega_\phi^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.42)$$

donde ω_x, ω_y y ω_ϕ son las frecuencias lateral y torsional. Luego haciendo uso de la relación $f = \omega/2\pi$, la expansión de los resultados del determinante en la ecuación cúbica

$$(f^2)^3 + a_2(f^2)^2 + a_1(f^2) - a_0 = 0, \quad (4.43)$$

donde los coeficientes son

$$a_2 = \frac{f_x^2 \tau_x^2 + f_y^2 \tau_y^2 - f_\phi^2 - f_x^2 - f_y^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \quad (4.44)$$

$$a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_\phi^2 f_x^2 + f_\phi^2 f_y^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \quad a_0 = \frac{f_x^2 f_y^2 f_\phi^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \quad (4.45)$$

En la fórmula (4.44) y (4.45) los parámetros

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p}, \quad \text{y} \quad \tau_y = \frac{y_c}{i_p}, \quad (4.46)$$

caracteriza la excentricidad de la masa y f_x, f_y y f_ω son las frecuencias básicas. De las tres raíces de la ecuación cúbica, la más pequeña es la más importante en la aplicación práctica siendo la frecuencia fundamental del edificio.

El cálculo de la frecuencia combinada puede ser realizarse rápidamente usando las Tablas C1 a C11 en el Anexo C.

$$r_1 = \frac{f_\varphi^2}{f_X^2}, \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{f_\varphi^2}{f_Y^2}, \quad (4.47)$$

Conociendo el parámetro del modo acoplado κ , la frecuencia fundamental combinada (lateral-torsional) es obtenida de

$$f = \sqrt{\kappa} f_\varphi \quad (4.48)$$

donde f_φ es la frecuencia básica para la vibración torsional pura.

El acoplamiento de la frecuencia básica claramente reduce el valor de las frecuencias. La magnitud de la reducción depende de dos factores: el valor relativo de las frecuencias desacopladas comparada una con otra, y la excentricidad del sistema resistente en relación al centro de masa del edificio.

4.5.3 Sistemas Monosimétricos

El cálculo puede ser simplificado en el caso monosimétrico (Fig. 2.2/b) y el parámetro del modo acoplado ε (Tabla 4.5) puede ser usado para calcular la frecuencia combinada.

En el caso monosimétrico la vibración lateral en el plano de simetría se desarrolla independientemente y sólo la vibración lateral perpendicular al eje de simetría y la vibración torsional pura se combinan.

$$f_{comb} = \sqrt{\varepsilon} f_Y \quad (4.49)$$

donde los valores del parámetro del modo acoplado ε son dados en la Tabla 4.5, como función de τ_x y

$$r_2 = \frac{f_\varphi^2}{f_Y^2} \quad (4.50)$$

Las frecuencias básicas f_Y y f_φ son definidas por la fórmula (4.37) y (4.40). La Tabla 4.5 cubre el rango $0 \leq r_2 \leq 100$, cuando $r_2 > 100$, $r_2 = 100$ puede ser usado.

4.6 Carga Crítica de los Elementos Resistentes

A continuación se presentan las cargas críticas para los diferentes elementos resistentes estudiados. Cada una de estas fórmulas está basada en la clásica fórmula de Timoshenko, para carga axial uniformemente distribuida.

4.6.1 Carga Crítica para Muros de Corte y Núcleos

Cuando el muro de corte esta sujeto a una carga uniformemente distribuida normal a cada nivel de piso, la carga crítica es obtenida de

$$N_{cr} = \frac{7.837r_s EI}{H^2} \quad (4.51)$$

donde

E : es el módulo de elasticidad,

I : es el segundo momento de área del muro de corte,

H : es la altura del muro de corte (Fig.3.1),

r_s : es el factor de reducción cuyo valor es dado en la Tabla 4.1 en la sección 4.2

4.6.2 Carga Crítica para Marcos Empotrados

Asumiendo apoyo empotrado para las columnas, la carga crítica de flexión local, (Fig. 3.5/a), es obtenida basada en la fórmula (4.16).

$$N_l = \frac{7.837r_s E_c I_c}{H^2} \quad (4.52)$$

donde

$$E_c I_c = \sum_1^n E_{c,i} I_{c,i} \quad (4.53)$$

donde $E_{c,i}$ y $I_{c,i}$ son los módulos de elasticidad y el segundo momento de área de la i -ésima columna y n representa el número de columnas.

La flexión de la carga crítica que está asociado a la flexión global del marco (Fig. 3.5/b) y es obtenida de

$$N_g = \frac{7.837r_s E_c I_g}{H^2} \quad (4.54)$$

donde

$$E_c I_g = \sum_1^n E_{c,i} A_{c,i} t_i^2 \quad (4.55)$$

tal que

$$I_g = \sum_1^n A_{c,i} t_i^2 \quad (4.56)$$

En la fórmula anterior, t_i es la distancia de la i -ésima columna desde el centroide de la sección y $A_{c,i}$, es la sección del área de la i -ésima columna.

La carga crítica asociada a la deformación de corte global (fig. 3.6/b) es

$$K_g = 2 \sum_1^{n-1} \frac{6E_{b,i} I_{b,i}}{l_i h} \quad (4.57)$$

La carga crítica asociada a la deformación de corte local (fig. 3.6/c) es

$$K_l = \sum_1^n \frac{\pi^2 E_{c,i} I_{c,i}}{h^2} \quad (4.58)$$

De acuerdo al teorema de Föppl-Papkovich (Tarnai, 1999), las dos partes de la carga crítica pueden ser combinadas y la carga de corte crítica de la estructura es obtenida como

$$K = \left(\frac{1}{K_l} + \frac{1}{K_g} \right)^{-1} = K_g \frac{K_l}{K_g + K_l} \quad (4.59)$$

donde r es el factor de combinación. (definido en fórmula 4.11)

Finalmente, la carga crítica para un marco empotrado es

$$N_{cr} = N_l + \left(\frac{1}{N_g} + \frac{1}{K} \right)^{-1} = \frac{N_l + K + N_l K / N_g}{1 + K / N_g} \quad (4.60)$$

4.6.3 Carga Crítica para Muros de Corte Acoplados

Se debe señalar que las fórmulas para el análisis de estabilidad de marcos pueden ser usadas para el análisis de estabilidad de muros de corte acoplados si se hacen ciertas modificaciones. Dichas modificaciones, sólo afectan la rigidez de corte global, por lo tanto, la carga crítica global modificada y basada en la fórmula (4.57) es

$$K_g^* = \sum_1^{n-1} \frac{6E_{b,i}I_{b,i} \left[(l_i + s_i)^2 + (l_i + s_{i+1})^2 \right]}{l_i^3 h \left(1 + 12 \frac{\rho E_{b,i}I_{b,i}}{l_i^2 G_{b,i}A_{b,i}} \right)} \quad (4.61)$$

donde

$G_{b,i}$ es el módulo de elasticidad de corte de las vigas,

$A_{b,i}$ es el área de la sección de las vigas,

l_i es la distancia entre el i -ésimo y $(i+1)$ -ésimo muro,

s_i es el ancho del i -ésimo muro,

ρ es la constante cuyo valor depende de la forma de la sección de las vigas ($\rho=1.2$ para sección rectangular).

Respecto a la carga crítica local de corte modificada y basada en la fórmula (4.58), es

$$K_l = \sum_1^n \frac{\pi^2 E_{c,i} I_{c,i}}{h^2} \quad (4.62)$$

Con la carga crítica de corte modificada, la fórmula para la carga crítica modificada es obtenida como con marcos:

$$K^* = K_g^* \frac{K_l}{K_g^* + K_l} \quad (4.63)$$

Cuando los muros de corte acoplados son sometidos a carga uniformemente distribuidas sobre los niveles de piso, la carga crítica es obtenida de

$$N_{cr} = \frac{rN_l(1 + \alpha - \beta + 2\beta_s) + K^*(1 + \alpha_s + \alpha_s\beta_s)}{2(1 + \beta_s)} \quad (4.64)$$

El factor de combinación r en la fórmula (4.11) es ahora dada por

$$r = \frac{K_l}{K_g^* + K_l} \quad (4.65)$$

La parte de la carga crítica N_l caracterizando la flexión local de los muros individuales en la fórmula (4.64) fue definida en la fórmula (4.52).

El parámetro α es dado en la Fig. 4.2 y en la Tabla 4.2 como una función de la razón de rigidez β :

$$\beta = \frac{K^*}{N_l} \quad (4.66)$$

Los valores del parámetro α_s son dados en la Tabla 4.3 y en la Fig. 4.4 como una función de la razón de rigidez

$$\beta_s = \frac{K^*}{N_g} \quad (4.67)$$

4.6.4 Carga Crítica para Marcos con Arriostamiento Doble

Basado en los análisis de la sección de un piso de un marco de un vano (Fig.4.11), el desplazamiento angular es dado por

$$\gamma = \frac{\delta}{h} \quad (4.68)$$

o por

$$\gamma = \frac{Q}{K} \quad (4.69)$$

donde

δ : es el desplazamiento lateral,

h : es la altura del piso,

Q : es la fuerza de corte,

K : es la rigidez de corte.

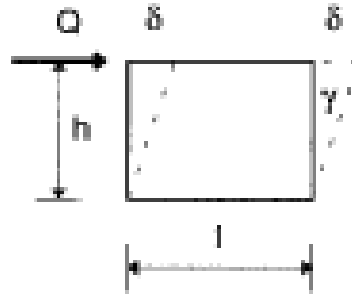


Figura 4.11

Deformación de corte de una sección de un piso. (Zalka, 2000).

Combinando la fórmula (4.68) y (4.69), la rigidez de corte puede ser obtenida de

$$K = \frac{hQ}{\delta} \quad (4.70)$$

Con arrostramiento cruzado doble (Fig. 3.4/b), una diagonal está en tensión y la otra en compresión mientras que la barra horizontal no toma parte en la transmisión de la fuerza de corte. El sistema es equivalente a uno que no tiene barra horizontal (Fig. 3.4/c) y el desplazamiento lateral esta dado por

$$\delta_d = \frac{Qd^3}{2A_d E_d l^2} \quad (4.71)$$

La fórmula (4.70) entrega la rigidez de corte como

$$K = K_d = 2A_d E_d \frac{hl^2}{d^3} \quad (4.72)$$

Finalmente, la carga crítica para marcos con arriostramiento simple o doble es:

$$N_{cr} = \alpha_s K \quad (4.73)$$

4.7 Muros Equivalentes

Cuando los marcos y/o muros de corte acoplados son incluidos entre los elementos del sistema resistente, entonces la determinación de la rigidez de estos elementos es necesaria para la determinación de la columna equivalente.

Estos elementos, (marcos y muros de corte acoplados) no tienen su propia rigidez torsional de alabeo y su rigidez torsional de Saint-Venant y el producto de la inercia puede ser despreciado. Esto deja la rigidez lateral EI_x y EI_y . Como con la mayor parte de los elementos arriostrantes planos, su rigidez perpendicular a su plano es pequeña y puede ser despreciado.

Cuando la rigidez lateral de los marcos y muros de corte acoplados han sido determinados, ellos pueden ser reemplazados por muros sólidos ficticios de igual rigidez y el análisis espacial.

El análisis de estabilidad, frecuencia y de tensiones globales de los elementos resistentes como núcleos, muros de corte, muros de corte acoplados y marcos puede ser considerablemente simplificado, si estos son reemplazados por muros equivalentes.

El reemplazo de los muros de corte acoplado y marcos por muros equivalentes puede ser basado haciendo que la carga crítica de los muros de corte acoplado y marcos sea igual al del muro equivalente. Haciendo uso de la carga crítica de estos elementos resistentes N_{cr} y asumiendo una carga uniformemente distribuida sobre los niveles de piso, el espesor del muro equivalente (t^*) puede ser derivado de

(Zalka, 2000).

$$N_{cr} = N_{cr,wall} = \frac{7.837r_s E t^* L^3}{12H^2} \quad (4.74)$$

tal que lleva a

$$t^* = \frac{1.53N_{cr}H^2}{r_s E L^3} \quad (4.75)$$

donde

N_{cr} : es la carga crítica de la estructura/muros de corte acoplados,

H, L, E : es la altura, ancho y módulo de elasticidad del muro equivalente (idéntico a la altura, ancho y módulo de elasticidad de la estructura/muros de corte acoplados),

r_s : factor de reducción.

La deformación total de un sistema resistente consistente en muros de corte, núcleos, marcos y muros de corte acoplados son importantes, el sistema resistente cae en dos categorías.

1) La deformación característica del muro equivalente (representando un marco o muros de corte acoplados) es de tipo flexión. En este caso, la conformidad es asegurada como ambos muros de corte y núcleos y muros equivalentes desarrollan deformación de tipo flexión. El análisis tridimensional puede usarse sin peligro como no existe ninguna interacción entre los miembros del sistema resistente que cambie el comportamiento tridimensional básico (basado en la oscilación en flexión y la torsión al curvarse así como su combinación) asumido por la derivación de las ecuaciones diferenciales gobernantes del análisis tridimensional.

2) La deformación característica del muro equivalente es de tipo corte. En este caso, el sistema resistente desarrolla una combinación de deformación de tipo flexión y corte. — El análisis tridimensional resulta en soluciones aproximadas. El grado de la aproximación depende de hasta qué punto la deformación total del sistema resistente defiere de la deformación de tipo flexión. (Zalka, 2000).

CAPITULO V

Carga Distribuida, Tensiones Máximas y Deformación en el Método de Zalka

5.1 Introducción

En el presente capítulo se da a conocer la aplicación del Método de Zalka en el análisis de tensiones máximas y deformación, así como también la adaptación del modelo de carga distribuida externa presentada por el método a la normativa Chilena vigente.

5.2 Requisitos de la Normativa Chilena para Carga Distribuida

5.2.1 Carga de Viento

La presión básica (Kgf/m²) del viento varía dependiendo de la altura del edificio, es por eso que la *NCh 432Of.71* “Cálculo de la acción de viento sobre las construcciones”, entrega una tabla (Tabla 1), donde se muestran dichas presiones básicas. Una vez obtenida la presión básica correspondiente se debe aplicar un factor de forma que dependerá de la inclinación o de la forma de la superficie solicitada. Es importante destacar que la carga distribuida de intensidad q (Fig.5.1a), será uniforme (rectangular) y se puede calcular tanto en la dirección X como en Y . (q_x, q_y)

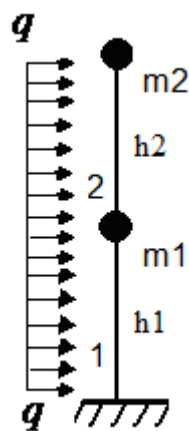


Figura 5.1a

Carga de viento uniformemente distribuida en edificio de dos pisos. (Zalka, 2000).

5.2.2 Carga Sísmica

El método de análisis utilizado para las solicitaciones sísmicas será el estático, método que es señalado en la *NCh 433 Of.96* “Diseño sísmico de edificios”. Si nos detenemos en el punto 6.2.2 de la *NCh 433 Of.96*, podemos ver que el método se asimila a un sistema de fuerzas

horizontales aplicadas en el centro de masa de cada uno de los pisos del edificio. Como vemos en la Fig.5.1b a modo de ejemplo, tenemos un edificio de dos pisos de igual altura, cuyas masas m_1 y m_2 están sometidas a cargas horizontales F_1 y F_2 de diferente magnitud, ya que estas dependen del peso del piso, y de la altura.

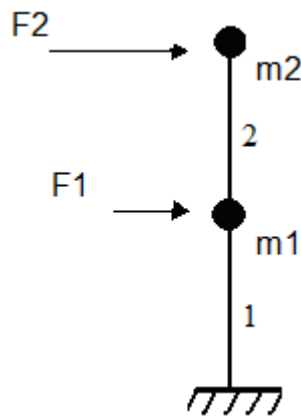


Figura 5.1b

Distribución de cargas horizontales en edificio de dos pisos. (Zalka, 2000).

En el punto 6.2.3 de la *NCh 433 Of.96* “Diseño sísmico de edificios” se indica como obtener el esfuerzo de corte basal:

$$Q_0 = CIP \quad (5.1a)$$

donde

C : Coeficiente sísmico, definido en 6.3.1 de *NCh 433 Of.96*,

I : Coeficiente de importancia del edificio de acuerdo a clasificación en punto 4.3 de *NCh 433 Of.96*,

P : Peso total del edificio, calculado como indica 6.2.3.3 de *NCh 433 Of.96*.

La sección 6.2.5 de la *NCh 433 Of.96*, señala el cálculo de las fuerzas horizontales F_k . Debe tenerse en cuenta que la sumatoria de las fuerzas horizontales F_k es igual al esfuerzo de corte basal Q_0 . Lo anterior es una aproximación para efectos de modelación, ya que en la realidad existen cargas horizontales de menor magnitud que actúan sobre los pilares 1 y 2, además de las cargas horizontales F_k , que actúan en los centros de masa de cada piso, (Fig. 5.1c.) por lo tanto una buena aproximación de esta distribución de cargas horizontales sería una carga distribuida trapezoidal, (Fig. 5.2.) donde la resultante R^* de la carga distribuida debe ser igual a Q_0 .

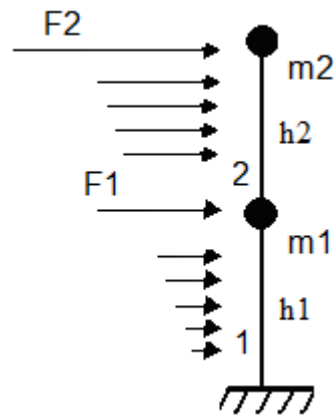


Figura 5.1c

Distribución de cargas horizontales sobre pilares y centro de masa en edificio de dos pisos. (Zalka, 2000).

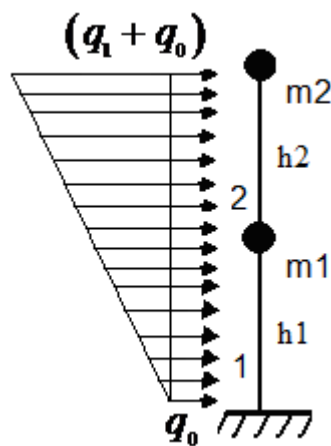


Figura 5.2

Carga distribuida trapezoidal como aproximación de distribución de cargas horizontales F_k . (Zalka, 2000).

Como el valor de la fuerza resultante R^* es el área del trapecio, y basándose en la configuración mostrada en la sección 5.2 de dicha distribución de carga, entonces:

$$R^* = \left(\frac{2q_0 + q_1}{2} \right) H \quad (5.1b)$$

Para obtener el valor de R^* , será fundamental conocer las intensidades de carga q_0 y q_1 , que más adelante serán definidas (sección 5.2), para esto, lo primero será determinar q_0 . Si observamos la Fig. 5.1c, podemos notar que F_1 es la fuerza resultante de la carga uniformemente distribuida desde la mitad de h_1 hasta la mitad de h_2 , para ajustarse al modelo (definido en la sección 5.2), esta distribución de carga se supone desde la base del edificio ($H=0$). Como sabemos que la altura de todos los pisos del edificio es la misma, entonces:

$$q_0 = \frac{F_1}{h_1} \quad (5.1c)$$

donde

F_1 : es la carga horizontal del primer piso del edificio, definido en 6.2.5 de la
NCh 433 Of.96,

h_1 : es la altura del primer piso del edificio.

Luego se debe cumplir que $R^* = Q_0$, entonces:

$$q_1 = 2 \left(\frac{Q_0}{H} - q_0 \right) \quad (5.1d)$$

De esta forma obtenemos las intensidades de la carga sísmica que solicita al edificio.

5.3 Modelo de Carga Distribuida para Método de Zalka

El edificio es reemplazado por la columna equivalente para el primer paso del análisis. Para realizar dicho análisis es necesario que la columna sea sometida a una carga horizontal de distribución trapezoidal (caso general), cuya intensidad es:

$$q(z) = q_0 + q_1 \frac{z}{H} = q_0 \left(1 + \mu \frac{z}{H} \right) \quad (5.2)$$

donde

q_0 : es la intensidad de la parte uniforme de la carga,

$(q_0 + q_1)$: es la intensidad de la carga en la parte superior de la estructura (Fig. 5.3),

μ : es la razón de la función de carga,

H : es la altura del edificio.

$$\mu = \frac{q_1}{q_0} \quad (5.3)$$

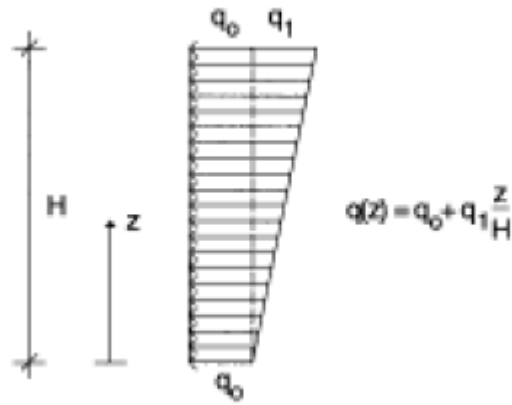


Figura 5.3
Carga horizontal de distribución trapezoidal. (Zalka, 2000).

Cuando el sistema resistente es reemplazado por la columna equivalente para el análisis, la carga horizontal es transferida al eje del centro de corte, donde se descompone en q_x y q_y , paralelos al eje x e y (Fig. 5.4). La carga externa es definida por dos componentes de carga (q_x y q_y) y el momento torsional (m_z):

$$q_x(z) = q_{0x} + q_{1x} \frac{z}{H} = q_{0x} \left(1 + \mu \frac{z}{H} \right) \quad (5.4)$$

$$q_y(z) = q_{0y} + q_{1y} \frac{z}{H} = q_{0y} \left(1 + \mu \frac{z}{H} \right) \quad (5.5)$$

$$m_z(z) = eq(z) + eq_0 \left(1 + \mu \frac{z}{H} \right) = m_{z0} \left(1 + \mu \frac{z}{H} \right) \quad (5.6)$$

o usando los componentes de carga

$$m_z(z) = q_x y_c + q_y x_c = (q_{0x} y_c + q_{0y} x_c) \left(1 + \mu \frac{z}{H} \right) \quad (5.7)$$

combinando (5.6) y (5.7)

$$m_{z0}(z) = eq_0 = q_{0x} y_c + q_{0y} x_c \quad (5.8)$$

es el momento torsional de la parte uniforme de la carga.

e : es la distancia perpendicular entre la línea de acción de la carga horizontal y el centro de corte,

q_{0x}, q_{0y} : son las componentes de la parte uniforme de la carga,

q_{1x}, q_{1y} : son las componentes de la parte triangular de la carga, (Fig. 5.4)

y x_c e y_c fueron definidas en la fórmula (2.9).

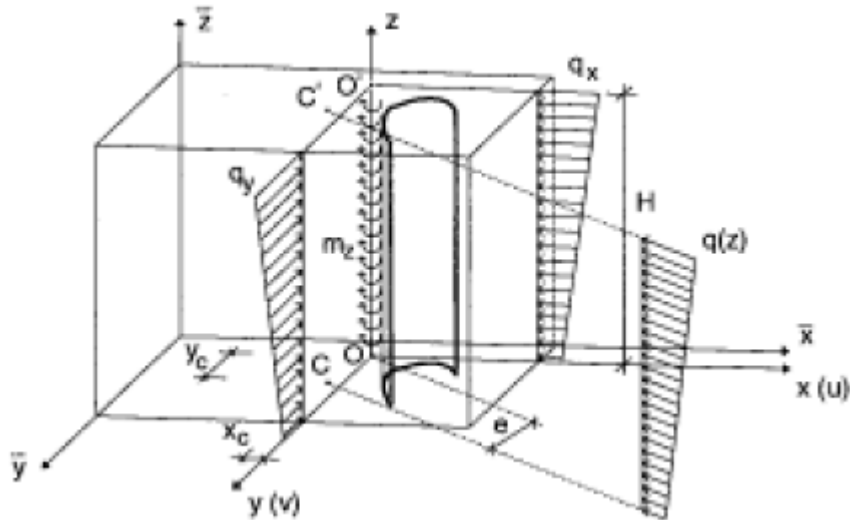


Figura 5.4

La columna equivalente y su carga externa. (Zalka, 2000).

5.3.1 Deformación de la Columna Equivalente

5.3.1.1 Desplazamientos Horizontales

Los desplazamientos en dirección x e y son:

$$u(z) = \frac{\bar{q}_x}{E} (Z_1 + \mu Z_2) \quad (5.9)$$

$$v(z) = \frac{\bar{q}_y}{E} (Z_1 + \mu Z_2) \quad (5.10)$$

donde

$$Z_1 = \frac{z^4}{24} - \frac{Hz^3}{6} + \frac{H^2 z^2}{4} \quad Z_2 = \frac{z^5}{120H} - \frac{Hz^3}{12} + \frac{H^2 z^2}{6} \quad (5.11)$$

son funciones auxiliares y

$$\bar{q}_x = \frac{I_x q_{0x} - I_{xy} q_{0y}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad \bar{q}_y = \frac{I_y q_{0y} - I_{xy} q_{0x}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (5.12)$$

son funciones auxiliares de carga.

Los desplazamientos máximos se desarrollan en la parte superior y son obtenidos sustituyendo H por z en la fórmula (5.9) a (5.11).

$$u_{\max} = u(H) = \frac{\bar{q}_x}{E} \left(\frac{1}{8} + \mu \frac{11}{120} \right) H^4 \tag{5.13}$$

$$v_{\max} = v(H) = \frac{\bar{q}_y}{E} \left(\frac{1}{8} + \mu \frac{11}{120} \right) H^4 \tag{5.14}$$

5.3.1.2 Rotaciones

La rotación asume el máximo valor en $z=H$. (altura total del edificio)

$$\varphi_{\max} = \frac{m_{z_0} H^2}{GJ} \left(\frac{(1+\mu) \cosh(k-1)}{k^2 \cosh(k)} - \left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{k^2}\right) \frac{\tanh(k)}{k} + \frac{1}{2} + \frac{\mu}{3} - \frac{\mu}{k^2} \right) \tag{5.15}$$

donde k, μ y m_{z_0} fueron definidas por las fórmulas (4.20), (5.3) y (5.8) respectivamente.

5.3.2 Deformación del Edificio

5.3.2.1 Desplazamientos Horizontales

Anteriormente vimos los desplazamientos horizontales (u y v) que experimenta la columna equivalente, (y por lo tanto el centro de corte) debido a la carga q , y su correspondiente rotación alrededor del centro de corte. Dicha rotación produce desplazamientos horizontales adicionales en el edificio como se aprecia en la Fig. 5.5. Los puntos A, A', B y B' muestran los máximos desplazamientos.

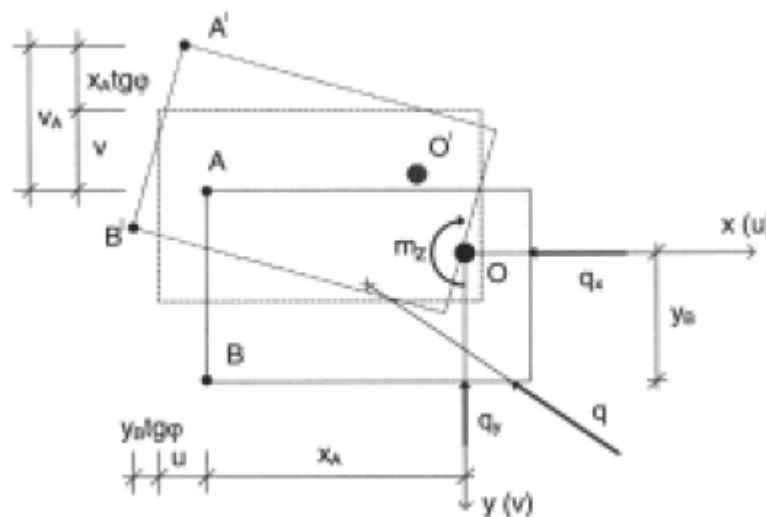


Figura 5.5
Máximos desplazamientos en los puntos A y B. (Zalka, 2000).

$$v_{edif} = v_A = v + x_A \tan \varphi \qquad u_{edif} = u_B = u + y_B \tan \varphi \tag{5.16}$$

donde

x_A, y_B : son las coordenadas de los puntos de la esquina A y B,

φ : es la rotación.

El rango comúnmente aceptado para desplazamientos máximos es de 0.0016 a 0.0035 veces la altura del edificio, esto depende de la altura del edificio y la magnitud de la presión del viento.

Según The Committee on Wind Bracing of the American Society of Civil Engineers, un sistema resistente es normalmente adecuado si las siguientes condiciones son satisfechas.

(Zalka, 2000).

$$u_{\max} \leq \frac{H}{500} \quad \text{y} \quad v_{\max} \leq \frac{H}{500} \quad (5.17)$$

5.4 Distribución de Carga entre Elementos Resistentes

Las tensiones en los elementos resistentes no deben exceder su valor límite. La magnitud de las tensiones en los elementos resistentes individuales básicamente dependen de cuánto aproveche el elemento en cuestión las partes de las cargas externas totales.

La determinación de la distribución de carga es por lo tanto una parte importante del procedimiento de diseño si los elementos resistentes individuales van a ser clasificados correctamente.

5.4.1 Fuerzas de Corte Máximo

Las fuerzas de corte máximas que desarrolla en la base ($z=0$) los elementos resistentes:

$$T_{x,i}^{\max} = T_{x,i}(0) = H\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)(I_{y,i}\bar{q}_x + I_{xy,i}\bar{q}_y) - \frac{I_{y,i}y_i - I_{xy,i}x_i}{I_{\omega}} m_{z0} H \eta_{T\max} \quad (5.18)$$

$$T_{y,i}^{\max} = T_{y,i}(0) = H\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)(I_{x,i}\bar{q}_y + I_{xy,i}\bar{q}_x) + \frac{I_{x,i}x_i - I_{xy,i}y_i}{I_{\omega}} m_{z0} H \eta_{T\max} \quad (5.19)$$

donde

$$\eta_{T\max}(k, \mu) = \left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{k^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\cosh k}\right) + (1 + \mu)\frac{\tanh k}{k} \quad (5.20)$$

es el factor de fuerza de corte máximo total cuyos valores son dados en la Fig.5.6 y la Tabla 5.2 como función de k y μ .

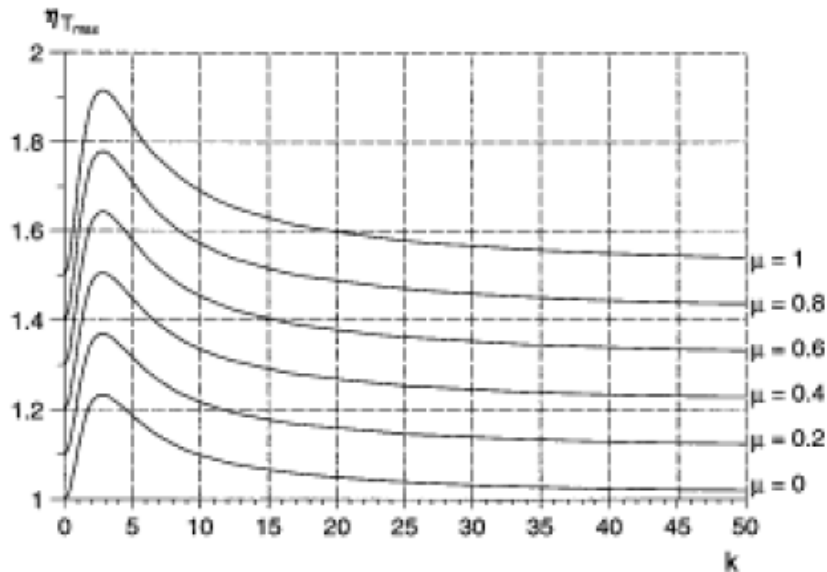


Figura 5.6

Factor de fuerza de corte $\eta_{T_{\max}}$ para fuerza de corte máxima, debido a rotación. (Zalka, 2000).

5.4.2 Momentos Flectores Máximos

El momento flector máximo que se desarrolla en la base de los elementos resistentes es:

$$M_{x,i}^{\max} = M_{x,i}(0) = -\frac{H^2}{2} \left(1 + \frac{2\mu}{3}\right) (I_{y,i} \bar{q}_x + I_{xy,i} \bar{q}_y) + \frac{I_{y,i} y_i - I_{xy,i} x_i}{I_{\omega}} \frac{m_{z0} H^2}{2} \eta_{M_{\max}} \quad (5.21)$$

$$M_{y,i}^{\max} = M_{y,i}(0) = -\frac{H^2}{2} \left(1 + \frac{2\mu}{3}\right) (I_{x,i} \bar{q}_y + I_{xy,i} \bar{q}_x) - \frac{I_{x,i} x_i - I_{xy,i} y_i}{I_{\omega}} \frac{m_{z0} H^2}{2} \eta_{M_{\max}} \quad (5.22)$$

donde

$$\eta_{M_{\max}} = 2 \left\{ (1 + \mu) \left(\frac{1}{k^2 \cosh k} - \frac{1}{k^2} + \frac{\tanh k}{k} \right) + \left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{k^2}\right) \left(\frac{\tanh k}{k} - \frac{1}{\cosh k} \right) \right\} \quad (5.23)$$

5.4.3 Momentos Torsores

La resistencia torsional de los elementos resistentes es suministrada por la rigidez torsional de Saint Venant y la rigidez de alabeo.

Los momentos torsionales en los elementos individuales se desarrollan según sus rigideces torsionales correspondientes:

$$M_{t,i}(z) = \frac{I_{y,i}}{I_y} M_t(z) \quad (5.24)$$

y

$$M_{\omega,i}(z) = \frac{I_{\omega,i}}{I_{\omega}} M_{\omega}(z) \quad (5.25)$$

donde $M_t(z)$ es la parte torsional de Saint-Venant y $M_{\omega}(z)$ es la parte torsional de alabeo del torque total $M_z(z)$:

$$M_z(z) = M_t(z) + M_{\omega}(z) \quad (5.26)$$

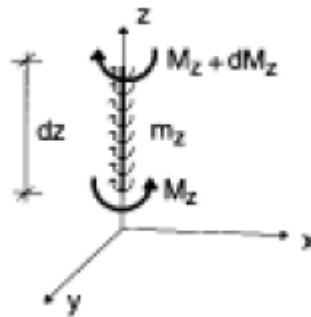


Figura 5.7
Equilibrio torsional de un elemento diferencial. (Zalka, 2000).

Los momentos torsionales de Saint-Venant y de alabeo son

$$M_t = m_{z0} \left\{ H - z + \mu \left(\frac{H}{2} - \frac{z^2}{2H} - \frac{H}{k^2} \right) + \sinh \frac{kz}{H} \left(\left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{k^2} \right) \sinh k + \frac{1+\mu}{k} \right) \frac{H}{\cosh k} - \left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{k^2} \right) H \cosh \frac{kz}{H} \right\} \quad (5.27)$$

y

$$M_{\omega} = m_{z0} \left\{ \frac{\mu H}{k^2} - \sinh \frac{kz}{H} \left(\left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{k^2} \right) \sinh k + \frac{1+\mu}{k} \right) \frac{H}{\cosh k} + \left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{k^2} \right) H \cosh \frac{kz}{H} \right\} \quad (5.28)$$

Haciendo uso de las fórmulas (5.26), (5.27) y (5.28) se obtiene el torque total

$$M_z(z) = m_{z0} \left(H - z + \mu \left(\frac{H}{2} - \frac{z^2}{2H} \right) \right) \quad (5.29)$$

El momento torsional de alabeo máximo es

$$M_{\omega, \max} = M_{\omega}(0) = m_{z0} H \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) \quad (5.30)$$

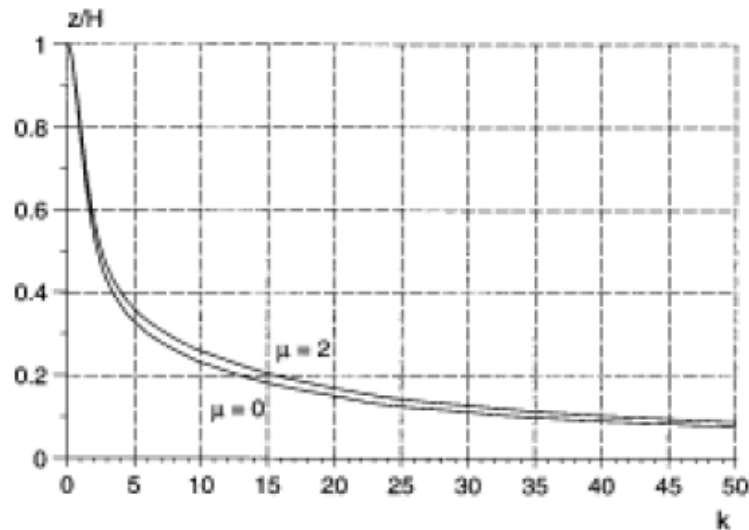


Figura 5.8

Ubicación del momento torsional máximo de Saint-Venant $M_{t, \max}$ sobre la altura. (Zalka, 2000).

5.5 Razón de Carga Crítica Global

Cuando la estructura está sometida a dos sistemas de carga, como por ejemplo a una carga concentrada en la parte superior y una carga uniformemente distribuida sobre los pisos, entonces la razón de carga crítica global asume la forma

$$v = \frac{F}{F_{cr}} + \frac{N}{N_{cr}} \quad (5.31)$$

donde F es la carga concentrada total en la parte superior del edificio, F_{cr} es la carga crítica concentrada correspondiente, N_{cr} es la carga crítica para edificios bajo una carga uniformemente distribuida y

$$N = QLBn \quad (5.32)$$

es la carga vertical uniformemente distribuida total. En la fórmula (5.32), Q es la intensidad de la carga uniformemente distribuida, L y B son las dimensiones de la planta del edificio y n el número de pisos.

Se establece que el recíproco de la razón de carga crítica puede ser considerado un coeficiente de seguridad global. Zalka *et al* (1992).

Basándose en la definición de carga global crítica cualquier valor menor a uno indicaría estabilidad en el edificio, sin embargo es aconsejable limitar dicho valor. Códigos como el *BS5950, 1990; DIN 18800, 1990; Eurocode 3, 1992* recomiendan como valor límite:

(Zalka, 2000). $v \leq 0,1$

Según un método práctico ampliamente aceptado en el diseño estructural de edificios, existe una "línea fundamental absoluta", que establece que el valor del coeficiente de seguridad global debe ser al menos cuatro. Cuando la relación de carga crítica global es usada, esto se traduce como:

(Zalka, 2000).

$$v_{\max} \leq 0,25 \quad (5.33)$$

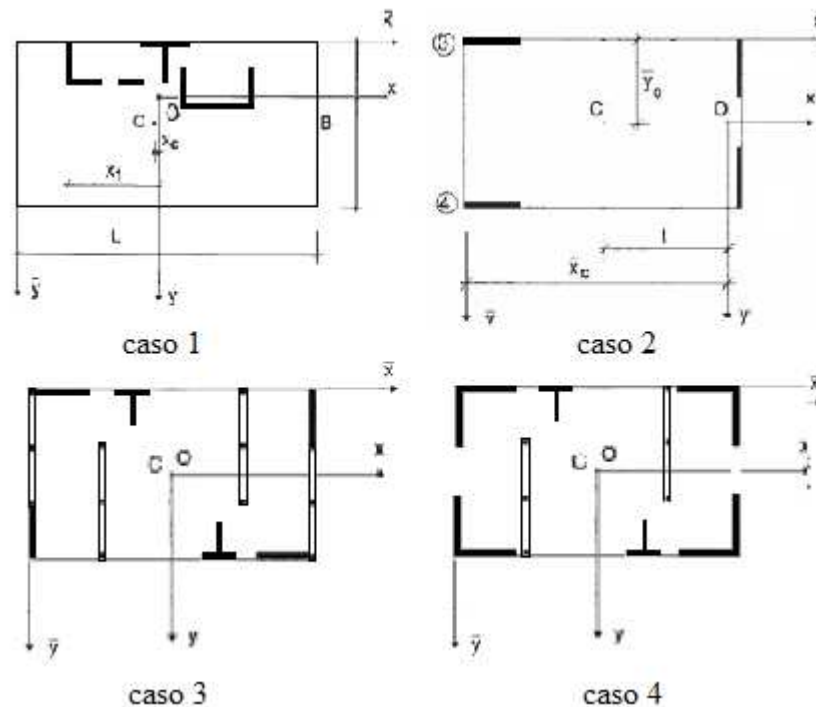
CAPITULO VI

Aplicación del Método de Zalka a 4 casos particulares

6.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es aplicar el método analítico basado en la columna equivalente, sobre cuatro tipos de estructuras, (las tres primeras serán sometidas a cargas de viento y la cuarta a solicitaciones sísmicas) las cuales se diferencian en la distribución y tipos de elementos resistentes. Se debe recordar que para aplicar dichos métodos, la estructura debe cumplir ciertos requisitos detallados en la sección 2.4.

A continuación se muestra la planta para cada caso.



6.2 Características del Modelo

De acuerdo al Código de Diseño de Hormigón Armado (*ICH 2003*)

$$E = \gamma^{1.5} 0,043 \sqrt{f_c'} \quad (6.1)$$

y

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.2)$$

donde

- E : módulo de elasticidad del material en Kgf / cm^2 ,
- γ : densidad del hormigón en Kgf / m^3 ,
- f'_c : resistencia cilíndrica del hormigón en MPa ,
- G : módulo de corte del material en Kgf / cm^2 ,
- ν : módulo de *Poisson* del material.

6.3 Caso 1

6.3.1 Ingreso de Datos

Como se aprecia en la Fig. 6.1, el edificio está estructurado por núcleos en “Z”, “T” y “U” (1, 3 y 4 respectivamente) y un muro de corte en la dirección X (2). Esta distribución es constante en todos los pisos del edificio.

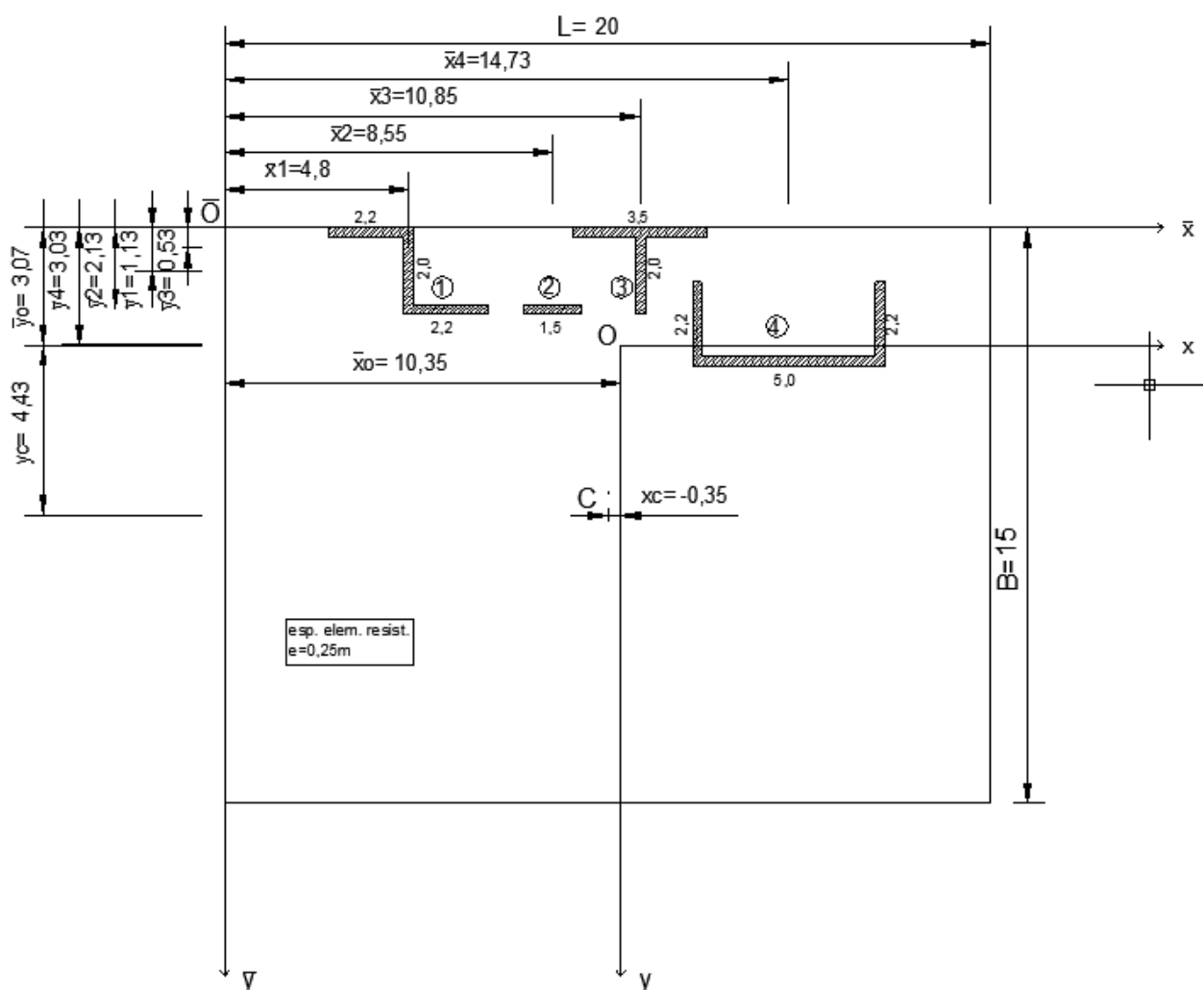


Figura 6.1

Distribución de muros de corte y núcleos en planta de edificio. (Zalka, 2000).

El edificio estudiado es de 5 pisos, los cuales tienen una altura de 3,0 m cada uno, por lo tanto la altura total del edificio es $H=15$ m. El espesor de los muros es de 0,25 m y de la losa es de 0,15m; se asume una calidad H25 para el hormigón, con $f'_c=250$ Kgf / cm² y $\gamma=2.500$ Kgf / m³; el módulo de elasticidad $E=2,68 \times 10^9$ Kgf / m²; el módulo de corte $G=1.13 \times 10^9$ Kgf / m² (módulo de Poisson $\nu=0,18$). Las dimensiones de la planta del edificio son $L=20$ m y $B=15$ m.

La acción del viento sobre la estructura se calcula según las disposiciones de la NCh432.Of71 (INN, 1971). La presión básica del viento se obtiene por interpolación lineal, de la Tabla 1 de la NCh432.Of71.

Teniendo en cuenta las dimensiones de la planta del edificio y lo dispuesto en la Tabla 1 (NCh432.Of71), obtenemos la presión básica del viento por interpolación $q=61,7$ Kgf / m².

Ahora amplificamos q por un factor de forma $C=1,2$, según 9.2.1 de la NCh432.Of71, ya que se asume la acción del viento perpendicular a las caras del edificio.

$$q = 61,7 \times 1,2 = 74,04 \text{ Kgf / m}^2$$

El valor obtenido se multiplica por una de las dimensiones de la planta para obtener la carga uniformemente distribuida tanto en la dirección X como en la Y (Fig. 5.1a). Se puede notar que el valor de q es constante, por lo que $\mu=0$. (fórmula 5.3)

Por lo tanto:

$q_x = 74,04 \times 15 = 1.110,6$ Kgf / m (Carga de viento uniformemente distribuida en la dirección X).

6.3.2 Viento en X

El siguiente paso que debemos seguir es la incorporación de los datos de entrada (celdas color verde) a la planilla elaborada en *Excel*, como las dimensiones de la planta, módulo de elasticidad del material, n° de pisos, etc. En las celdas color celeste están incorporadas las fórmulas que arrojarán los resultados o datos de salida (Fig. 6.2).

Características geométricas del edificio

L (m)	20,0	dimension planta de edif. en dir. X
B (m)	15,0	dimension planta de edif. en dir. Y
n	5,0	numero de pisos del edificio
h (m)	3,0	altura de piso
E (Kgfm ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad material
G (Kgfm ²)	1,13E+09	modulo de corte
μ	0,00	razon de la funcion de carga
γ (Kgfm ³)	2500	densidad del material
e losa (m)	0,15	espesor losa de piso
q ∅x (Kgfm)	1110,60	intensidad de carga unif.distribuida en X
q ∅y (Kgfm)		intensidad de carga unif.distribuida en Y
H (m)	15,0	altura total del edif.
A (m ²)	300,0	area de planta del edif.

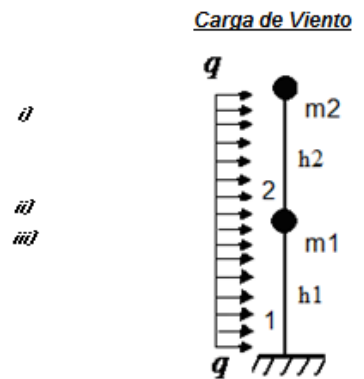


Figura 6.2
Incorporación datos de entrada.

Luego ingresamos las características geométricas del muro de corte, como la altura, espesor, largo y su ubicación en la planta en las celdas de entrada (celdas verdes). Como se aprecia en la Fig. 6.3, obtenemos el momento de inercia con respecto a los ejes *x* e *y*, calculado de la fórmula (2.3).

$$I_x = \frac{(1,5 \times 0,25^3)}{12} = 0,002m^4 \qquad I_y = \frac{(0,25 \times 1,5^3)}{12} = 0,07m^4$$

Las coordenadas del centro de corte del *i*-ésimo elemento resistente (*x_i*), son calculadas de la fórmula (2.6)

$$x_i = 8,55 - 10,37 = -1,816m \qquad y_i = 2,125 - 3,10 = -0,973m$$

$$I_x x_i^2 = 0,002 \times (-1,816)^2 = 0,006m^6 \qquad I_y y_i^2 = 0,07 \times (-0,973)^2 = 0,067m^6$$

La constante de torsión de Saint Venant (*J*), es calculada de la fórmula (2.4).

$$J_i = \frac{1}{3} (0,25^3 \times 1,5) = 0,008m^4$$

La Fig. 6.3 muestra la obtención de las características de rigidez del elemento resistente, cabe recordar que las celdas celestes entregan los datos de salida.

Muro en x	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m ⁴)	$I_{y,i}$ (m ⁴)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i x^2}$ (m ⁶)	$I_{x,i y^2}$ (m ⁶)	J_i (m ⁴)
1	8,550	2,125	3,0	1,5	0,25	0,002	0,070	-1,816	-0,973	0,006	0,067	0,008
2						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Figura 6.3

Incorporación características geométricas y de rigidez de muros de corte.

A continuación ingresamos las características geométricas de los núcleos. En la planilla elaborada en *Excel* se clasificaron cuatro formas diferentes de núcleos ("Z", "L", "T" y "U"), y dentro de cada una de estas formas, según su posición respecto al origen 0 de su eje local (*Tipo 1*, *Tipo 2*, *Tipo 3* y *Tipo 4*). En este caso particular el edificio posee en cada piso, un núcleo "Z", "T" y "U", todos del *Tipo 1*. Lo anterior puede apreciarse en las Fig. 6.4, Fig. 6.5 y Fig. 6.6.

Aplicando el Teorema de Steiner, (Anexo A) obtenemos el momento de inercia con respecto a los ejes x e y del núcleo "Z" *Tipo 1*.

$$I_x = \frac{0,25 \times (2 + 0,25)^3 + (2 \times 2,075 - 0,25) \times 0,25^3}{12} + (2 \times 2,075 - 0,25) \times 0,25 \times \frac{2^2}{4} = 1,217m^4$$

$$I_y = \frac{(2 + 0,25) \times 0,25^3}{12} + \frac{0,25}{6} \times \left(2,075 - \frac{0,25}{2}\right)^3 + 0,25 \times (2 \times 2,075 - 0,25) \times \left(\frac{2,075}{2} + \frac{0,25}{4}\right)^2 = 1,492m^4$$

El cálculo de las coordenadas del centro del núcleo "Z" *Tipo 1* se obtiene de la fórmula (2.6).

$$x_i = 4,8 - 10,37 = -5,56m$$

$$y_i = 1,125 - 3,10 = -1,973m$$

Obteniendo lo anterior, podemos calcular:

$$I_x x_i^2 = 1,217 \times (-5,56)^2 = 37,719m^6$$

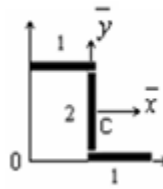
$$I_y y_i^2 = 1,492 \times (-1,973)^2 = 5,804m^6$$

Ahora obtenemos el producto de inercia, la constante de torsión J_i , y la constante de alabeo I_ω (Anexo A).

$$I_{xy} = \frac{2 \times 0,25}{8} \times (4 \times 2,075^2 - 0,25^2) = 1,073m^4$$

$$J_i = \frac{1}{3} (2 \times 2,075 \times 0,25^3 + 0,25^3 \times 2) = 0,032m^4$$

$$I_{\omega} = \frac{2,075^3 \times 2^2 \times 0,25}{12} \times \frac{2,075 \times 0,25 + 2 \times 2 \times 0,25}{2 \times 2,075 \times 0,25 + 2 \times 0,25} = 0,735m^6$$



	Coord. Global		Centroide (eje local)		
Nucleo "Z"	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	\bar{x} (m)	\bar{y} (m)	$I_{x,i}$ (m4)
Tipo 1	4,800	1,125	2,075	1,125	1,217
Muro	Lm (m)	e (m)	h (m)	A (m2)	$I_{y,i}$ (m4)
1	2,20	0,25	3,00	0,55	1,492
2	1,75	0,25	3,00	0,44	$I_{\omega,i}$ (m6)
					0,735
x_i (m)	y_i (m)	$I_{xy,i}$ (m4)	$I_{x,i} \times 2$ (m6)	$I_{x,i} y_2$ (m6)	J_i (m4)
-5,566	-1,973	1,073	37,719	5,804	0,032

Figura 6.4 Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "Z" Tipo I.

Luego, se realiza el mismo procedimiento descrito, para el núcleo "T" Tipo I, usando las fórmulas correspondientes para cada uno de los núcleos.

En primer lugar calcularemos los parámetros auxiliares dispuestos en el Anexo A para esta figura. (núcleo "T" Tipo I).

$$A_f = 3,5 \times 0,25 = 0,875m^2$$

$$A_a = 0,25 \times 0,25 = 0,0625m^2$$

$$A_g = 0,25 \times \left(2 - \frac{0,25}{2} - \frac{0,25}{2} \right) = 0,4375m^2$$

Por lo tanto:

$$A = 0,875 + 0,0625 + 0,4375 = 1,375m^2$$

$$e = \frac{0,0625}{1,375} \times 2 + \frac{0,4375}{1,375} \left(1 - \frac{0,25}{4} + \frac{0,25}{4} \right) = 0,409 \quad e^* = 2 - 0,409 = 1,591$$

Ahora obtenemos el momento de inercia con respecto a los ejes x e y del núcleo "T" Tipo I.

$$I_x = \frac{1}{12} \left(0,875 \times 0,25^2 + 0,0625 \times 0,25^2 + 0,4375 \times \left(2 - \frac{0,25}{2} - \frac{0,25}{2} \right)^2 \right) + 0,875 \times 0,409^2$$

$$+ 0,0625 \times 1,591^2 + 0,4375 \times \left(1 - \frac{0,25}{4} + \frac{0,25}{4} - 0,409 \right)^2 = 0,574m^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \times (0,875 \times 3,5^2 + 0,0625 \times 0,25^2 + 0,4375 \times 0,25^2) = 0,896m^4$$

El cálculo de las coordenadas del centro del núcleo "T" Tipo I se obtiene de la fórmula (2.6).

$$x_i = 10,85 - 10,37 = 0,484m \qquad y_i = 0,53 - 3,10 = -2,568m$$

Obteniendo lo anterior, podemos calcular:

$$I_x x_i^2 = 0,574 \times (0,484)^2 = 0,134m^6 \qquad I_y y_i^2 = 0,896 \times (-2,568)^2 = 5,906m^6$$

Dado que el núcleo "T" Tipo I es simétrico respecto a uno de sus ejes, el producto de inercia es nulo.

$$I_{xy} = 0$$

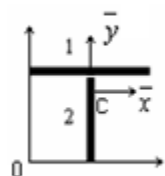
Ahora obtenemos la constante de torsión J_i

$$J_i = \frac{1}{3} (0,875 \times 0,25^2 + 0,0625 \times 0,25^2 + 0,4375 \times 0,25^2) = 0,029m^4$$

y la constante de alabeo I_ω

$$I_\omega = \frac{0,875 \times 3,5^2 \times 0,0625 \times 0,25^2 \times 2^2}{144 \times 0,896} = 0,0013m^6$$

En la Fig. 6.5 se puede apreciar el ingreso de las características geométricas del elemento (celdas verdes), y la obtención de las características de rigidez del mismo. (celdas celestes)



Nucleo "T"	Coord. Global		Centroide (eje local)		$I_{x,i} (m^4)$
	$\bar{x}_i (m)$	$\bar{y}_i (m)$	$\bar{x} (m)$	$\bar{y} (m)$	
Tipo 1	10,850	0,530	1,750	1,716	0,574
Muro	$Lm (m)$	$e (m)$	$h (m)$	$A (m^2)$	$I_{y,i} (m^4)$
1	3,5	0,25	3,00	0,88	0,896
2	2,0	0,25	3,00	0,50	
$x_i (m)$	$y_i (m)$	$I_{\omega,i} (m^6)$	$I_{x,i \times 2} (m^6)$	$I_{x,i \ y 2} (m^6)$	$J_i (m^4)$
0,484	-2,568	0,0013	0,134	5,906	0,029

Figura 6.5 Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo I.

Ahora pasamos al núcleo "U" Tipo I. En primer lugar calcularemos los parámetros auxiliares para esta figura. (Anexo A).

$$A_f = 0,25 \times (5,25 + 0,25) = 1,375m^2$$

$$A_g = 0,25 \times \left(2,075 - \frac{0,25}{2} \right) = 0,488m^2$$

$$A_a = 0$$

Por lo tanto:

$$A = 1,375 + 2 \times 0,488 = 2,35m^2$$

$$e = \frac{1}{2,35} \times \left(0,488 \times \left(2,075 + \frac{0,25}{2} \right) \right) = 0,457 \quad e^* = 2,075 - 0,457 = 1,62$$

Ahora obtenemos el momento de inercia con respecto a los ejes x e y del núcleo "U"

Tipo I.

$$I_x = \frac{1}{12} \left(1,375 \times 0,25^2 + 2 \times 0,488 \times \left(2,075 - \frac{0,25}{2} \right)^2 \right) + 1,375 \times 0,457^2 + 2 \times 0,488 \times \left(\frac{2,075}{2} + \frac{0,25}{4} - 0,457 \right)^2 = 1,006m^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \times \left((1,375) \times (5,25 + 0,25)^2 + 2 \times 0,488 \times 0,25^2 \right) + 0,488 \times \frac{5,25^2}{2} = 10,19m^4$$

El cálculo de las coordenadas del centro del núcleo "U" *Tipo I* se obtiene de la fórmula (2.6).

$$x_i = 14,725 - 10,37 = 4,359m$$

$$y_i = 3,033 - 3,10 = -0,065m$$

Obteniendo lo anterior, podemos calcular:

$$I_x x_i^2 = 1,006 \times (4,359)^2 = 19,12m^6$$

$$I_y y_i^2 = 10,19 \times (-0,065)^2 = 0,043m^6$$

Dado que el núcleo "U" *Tipo I* es simétrico respecto a uno de sus ejes, el producto de inercia es nulo.

$$I_{xy} = 0$$

Para calcular la constante de torsión de alabeo (I_ω), debemos calcular los siguientes parámetros auxiliares dispuestos en el Anexo A.

Como:

$$A_s = 0,25 \times 0,25 = 0,0625 \quad , \quad I_s = \frac{0,25 \times (0,25)^3}{12} = 0,0003 \quad \text{y} \quad A_r = 0,25 \times 0,3 = 0,075$$

Entonces:

$$t^* = \frac{3}{(5,25 - 0,25)} \times \frac{1}{\frac{2,95}{2} \times \left(\frac{1,13 \times 10^9 \times 2,95^2}{12 \times 2,68 \times 10^9 \times 0,0003} + \frac{1}{0,0625} \right) + 5 \times \left(\frac{3}{5} \right)^2 \times \left(\frac{1,13 \times 10^9 \times 5^2}{12 \times 2,68 \times 10^9 \times 0,00056} + \frac{1}{0,075} \right)}$$

$$= 0,00014$$

Ahora calculamos:

$$\psi = \frac{2 \times 5,25 \times 2,075}{\frac{5,25}{0,25} + \frac{5,25}{0,00014} + \frac{2 \times 2,075}{0,25}} = 0,00058$$

Entonces:

$$\omega_1 = -0,00058 \times \frac{5,25}{2 \times 0,25} = -0,006$$

$$\omega_2 = \frac{5,25 \times 2,075}{2} - 0,00058 \times \left(\frac{5,25}{2 \times 0,25} + \frac{2,075}{0,25} \right) = 5,44$$

Con estos parámetros podemos calcular:

$$I_{\omega x} = \frac{5,25^2}{6} \times (-0,004 \times 0,25) + \frac{5,25 \times 2,075 \times 0,25}{2} \times (-0,004 + 5,438) = 7,39$$

Luego:

$$\Omega_1 = -\frac{5,25 \times 7,39}{2 \times 10,190} - 0,004 = -1,91 \quad \text{y} \quad \Omega_2 = -\frac{5,25 \times 7,39}{2 \times 10,190} + 5,438 = 3,53$$

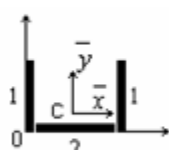
Por lo tanto:

$$I_{\omega} = \frac{2}{3} \times \left[2,075 \times 0,25 \times \left((-1,91)^2 + (-1,91 \times 3,53) + 3,53^2 \right) + 0,5 \times 5,25 \times \left((-1,91)^2 \times 0,25 \right) \right] = 4,804 m^6$$

Ahora calculamos la constante de torsión de Saint Venant (J_i)

$$J_i = \frac{4 \times 2,075^2 \times 5,25^2}{\frac{5,25}{0,25} + \frac{5,25}{0,00014} + \frac{2 \times 2,075}{0,25}} = 0,013m^4$$

En la Fig. 6.6 se puede apreciar el ingreso de las características geométricas del elemento (celdas verdes), y la obtención de las características de rigidez del mismo. (celdas celestes).



	Coord. Global		Centroide (eje local)		
Núcleo "U"	$\bar{x}_i (m)$	$\bar{y}_i (m)$	$\bar{x} (m)$	$\bar{y} (m)$	$I_{x,i} (m^4)$
Tipo 1	14,725	3,033	2,750	0,581	1,006
Muro	$Lm (m)$	$e (m)$	$h (m)$	$A (m^2)$	$I_{y,i} (m^4)$
1	2,20	0,25	3,00	0,55	10,190
2	5,00	0,25	3,00	1,25	
$x_i (m)$	$y_i (m)$	$I_{\omega,i} (m^6)$	$I_{x,i} x2 (m^6)$	$I_{x,i} y2 (m^6)$	$J_i (m^4)$
4,359	-0,065	4,804	19,120	0,043	0,013

Figura 6.6
Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "U" Tipo1.

Las coordenadas \bar{x}_i e \bar{y}_i representan la ubicación del centro de corte de los elementos resistentes individuales (en este caso del muro de corte y los núcleos) en el sistema coordenado $\bar{x} - \bar{y}$. Como se dijo anteriormente ingresando dichas coordenadas, la planilla calcula los momentos de inercia, el producto de inercia, las constantes de torsión de Saint- Venant y de alabeo y las coordenadas del centro de corte de cada elemento, respecto al eje coordenado $(x - y)$, con lo que se obtendrá el centro de corte de la columna equivalente. Los resultados se muestran en la Fig. 6.7. Se puede notar además que la sumatoria del producto de inercia $\sum I_{xy}$ corresponde al producto de inercia del núcleo "Z" Tipo1, ya que en los demás elementos I_{xy} es cero.

Aplicando la fórmula (2.1) y (2.2), tenemos las coordenadas del centro de corte de la columna equivalente.

$$\bar{x}_0 = \frac{1,073 \times (33,208 - 5,15) - 12,647 \times (1,207 - 26,91)}{35,41 - (1,073)^2} = 10,37m$$

$$\bar{y}_0 = \frac{2,8 \times (33,208 - 5,15) - 1,073 \times (1,207 - 26,91)}{35,41 - (1,073)^2} = 3,10m$$

Cuando la ubicación del centro de corte es conocida, el sistema coordenado se traslada al centro de corte, que es donde se sitúa la columna equivalente. La constante de torsión de Saint Venant de la columna equivalente es:

$$\sum J_i = 0,008 + 0,032 + 0,029 + 0,013 = 0,081m^4$$

La constante de torsión de alabeo (fórmula 2.5) de la columna equivalente es:

$$I_\omega = 5,54 + 56,979 + 11,820 - 2 \times [1,073 \times (-5,566) \times (-1,973)] = 50,787m^6$$

Las coordenadas del centro geométrico de la planta del edificio, cuyo origen está en el centro de corte, se obtiene de la fórmula (2.9). El hecho de que x_c e y_c sean distintos de cero, nos indica que el sistema es asimétrico, (Fig. 2.2/a) es decir, desarrolla una combinación de los tres modos básicos (desplazamiento en los planos principales y torsión).

$$x_c = \frac{20}{2} - 10,37 = -0,366m \quad y \quad y_c = \frac{15}{2} - 3,10 = 4,402m$$

Obteniendo lo anterior, se puede calcular la distancia entre el centro de corte (O) y el centro geométrico (C). (fórmula 2.7)

$$t = \sqrt{((-0,366)^2 + (4,402)^2)} = 4,418m$$

El radio de giro se calcula de la fórmula (2.8)

$$i_p = \sqrt{\frac{20^2 + 15^2}{12} + 4,418^2} = 8,462m$$

El valor del parámetro de torsión es obtenido de la fórmula (4.20)

$$k = 15 \times \sqrt{\left(\frac{1,13 \times 10^9 \times 0,081}{2,68 \times 10^9 \times 50,787} \right)} = 0,39$$

En la Fig.6.7 se puede apreciar la entrega de los parámetros anteriormente calculados.

Características de la columna equivalente

Por lo tanto:

\bar{x}_0 (m)	10,37	coordenada x de centro de corte	(2.1)
\bar{y}_0 (m)	3,10	coordenada y de centro de corte	(2.2)
$\Sigma I_{x,i}$ (m4)	2,800	sumatoria de las inercias en X	(2.3)
$\Sigma I_{y,i}$ (m4)	12,647	sumatoria de las inercias en Y	(2.3)
ΣJ_i (m4)	0,081	cte. de torsion de Saint-Venant	(2.4)
$I\omega$ (m6)	50,787	cte. de alabeo	(2.5)
t (m)	4,418	dist. entre centro de corte O y centro geom. C	(2.7)
i_p (m)	8,462	radio de giro	(2.8)
x_c (m)	-0,366	coordenada x de centro geometrico del edif.	(2.9)
y_c (m)	4,402	coordenada y de centro geometrico del edif.	(2.9)
ΣI_{xy}	1,073	sumatoria del producto de inercia	
$\Sigma I_{x,i x^2}$ (m6)	56,979		
$\Sigma I_{x,i y^2}$ (m6)	11,820		
k	0,390	parametro de torsion	(4.20)

Como $x_c = -0,366$
 $y_c = 4,402$ entonces el sistema es: **Asimetrico**

Figura 6.7

Datos de salida de características geométricas y de rigidez.

6.3.3 Análisis de Estabilidad

Producto del ingreso de datos (celdas color verde) en relación a las características geométricas y de rigidez del edificio obtenemos las cargas críticas del edificio en los ejes principales ($N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$), definidas por (4.16). (Fig. 6.8).

$$N_{cr,x} = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 12,647}{(15)^2} = 8,96 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

$$N_{cr,y} = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 2,8}{(15)^2} = 1,98 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

Ahora calculamos el factor de reducción (fórmula 4.17).

$$r_s = \frac{5}{5+1,588} = 0,759 \quad \text{y} \quad k_s = \frac{0,39}{\sqrt{0,759}} = 0,447$$

Carga Crítica

$N_{cr,x}$ (Kgf)	8,96E+08	carga de oscilacion critica en X	(4.16)
$N_{cr,y}$ (Kgf)	1,98E+08	carga de oscilacion critica en Y	(4.16)
r_s	0,759	factor de reduccion (ver tabla 4.1)	(4.17)
k_s	0,447		(4.19)

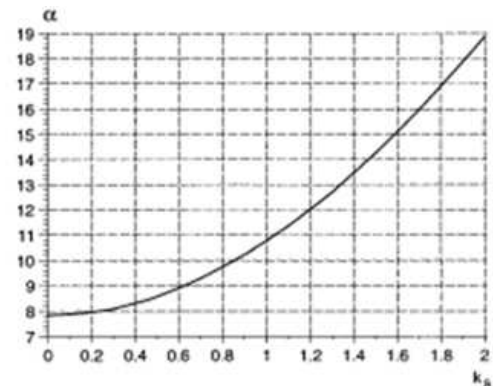
Figura 6.8
Datos de salida de cargas críticas en X e Y.

El factor de reducción r_s definido por (4.17) y la relación entre éste y el factor de torsión, dan origen a k_s definido por (4.19), factor que junto a la Tabla 4.4 permiten encontrar el valor de α interpolando entre los valores cercanos a k_s (Fig. 6.9), todo lo anterior, con el objetivo de poder calcular $N_{cr,\varphi}$, definido por (4.18). (Fig. 6.10).

Para obtener α debemos interpolar entre los valores cercanos a k_s (Tabla 4.4)

$x(1)$	0,400	valor anterior a k_s (ver tabla 4.4)
$x(2)$	0,500	valor posterior a k_s (ver tabla 4.4)
$y(1)$	8,316	valor anterior a α (ver tabla 4.4)
$y(2)$	8,583	valor posterior a α (ver tabla 4.4)
α	8,442	(ver tabla 4.4)

a)



b)

Figura 6.9

a) Interpolación de valores cercanos a k_s , b) Relación entre k_s y α .

La carga crítica asociada al pandeo torsional $N_{cr,\varphi}$ (fórmula 4,18) es

$$N_{cr,\varphi} = \frac{8,442 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 50,787}{8,462^2 \times 15^2} = 5,41 \times 10^7 \text{ Kgf}$$

Los parámetros de excentricidad de carga son calculados por la fórmula (4.25)

con $\tau_x = \frac{0,366}{8,462} = 0,043$ y $\tau_y = \frac{4,402}{8,462} = 0,52$

$r_1 = \frac{5,41 \times 10^7}{8,96 \times 10^8} = 0,060$ y $r_2 = \frac{5,41 \times 10^7}{1,98 \times 10^8} = 0,273$

Como $k_s = 0,447$
 $\alpha = 8,442$, entonces:

$N_{cr, \phi}$ (Kgf)	5,41E+07	carga crítica de pandeo torsional puro	(4.18)
τ_x	0,043	parametro de excentricidad de carga	(4.25)
τ_y	0,520	parametro de excentricidad de carga	(4.25)
$r1$	0,060		(4.26)
$r2$	0,273		(4.26)

Figura 6.10

Datos de salida de carga crítica de pandeo torsional puro.

Puede observarse que x_c e y_c son distintos de cero (Fig. 6.7), lo que indica que el sistema es asimétrico, es decir, que existe acoplamiento de los modos básicos (Fig.2.2/a). Por lo tanto para este caso, la carga crítica del sistema corresponde a una carga crítica de pandeo de oscilación-torsión combinado, definida por la fórmula (4.27). Para que la planilla Excel arroje el valor de N_{cr} , primero debemos calcular el parámetro del modo acoplado κ . Para ello debemos utilizar las tablas del Anexo C, en la cual la ecuación cúbica que define dicho acoplamiento ha sido resuelta para un gran número de razones de cargas críticas básicas.

iii) Asimétrico (Anexo C)

Como $\tau_x = 0,043$ $r1 = 0,060$
 $\tau_y = 0,520$ $r2 = 0,273$

τ_{y1}	0,0	curva anterior a τ_y
τ_{y2}	0,1	curva posterior a τ_y
$r1(1)$	0,0	valor anterior a $r1$ (ver anexo C)
$r1(2)$	0,2	valor posterior a $r1$ (ver anexo C)

Figura 6.11

Datos de entrada interpolación de valores cercanos a r_1 .

generando $\kappa_{(1)}$ y $\kappa_{(2)}$ (Fig.6.12), luego interpolando entre valores cercanos a τ_y , se obtiene κ .

Gracias a este parámetro obtenemos N_{cr} (Fig.6.13).

Interpolando entre valores cercanos a $r1$, para $\tau_y = 0,0$

$y(1)$	1,0000	valor anterior a $k_{(1)}$ (ver anexo C)
$y(2)$	1,0000	valor posterior a $k_{(1)}$ (ver anexo C)
$k(1)$	1,0000	

Interpolando entre valores cercanos a $r1$, para $\tau_y = 0,1$

$y(1)$	0,9980	valor anterior a $k_{(2)}$ (ver anexo C)
$y(2)$	1,0000	valor posterior a $k_{(2)}$ (ver anexo C)
$k(2)$	0,9994	

Figura 6.12

Interpolación de valores cercanos a r_1

Finalmente obtenemos la carga crítica del edificio, calculada de la fórmula (4.27).

$$N_{cr} = 0,9969 \times 5,41 \times 10^7 = 5,40 \times 10^7 \text{ Kgf}$$

Interpolando entre valores cercanos a τ_y

K	0,9969	Parametro de modo acoplado	(4.27)
N_{cr} (Kgf)	5,40E+07	carga critica del edificio	

Figura 6.13
 Datos de salida κ y obtención de N_{cr}

6.3.4 Análisis de Frecuencia

Al igual que en el análisis de estabilidad, el ingreso de datos (celdas color verde) en relación a las características geométricas y de rigidez del edificio nos entrega las frecuencias naturales del edificio (4.36), en dirección paralela a los ejes principales. (Fig. 6.14).

El factor de reducción es

$$r_f = \sqrt{\frac{5}{5 + 2,06}} = 0,842$$

Teniendo r_f , podemos calcular las frecuencias naturales en X e Y.

$$f_x = \frac{0,56 \times 0,842}{(15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 12,647 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 1,395 \text{ Hz}$$

$$f_y = \frac{0,56 \times 0,842}{(15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 2,8 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 0,656 \text{ Hz}$$

f_x (Hz)	1,3946	frecuencia natural en direccion X	(4.37)
f_y (Hz)	0,6562	frecuencia natural en direccion Y	(4.37)
r_f	0,842	ver tabla 4.7	(4.39)

Figura 6.14
 Datos de salida de frecuencias naturales en X e Y.

El factor de torsión k definido por (4.20) y la Tabla 4.8 nos permite encontrar el valor del parámetro de frecuencia η interpolando entre los valores cercanos a k (Fig. 6.15), todo lo anterior, con el objetivo de poder calcular f_φ , definido por (4.40). (Fig. 6.16).

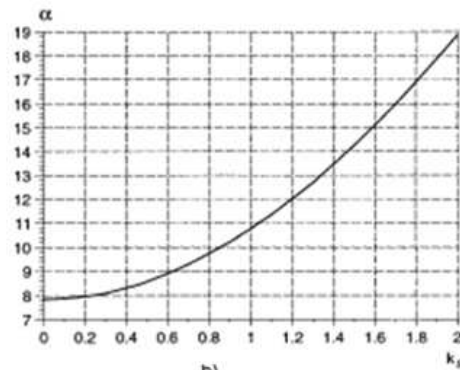
Tabla 4.8

Como $k = 0,390$

Interpolando entre valores cercanos a k (Tabla 4.8)

X(1)	0,30	valor anterior a k	(ver tabla 4.8)
X(2)	0,40	valor posterior a k	(ver tabla 4.8)
y(1)	0,5690	valor anterior a η	(ver tabla 4.8)
y(2)	0,5761	valor posterior a η	(ver tabla 4.8)
η	0,5754	(ver tabla 4.8)	

a)



b)

Figura 6.15

a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y η .

La frecuencia natural para vibración torsional pura es

$$f_\phi = \frac{0,5754 \times 0,842}{8,462 \times (15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 50,787 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 0,339 \text{ Hz}$$

Los parámetros de excentricidad de carga son calculados por la fórmula (4.46)

con $\tau_x = \frac{0,366}{8,462} = 0,043$ y $\tau_y = \frac{4,402}{8,462} = 0,52$

$r_1 = \frac{0,339^2}{1,3946^2} = 0,059$ y $r_2 = \frac{0,339^2}{0,6562^2} = 0,267$

Como $r_f = 0,842$
 $\eta = 0,5754$, entonces:

f_ϕ (Hz)	0,339	frecuencia natural para vibración torsional pura	(4.40)
τ_x	0,043	parametro de excentricidad de carga	(4.46)
τ_y	0,520	parametro de excentricidad de carga	(4.46)
r_1	0,059		(4.47)
r_2	0,267		(4.47)

Figura 6.16

Datos de salida de frecuencia natural para vibración torsional puro.

De manera similar a lo sucedido con las cargas críticas, podemos observar que debido a que el sistema resistente es asimétrico (Fig.2.2/a), existe un acoplamiento de los modos básicos, por lo tanto, la frecuencia fundamental del sistema corresponde a la frecuencia fundamental de pandeo de oscilación-torsión combinada, definida por la fórmula (4.48). Para que la planilla Excel arroje el valor de f , primero debemos calcular el parámetro del modo acoplado κ . Para ello debemos utilizar las tablas del Anexo C, de manera similar a como se utilizó para el análisis de estabilidad.

iii) Asimétrico (Anexo C)
 Como $\tau_x = 0,043$ $r1 = 0,059$
 $\tau_y = 0,520$ $r2 = 0,267$

τ_{y1}	0,0	curva anterior a τ_y
τ_{y2}	0,1	curva posterior a τ_y
$r1(1)$	0,0	valor anterior a $r1$ (ver anexo C)
$r1(2)$	0,2	valor posterior a $r1$ (ver anexo C)

Figura 6.17
 Datos de entrada interpolación de valores cercanos a r_1 .

generando $\kappa_{(1)}$ y $\kappa_{(2)}$ (Fig.6.18), luego interpolando entre valores cercanos a τ_y se obtiene κ . Gracias a este parámetro obtenemos f (Fig.6.19).

Interpolando entre valores cercanos a $r1$, para $\tau_y = 0,0$

$y(1)$	1,0000	valor anterior a $k(1)$ (ver anexo C)
$y(2)$	1,0000	valor posterior a $k(1)$ (ver anexo C)
$k(1)$	1,0000	

Interpolando entre valores cercanos a $r1$, para $\tau_y = 0,1$

$y(1)$	0,9980	valor anterior a $k(2)$ (ver anexo C)
$y(2)$	1,0000	valor posterior a $k(2)$ (ver anexo C)
$k(2)$	0,9994	

Figura 6.18
 Interpolación de valores cercanos a r_1 .

Finalmente obtenemos la frecuencia natural del edificio, calculada de la fórmula (4.48).

$$f = \sqrt{0,9969} \times 0,3393 = 0,3388 \text{ Hz}$$

Por lo tanto:

$$T = \frac{1}{0,3388} = 2,9514 \text{ seg.}$$

Interpolando entre valores cercanos a τ_y

K	0,9969	Parametro de modo acoplado	(4.48)
$f(\text{Hz})$	0,3388	frecuencia natural del edificio	

entonces :

$T(\text{seg})$	2,9514	periodo natural del edificio	(4.38)
-----------------	--------	------------------------------	--------

Figura 6.19
 Datos de salida κ y obtención de f .

6.3.5 Tensiones y Deformación (viento en X)

La acción de la carga de viento uniformemente distribuida (q_x) y el hecho de que el centro geométrico C del edificio, definido por (2.9), no coincide con el centro de corte O definido por (2.1) y (2.2), genera un torque alrededor del centro de corte definido por la fórmula (5.8), mostrado en la Fig. 6.20.

$$m_{z_0} = 1110,6 \times 4,402 + 0 \times (-0,366) = 4,89 \times 10^3 \text{ Kgfm} / m$$

Ahora calculamos los parámetros auxiliares de carga definidos por la fórmula (5.12)

$$\bar{q}_x = \frac{2,8 \times 1110,6}{35,41 - (1,073)^2} = 90,76 \text{ Kgfm} / m \quad \text{y} \quad \bar{q}_y = \frac{-1,073 \times 1110,6}{35,41 - (1,073)^2} = -34,77 \text{ Kgfm} / m$$

Rotacion y deformaciones

m_{z_0} (Kgfm/m)	4,89E+03	torque alrededor del centro de corte	(5.8)
\bar{q}_x (Kgfm/m)	90,76	parametro auxiliar de carga	(5.12)
\bar{q}_y (Kgfm/m)	-34,77	parametro auxiliar de carga	(5.12)

Figura 6.20

Datos de salida de torque producto de la carga de viento.

Como ya se comentó en la sección 5.2.2.1, los desplazamientos máximos de la columna equivalente ocurren en la parte superior de ésta, y son calculados por la fórmula (5.13) y (5.14), la Fig.6.21 da muestra de ello. Así como los desplazamientos máximos se dan en $z=H$, lo mismo ocurre con la rotación máxima φ_{\max} .

$$u_{\max} = \frac{90,77}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} \right) \times 15^4 = 0,0002m \quad \text{y} \quad v_{\max} = \frac{-34,77}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} \right) \times 15^4 = -0,0001m$$

$$\varphi_{\max} = \frac{4,89 \times 10^3 \times 15^2}{1,13 \times 10^9 \times 0,081} \left(\frac{\cosh(0,39) - 1}{0,39^2 \times \cosh(0,39)} - \frac{\tanh(0,39)}{0,39} + \frac{1}{2} \right) = 0,0002rad$$

Entonces: $\varphi_{\max} = 57,3 \times 0,0002 = 0,0123^\circ$

Desplazamientos horizontales en la parte superior de la columna equivalente

$U_{max} (H) (m)$	0,0002	trans. max. en la columna eq. en X	(5.13)
$V_{max} (H) (m)$	-0,0001	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.14)

Rotación del edificio

$\varphi_{max} (rad)$	0,0002	rotación max en radianes	(5.15)
$\varphi_{max} (^\circ)$	0,0123	rotación max en grados	

Figura 6.21

Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.

La rotación calculada anteriormente por la fórmula (5.15) produce un desplazamiento adicional en la parte superior del edificio, definido por la fórmula (5.16).

$$u_{edif} = 0,0002 + 3,10 \times \tan(0,0123) = 0,0009m \quad ,$$

$$v_{edif} = 0,0001 + 10,37 \times \tan(0,0123) = 0,0023m$$

Desplazamientos horizontales máximos del edificio

$U_{edif} (u B) (m)$	0,0009	trans. max. en la columna eq. en X	(5.16)
$V_{edif} (v A) (m)$	0,0023	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.16)

Figura 6.22

Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.

Ahora damos paso al cálculo de las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes (muros de corte y núcleos), que se ubican en la base de dichos elementos, pero antes debemos calcular el factor de fuerza de corte máxima η_{Tmax} definida por la fórmula (5.20), y mostrada en la Fig.6.23.

$$\eta_{Tmax} = 1 - \frac{1}{\cosh(0,39)} + \frac{\tanh(0,39)}{0,39} = 1,024$$

η_{Tmax}	1,024	factor de fuerza de corte max.	(5.20)
η_{Mmax}	1,012	factor de momento flector max.	(5.23)

Figura 6.23

Obtención de factor de carga, factor de corte máximo y factor de momento flector máximo.

Las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes son calculadas por la fórmula (5.18) y (5.19). A continuación se muestra el cálculo de estas para el muro de corte.

$$T_{x,2}^{\max} = \left[15 \times (0,07 \times 90,76) - \frac{0,07 \times (-0,973)}{50,787} \times 4,89 \times 10^3 \times 15 \times 1,024 \right] / 1000 = 0,20 \text{Tonf}$$

$$T_{y,2}^{\max} = \left[15 \times (0,002 \times (-34,77)) + \frac{0,002 \times (-1,816)}{50,787} \times 4,89 \times 10^3 \times 15 \times 1,024 \right] / 1000 = -0,006 \text{Tonf}$$

La Fig. 6.24 y Fig.6.25 muestra las fuerzas de corte para los demás elementos resistentes.

Fuerzas de corte máximas en muros de corte

Muro en x	(5.18)		(5.19)			
	Tx,i (Tonf)		Ty,i (Tonf)			
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
1	0,10	0,10	0,20	0,00	-0,01	-0,01
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.24

Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.

Fuerzas de corte máximas en núcleos

	(5.18)		(5.19)			
	Tx,i (Tonf)		Ty,i (Tonf)			
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
Núcleo "Z"						
Tipo 1	1,47	-4,48	-3,00	0,83	-6,89	-6,06
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"						
Tipo 1	1,22	3,40	4,62	-0,30	0,41	0,11
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"						
Tipo 1	13,87	0,97	14,85	-0,52	6,48	5,96
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	16,66	0,00	16,66	0,00	0,00	0,00

Figura 6.25

Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos.

Como se aprecia en la Fig. 6.24, la fuerza de corte máxima $T_{x,i}$ esta compuesta por dos términos, uno asociado a la fuerza de corte ($q_{x,i}$) producida por el desplazamiento horizontal (u y v) del eje O , y el otro producto de la rotación (m_z) alrededor de O . Esta fuerza de corte alcanza su máximo valor en $z=0$.

En la Fig.6.24 se puede apreciar que a pesar de que la absorción de fuerzas de corte del muro en X es muy pequeña, esta se manifiesta en dicha dirección. Esta deficiencia en la contribución para absorber la fuerza de corte, es debido a que su resistencia a la torsión de alabeo es nula ($I_{\omega,i}=0$).

En la Fig. 6.25 se puede ver que el núcleo “Z” Tipo I, absorbe mayor cantidad de fuerza de corte en dirección Y . Respecto al núcleo “T” Tipo I, este absorbe mayor fuerza en la dirección X . El núcleo “U” Tipo I, posee una gran resistencia a la torsión de alabeo, esto se refleja en que es el elemento resistente que absorbe más fuerza de corte.

La tabla de la planilla *Excel*, muestra los momentos máximos $M_{x,i}$ en cada uno de los elementos (Fig.6.26). El primer término señala los momentos flectores debido a la flexión asimétrica del centro de corte del sistema resistente.

El segundo término representa el efecto de la rotación (m_z) alrededor del centro de corte O , con un factor de momento flector $\eta_{M_{max}}$, que caracteriza la distribución en esa parte del momento flector y es calculado por la fórmula (5.23). (ver Fig. 6.23)

$$\eta_{M_{max}} = 2 \times \left[\left(\frac{1}{(0,39)^2 \times \cosh(0,39)} - \frac{1}{(0,39)^2} + \frac{\tanh(0,39)}{0,39} \right) + \left(\frac{\tanh(0,39)}{0,39} - \frac{1}{\cosh(0,39)} \right) \right] = 1,012$$

Los momentos máximos en cada uno de los elementos resistentes son calculados por la fórmula (5.21) y (5.22). A continuación se muestra el cálculo de estos para el muro de corte.

$$M_{x,2}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0,07 \times 90,76) + \frac{0,07 \times (-0,973)}{50,787} \times \frac{4,89 \times 10^3 \times 15^2}{2} \times 1,012 \right] / 1000 = -1,47 \text{Tonm}$$

$$M_{y,2}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0,002 \times (-34,77)) - \frac{0,002 \times (-1,816)}{50,787} \times \frac{4,89 \times 10^3 \times 15^2}{2} \times 1,012 \right] / 1000 = 0,05 \text{Tonm}$$

La Fig.6.26 y Fig.6.27 muestra los momentos máximos para los demás elementos resistentes.

Momentos máximos en muros de corte

Muro en x	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	-0,72	-0,75	-1,47	0,01	0,04	0,05
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.26
Datos de salida momentos máximos en muros de corte.

Momentos máximos en núcleos

Núcleo	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
Núcleo "Z"						
Tipo 1	-11,04	33,16	22,13	-6,19	51,06	44,87
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"						
Tipo 1	-9,15	-25,20	-34,35	2,24	-3,04	-0,80
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"						
Tipo 1	-104,04	-7,22	-111,26	3,94	-48,05	-44,12
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	-124,94	0,00	-124,94	0,00	0,00	0,00

Figura 6.27
Datos de salida de momentos máximos en núcleos.

Como $k = 0,39$ y $\mu = 0$ (carga horizontal uniformemente distribuida), y utilizando la Tabla 5.3, podemos obtener la ubicación del momento torsor máximo $M_{t,max}$, que es en $z = 14,53$ m, su valor es mostrado en la Tabla de la Fig. 6.38 y calculado por la fórmula (5.27)

$$M_{t,max} = \left[4,89 \times 10^3 \times \left\{ 15 - 14,53 + \sinh(0,39 \times 0,969) \times \left(\sinh(0,39) + \frac{1}{0,39} \right) \times \frac{15}{\cosh(0,39)} - 15 \times \cosh(0,39 \times 0,969) \right\} \right] / 1000 = 1,736 \text{Tonm}$$

Además se asume que el momento torsor de alabeo máximo se produce en $z = 0$, y está definido por la fórmula (5.30).

$$M_{\omega,max} = (4,89 \times 10^3 \times 15) / 1000 = 73,339 \text{Tonm}$$

Momentos Torsores maximos y eficiencia de edificio

Como sabemos: $\mu = 0,00$
 $k = 0,390$

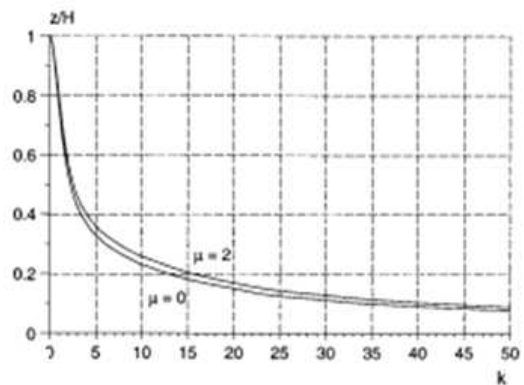
i) Para $\mu = 0, \mu = 0,2, \mu = 0,4, \mu = 0,8, \mu = 1, \mu = 2$

Interpolando entre valores cercanos a k (Tabla 5.3)

$x(1)$	0,300	valor anterior a k	(ver tabla 5.3)
$x(2)$	0,400	valor posterior a k	(ver tabla 5.3)
$y(1)$	0,950	valor anterior a z/H	(ver tabla 5.3)
$y(2)$	0,971	valor posterior a z/H	(ver tabla 5.3)

por lo tanto:

z/H	0,969	(ver tabla 5.3)
$z(m)$	14,53	
$M_{t,max} (Ton m)$	1,736	momento torsional de Saint-Venant
$M_{\omega,max} (Ton m)$	73,339	momento torsional de alabeo



a)

b)

Figura 6.28

a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y z/H .

Recordemos que anteriormente se obtuvieron los desplazamientos horizontales del edificio, definidos por (5.16), (Fig.6.22), evaluando estos desplazamientos respecto a las condiciones señaladas en la sección 5.2.2.1, (fórmula (5.17)) donde se dan a conocer los desplazamientos horizontales máximos, vemos que se satisfacen estas recomendaciones. (Fig. 6.29)

$$u = \frac{15}{500} = 0,03m \quad \text{y} \quad v = \frac{15}{500} = 0,03m$$

u (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)
v (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)

Se puede observar que :

U_{edif} (m)	0,0009	<	0,03	Cumple
V_{edif} (m)	0,0023	<	0,03	Cumple

Figura 6.29

Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.

6.3.6 Viento en Y

Ahora repetimos el procedimiento descrito en 6.3.2, pero esta vez incorporamos la intensidad de la carga de viento distribuida, en la dirección Y. En la Fig. 6.30 se muestra el ingreso de las características geométricas y del material de la estructura, además de la carga propiamente tal.

Recordemos que: $q = 61,7 \times 1,2 = 74,04 \text{ Kg} / \text{m}^2$

Por lo tanto:

$q_y = 74,04 \times 20 = 1480,8 \text{ Kg} / \text{m}$ (Carga de viento uniformemente distribuida en la dirección Y),

Características geométricas del edificio

L (m)	20,0	dimension planta de edif. en dir. X
B (m)	15,0	dimension planta de edif. en dir. Y
n	5,0	numero de pisos del edificio
h (m)	3,0	altura de piso
E (Kg/m ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad material
G (Kg/m ²)	1,13E+09	modulo de corte
μ	0,00	razon de la funcion de carga
γ (Kg/m ³)	2500	densidad del material
e losa (m)	0,15	espesor losa de piso
q_{dx} (Kg/m)		intensidad de carga unif.distribuida en X
q_{dy} (Kg/m)	1480,80	intensidad de carga unif.distribuida en Y
H (m)	15,0	altura total del edif.
A (m ²)	300,0	area de planta del edif.

Datos de entrada (verde)
Datos de salida (azul)

Carga de Viento

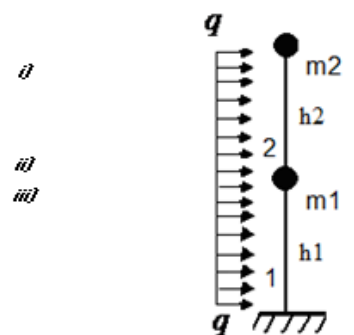


Figura 6.30
Incorporación datos de entrada.

Las características geométricas de los muros de corte, como la altura, espesor, largo y su ubicación en la planta se ingresaron en 6.3.2. (Fig. 6.3). De la misma forma, las características geométricas de los núcleos (“Z”, “T” y “U”) fueron ingresadas en 6.3.2. (Fig. 6.4 a Fig. 6.6).

Con respecto al análisis de estabilidad y de frecuencia, estos ya fueron calculados en la sección 6.3.2.1 y 6.3.2.2 respectivamente.

6.3.7 Tensiones y Deformación (viento en Y)

La acción de la carga de viento uniformemente distribuida (q_y) y el hecho de que el centro geométrico C del edificio, definido por (2.9), no coincide con el centro de corte O definido por (2.1) y (2.2), genera un torque alrededor del centro definido por la fórmula (5.8), mostrado en la Fig. 6.31.

$$m_{z_0} = 1480,8 \times (-0,366) + 0 \times 4,402 = -5,42 \times 10^2 \text{ Kgfm} / m$$

Ahora calculamos los parámetros auxiliares de carga definidos por la fórmula (5.12)

$$\bar{q}_x = \frac{-1,073 \times 1480,8}{35,41 - (1,073)^2} = -46,36 \text{ Kgfm} / m \quad \text{y} \quad \bar{q}_y = \frac{12,647 \times 1480,8}{35,41 - (1,073)^2} = 546,68 \text{ Kgfm} / m$$

m_{z_0} (Kgfm/m)	-5,42E+02	torque alrededor del centro de corte	(5.8)
\bar{q}_x (Kgfm/m)	-46,36	parametro auxiliar de carga	(5.12)
\bar{q}_y (Kgfm/m)	546,68	parametro auxiliar de carga	(5.12)

Figura 6.31

Datos de salida de torque producto de la carga de viento.

Como ya se comentó en la sección 5.2.2.1, los desplazamientos máximos de la columna equivalente ocurren en la parte superior de ésta, y son calculados por la fórmula (5.13) y (5.14), la Fig.6.32 da muestra de ello. Así como los desplazamientos máximos se dan en $z=H$, lo mismo ocurre con la rotación máxima φ_{\max} .

$$u_{\max} = \frac{-46,36}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} \right) \times 15^4 = -0,0001m \quad \text{y} \quad v_{\max} = \frac{546,68}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} \right) \times 15^4 = 0,0013m$$

$$\varphi_{\max} = \frac{-5,42 \times 10^2 \times 15^2}{1,13 \times 10^9 \times 0,081} \left(\frac{\cosh(0,39) - 1}{0,39^2 \times \cosh(0,39)} - \frac{\tanh(0,39)}{0,39} + \frac{1}{2} \right) = 0,000024rad$$

Entonces

$$\varphi_{\max} = 57,3 \times 0,000024 = 0,0014^\circ$$

Desplazamientos horizontales en la parte superior de la columna equivalente

$U_{max} (H) (m)$	-0,0001	trans. max. en la columna eq. en X	(5.13)
$V_{max} (H) (m)$	0,0013	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.14)

Rotación del edificio

$\varphi_{max} (rad)$	0,00002	rotacion max en radianes	(5.15)
$\varphi_{max} (^\circ)$	0,0014	rotacion max en grados	

Figura 6.32

Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.

La rotación calculada anteriormente por la fórmula (5.15) produce un desplazamiento adicional en la parte superior del edificio, definido por la fórmula (5.16).

$$u_{edif} = 0,0001 + 3,10 \times \tan(0,0014) = 0,0002m \quad ,$$

$$v_{edif} = 0,0013 + 10,37 \times \tan(0,0014) = 0,0015m$$

Desplazamientos horizontales maximos del edificio

$U_{edif} (u E)(m)$	0,0002	trans. max. en la columna eq. en X	(5.16)
$V_{edif} (v A)(m)$	0,0015	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.16)

Figura 6.33

Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.

$\eta_{T_{max}}$ fue calculada en la sección 6.3.2.3, Fig. 6.23. Las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes son calculadas por la fórmula (5.18) y (5.19). A continuación se muestra el cálculo de estas para el muro de corte.

$$T_{x,2}^{max} = \left[15 \times (0,07 \times (-46,36)) - \frac{0,07 \times (-0,973)}{50,787} \times -5,42 \times 10^2 \times 15 \times 1,024 \right] / 1000 = -0,06Tonf$$

$$T_{y,2}^{max} = \left[15 \times (0,002 \times 546,68) + \frac{0,002 \times (-1,816)}{50,787} \times -5,42 \times 10^2 \times 15 \times 1,024 \right] / 1000 = 0,02Tonf$$

La Fig. 6.34 y Fig.6.35 muestra las fuerzas de corte para los demás elementos resistentes.

Fuerzas de corte máximas en muros de corte

Muro en x	(5.18)		(5.19)			
	$T_{x,i}$ (Tonf)		$T_{y,i}$ (Tonf)			
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$T_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$T_{y,i}$
1	-0,05	-0,01	-0,06	0,02	0,00	0,02
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.34

Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.

Fuerzas de corte máximas en núcleos

Núcleo	(5.18)		(5.19)			
	$T_{x,i}$ (Tonf)		$T_{y,i}$ (Tonf)			
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$T_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$T_{y,i}$
Núcleo "Z"						
Tipo 1	7,76	0,50	8,25	9,24	0,76	10,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"						
Tipo 1	-0,62	-0,38	-1,00	4,71	-0,05	4,66
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"						
Tipo 1	-7,09	-0,11	-7,19	8,25	-0,72	7,53
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	22,21	0,00	22,21

Figura 6.35

Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos.

Como se aprecia en la Fig. 6.34 y Fig.6.35, la fuerza de corte máxima $T_{x,i}$ esta compuesta por dos términos, uno asociado a la fuerza de corte ($q_{x,i}$) producida por el desplazamiento horizontal (u y v) del eje O, y el otro producto de la rotación (m_z) alrededor de O. Esta fuerza de corte alcanza su máximo valor en $z=0$.

En la Fig.6.34 se puede apreciar que a pesar de que la absorción de fuerzas de corte del muro en X es muy pequeña, esta se manifiesta mayormente en dicha dirección. Esta deficiencia en la contribución para absorber la fuerza de corte, es debido a que su resistencia a la torsión de

alabeo es nula ($I_{\omega,i}=0$).

El la Fig. 6.35 se puede ver que a diferencia del caso anterior, el núcleo “Z” Tipo I, absorbe gran cantidad de fuerza de corte en ambas direcciones. Respecto al núcleo “T” Tipo I, este absorbe mayor fuerza en la dirección Y. El núcleo “U” Tipo I, absorbe prácticamente la misma fuerza en ambas direcciones.

La tabla de la planilla Excel, muestra los momentos máximos $M_{x,i}$ en cada uno de los elementos (Fig.6.36). $\eta_{M_{max}}$, este fue calculado en la sección 6.3.2.3, (ver Fig. 6.23)

Los momentos máximos en cada uno de los elementos resistentes son calculados por la fórmula (5.21) y (5.22). A continuación se muestra el cálculo de estos para el muro de corte.

$$M_{x,2}^{max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0,07 \times (-46,36)) + \frac{0,07 \times (-0,973)}{50,787} \times \frac{(-5,42 \times 10^2) \times 15^2}{2} \times 1,012 \right] / 1000 = 0,45 \text{Tonm}$$

$$M_{y,2}^{max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0,002 \times 546,68) - \frac{0,002 \times (-1,816)}{50,787} \times \frac{(-5,42 \times 10^2) \times 15^2}{2} \times 1,012 \right] / 1000 = -0,12 \text{Tonm}$$

La Fig.6.36 y Fig.6.37 muestra los momentos máximos para los demás elementos resistentes.

Momentos maximos en muros de corte

Muro en x	(5.21) $M_{x,i}$ (Ton m)		(5.22) $M_{y,i}$ (Ton m)			
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
1	0,37	0,08	0,45	-0,12	0,00	-0,12
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.36

Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.

Momentos máximos en núcleos

	(5.21)		(5.22)			
	$M_{x,i}$ (Ton m)		$M_{y,i}$ (Ton m)			
Núcleo "Z"	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
Tipo 1	-58,18	-3,68	-61,86	-69,28	-5,66	-74,94
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
Tipo 1	4,67	2,80	7,47	-35,30	0,34	-34,96
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
Tipo 1	53,14	0,80	53,94	-61,89	5,33	-56,56
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	-166,59	0,00	-166,59

Figura 6.37
 Datos de salida de momentos máximos en núcleos.

Como $k = 0,382$ y $\mu = 0$ (carga horizontal uniformemente distribuida), y utilizando la Tabla 5.3, podemos obtener la ubicación del momento torsor máximo $M_{t,max}$, que es en $z = 14,51$ m, su valor es mostrado en la Tabla de la Fig. 6.38 y calculado por la fórmula (5.27)

$$M_{t,max} = \left[-5,42 \times 10^2 \times \left\{ 15 - 14,53 + \sinh(0,39 \times 0,969) \times \left(\sinh(0,39) + \frac{1}{0,39} \right) \times \frac{15}{\cosh(0,39)} - 15 \times \cosh(0,39 \times 0,969) \right\} \right] / 1000 = -0,193 \text{Tonm}$$

Además se asume que el momento torsor de alabeo máximo se produce en $z = 0$, y está definido por la fórmula (5.30).

$$M_{\omega,max} = (-5,42 \times 10^2 \times 15) / 1000 = -8,136 \text{Tonm}$$

Momentos Torsores maximos y eficiencia de edificio

Como sabemos: $\mu = 0,00$
 $k = 0,390$

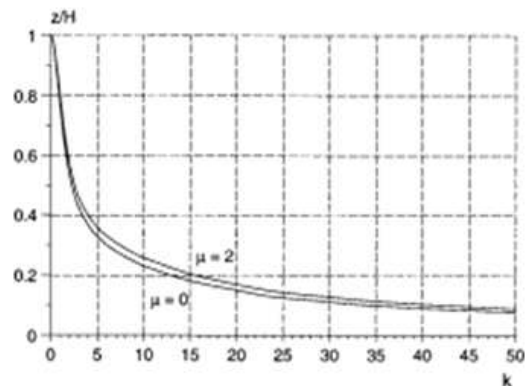
i) Para $\mu=0, \mu=0,2, \mu=0,4, \mu=0,8, \mu=1, \mu=2$

Interpolando entre valores cercanos a k (Tabla 5.3)

$X(1)$	0,300	valor anterior a k	(ver tabla 5.3)
$X(2)$	0,400	valor posterior a k	(ver tabla 5.3)
$y(1)$	0,950	valor anterior a z/H	(ver tabla 5.3)
$y(2)$	0,971	valor posterior a z/H	(ver tabla 5.3)

por lo tanto:

z/H	0,969	(ver tabla 5.3)
$z(m)$	14,53	
$Mt_{max} (Ton m)$	-0,193	momento torsional de Saint-Venant
$M_{\omega,max} (Ton m)$	-8,136	momento torsional de alabeo



(5.27)
 (5.30)

a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y z/H .

Figura 6.38

Recordemos que anteriormente se obtuvieron los desplazamientos horizontales del edificio, definidos por (5.16), (Fig.6.33), evaluando estos desplazamientos respecto a las condiciones señaladas en la sección 5.2.2.1, (fórmula (5.17)) donde se dan a conocer los desplazamientos horizontales máximos, vemos que se satisfacen estas recomendaciones. (Fig. 6.39)

$$u = \frac{15}{500} = 0,03m \quad \text{y} \quad v = \frac{15}{500} = 0,03m$$

$u (m)$	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)
$v (m)$	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)

Se puede observar que :

$U_{edif} (m)$	0,0002	<	0,03	Cumple
$V_{edif} (m)$	0,0015	<	0,03	Cumple

Figura 6.39

Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.

A continuación se entrega a modo de resumen, un cuadro con los indicadores de desempeño del edificio, obtenidos producto de las solicitaciones de viento tanto en el eje X como en el Y.

Viento en X

Indicadores de desempeño

(5.31)

Rotacion max.(°)	Trans. max.(mm)	Razon de trans. max.	Frecuencia natural (Hz)			Razon de carga critica $v=N/Ncr$		
			Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico	Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico
0,0123	2,3075	0,0769	0,0000	0,0000	0,3388	0,0000	0,0000	0,0143

Se debe cumplir que: $v_{max} \leq 0,25$ (5.33)

Por lo tanto: $v= 0,0143$ Cumple!!

Viento en Y

Indicadores de desempeño

(5.31)

Rotacion max.(°)	Trans. max.(mm)	Razon de trans. max.	Frecuencia natural (Hz)			Razon de carga critica $v=N/Ncr$		
			Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico	Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico
0,0014	1,5377	0,0513	0,0000	0,0000	0,3388	0,0000	0,0000	0,0143

Se debe cumplir que: $v_{max} \leq 0,25$ (5.33)

Por lo tanto: $v= 0,0143$ Cumple!!

La intensidad de la carga uniformemente distribuida Q es definida por la fórmula (5.32)

$$Q = \frac{773.906,3}{5 \times 20 \times 15} = 515,9 \text{ Kgf} / \text{m}^2$$

La razón de carga crítica del sistema es calculada por la fórmula (5.31)

$$v = \frac{515,9 \times 20 \times 15 \times 5}{5,4 \times 10^7} = 0,0143$$

Se puede observar que el desplazamiento en dirección X es mayor que en la dirección Y , debido a que en X existe un ángulo de rotación mayor, que a su vez provoca desplazamientos adicionales mayores en tal dirección. Ambos desplazamientos (en X e Y) están dentro del rango permitido. Podemos decir que la eficiencia del sistema resistente es aceptable, sin embargo, puede mejorarse aun más haciendo algunas modificaciones en la ubicación de los elementos resistentes, con el objeto de disminuir la distancia entre el centro de corte O y el centro de masa C , o bien incrementar la rigidez torsional de alabeo del sistema resistente.

6.4 Caso 2

6.4.1 Ingreso de Datos

Como se aprecia en la Fig. 6.40, los muros de corte en la dirección Y son el 1 y 2, por otro lado, los muros de corte en la dirección X son el 3 y 4. Esta distribución es constante en todos los pisos del edificio.

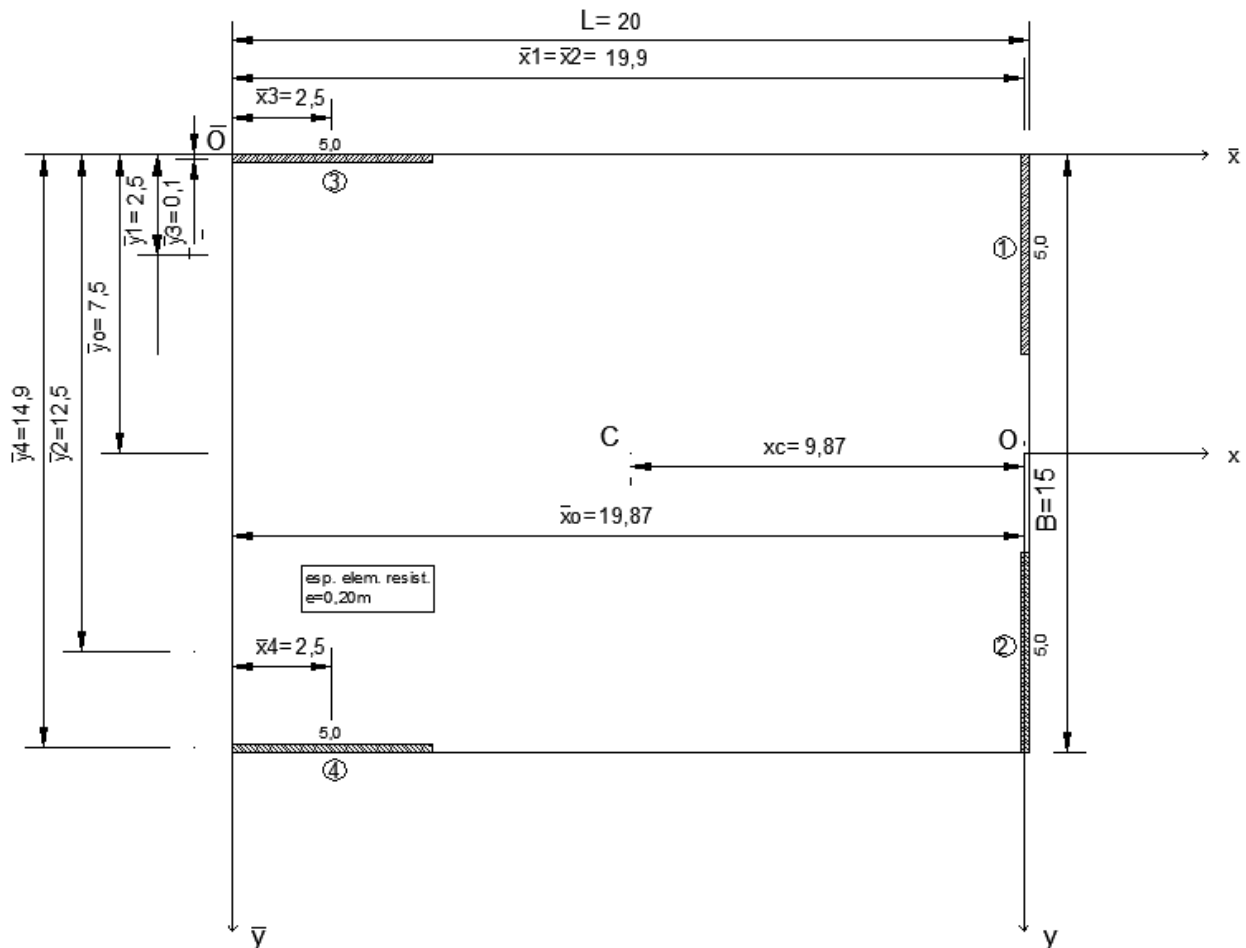


Figura 6.40

Distribución de muros de corte en planta de edificio. (Zalka, 2000).

El edificio estudiado es de 5 pisos, los cuales tienen una altura de $3,0\text{ m}$ cada uno, por lo tanto la altura total del edificio es $H=15\text{ m}$. El espesor de los muros es de $0,20\text{ m}$ y de la losa es de $0,15\text{ m}$; se asume una calidad $H25$ para el hormigón, con $f'_c=250\text{ Kg}/\text{cm}^2$ y $\gamma=2.500\text{ Kg}/\text{m}^3$; el módulo de elasticidad $E=2,68 \times 10^9\text{ Kg}/\text{m}^2$; el módulo de corte $G=1.13 \times 10^9\text{ Kg}/\text{m}^2$ (módulo de Poisson $\nu=0,18$). Las dimensiones de la planta del edificio son $L=20\text{ m}$ y $B=15\text{ m}$.

Teniendo en cuenta las dimensiones de la planta del edificio y lo dispuesto en la Tabla 1 (NCh432.Of71), obtenemos la presión básica del viento por interpolación $q=61,7\text{ Kg}/\text{m}^2$.

Ahora amplificamos q por un factor de forma $C=1,2$, según 9.2.1 de la NCh432.Of71, ya que se asume la acción del viento perpendicular a las caras del edificio.

$$q = 61,7 \times 1,2 = 74,04 \text{ Kgf} / m^2$$

El valor obtenido se multiplica por una de las dimensiones de la planta para obtener la carga uniformemente distribuida tanto en la dirección X como en la Y (Fig. 5.1a). Se puede notar que el valor de q es constante, por lo que $\mu = 0$. (fórmula 5.3)

Por lo tanto:

$q_x = 74,04 \times 15 = 1.110,6 \text{ Kgf} / m$ (Carga de viento uniformemente distribuida en la dirección X),

6.4.2 Viento en X

El siguiente paso que debemos seguir es la incorporación de los datos de entrada (celdas color verde) a la planilla elaborada en Excel, como las dimensiones de la planta, módulo de elasticidad del material, nº de pisos, y por supuesto la intensidad de la carga de viento distribuida, en la dirección X. En las celdas color celeste están incorporadas las fórmulas que arrojarán los resultados o datos de salida (Fig. 6.41).

Características geométricas del edificio

L (m)	20,0	dimension planta de edif. en dir. X
B (m)	15,0	dimension planta de edif. en dir. Y
n	5,0	numero de pisos del edificio
h (m)	3,0	altura de piso
E (Kgf/m ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad material
G (Kgf/m ²)	1,13E+09	modulo de corte
μ	0,00	razon de la funcion de carga
γ (Kgf/m ³)	2500	densidad del material
e losa (m)	0,15	espesor losa de piso
q \varnothing x (Kgf/m)	1110,60	intensidad de carga unif.distribuida en X
q \varnothing y (Kgf/m)		intensidad de carga unif.distribuida en Y
H (m)	15,0	altura total del edif.
A (m ²)	300,0	area de planta del edif.

	Datos de entrada
	Datos de salida

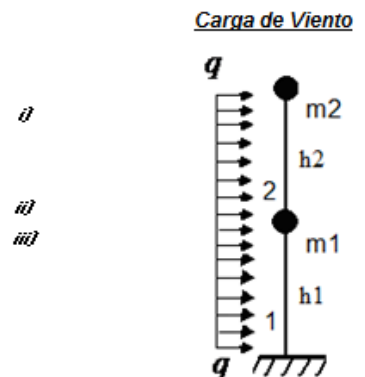


Figura 6.41
Incorporación datos de entrada.

Aplicando la fórmula (2.1) y (2.2), tenemos las coordenadas del centro de corte de la columna equivalente.

$$\bar{x}_0 = \frac{83,335}{4,173} = 19,97m$$

y

$$\bar{y}_0 = \frac{31,29}{4,173} = 7,5m$$

Luego ingresamos las características geométricas de los muros de corte, como la altura, espesor, largo y su ubicación en la planta (Fig. 6.42). Calcularemos las características de rigidez del muro de corte 3.

$$I_x = \frac{(5 \times 0,2^3)}{12} = 0,0033m^4 \qquad I_y = \frac{(0,2 \times 5^3)}{12} = 2,083m^4$$

Las coordenadas del centro de corte del i -ésimo elemento resistente (x_i), son calculadas de la fórmula (2.6)

$$x_i = 2,5 - 19,87 = -17,37m \qquad y \qquad y_i = 0,1 - 7,5 = -7,4m$$

Obteniendo lo anterior podemos calcular

$$I_x x_i^2 = 0,0033 \times (-17,37)^2 = 1,006m^6 \qquad I_y y_i^2 = 2,083 \times (-7,4)^2 = 114,083m^6$$

La constante de torsión de Saint Venant (J), es calculada de la fórmula (2.4).

$$J_i = \frac{1}{3}(0,2^3 \times 5) = 0,013m^4$$

En la Fig.6.42 se muestran los datos de salida, arrojados por la planilla *Excel* de las características de rigidez de los demás elementos resistentes.

Muros de corte

Muro en x	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m4)	$I_{y,i}$ (m4)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i}x_i^2$ (m6)	$I_{x,i}y_i^2$ (m6)	J_i (m4)
1	2,500	0,100	3,0	5,0	0,20	0,003	2,083	-17,372	-7,400	1,006	114,083	0,013
2	2,500	14,900	3,0	5,0	0,20	0,003	2,083	-17,372	7,400	1,006	114,083	0,013
3						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Muro en y	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m4)	$I_{y,i}$ (m4)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i}x_i^2$ (m6)	$I_{x,i}y_i^2$ (m6)	J_i (m4)
1	19,90	2,50	3,00	5,00	0,20	2,083	0,003	0,028	-5,000	0,002	0,083	0,013
2	19,90	12,50	3,00	5,00	0,20	2,083	0,003	0,028	5,000	0,002	0,083	0,013
3						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Figura 6.42
Incorporación características geométricas y de rigidez de muros de corte.

Las coordenadas del centro geométrico se calcula de la fórmula (2.9).

$$x_c = \frac{20}{2} - 19,87 = -9,87m \quad \text{y} \quad y_c = \frac{15}{2} - 7,5 = 0$$

El hecho de que una de las coordenadas sea cero (en este caso $y_c=0$), nos indica que el sistema es simétrico, (Fig. 2.2/b).

Obteniendo lo anterior, se puede calcular la distancia entre el centro de corte (O) y el centro geométrico (C). (fórmula 2.7)

$$t = \sqrt{((-9,87)^2 + (0)^2)} = 9,87m$$

El radio de giro se calcula de la formula (2.8)

$$i_p = \sqrt{\frac{20^2 + 15^2}{12} + 9,87^2} = 12,229m$$

El valor del parámetro de torsión es obtenido de la fórmula (4.20)

$$k = 15 \times \sqrt{\left(\frac{1,13 \times 10^9 \times 0,053}{2,68 \times 10^9 \times 230,349} \right)} = 0,148$$

En la Fig.6.43 se puede apreciar la entrega de los parámetros anteriormente calculados.

Características de la columna equivalente

Por lo tanto:

\bar{x}_0 (m)	19,87	coordenada x de centro de corte	(2.1)
\bar{y}_0 (m)	7,50	coordenada y de centro de corte	(2.2)
$\Sigma I_{x,i}$ (m4)	4,173	sumatoria de las inercias en X	(2.3)
$\Sigma I_{y,i}$ (m4)	4,173	sumatoria de las inercias en Y	(2.3)
ΣJ_i (m4)	0,053	cte. de torsion de Saint-Venant	(2.4)
$I\omega$ (m6)	230,349	cte. de alabeo	(2.5)
t (m)	9,872	dist. entre centro de corte O y centro geom. C	(2.7)
i_p (m)	12,229	radio de giro	(2.8)
x_c (m)	-9,872	coordenada x de centro geométrico del edif.	(2.9)
y_c (m)	0,000	coordenada y de centro geométrico del edif.	(2.9)
ΣI_{xy}	0,000	sumatoria del producto de inercia	
$\Sigma I_{x,i x^2}$ (m6)	2,015		
$\Sigma I_{x,i y^2}$ (m6)	228,333		
k	0,148	parametro de torsion	(4.20)

Como $x_c = -9,872$
 $y_c = 0,000$ entonces el sistema es: **Monosimetrico**

Figura 6.43

Datos de salida de características geométricas y de rigidez.

Como lo indica la tabla de la Fig. 6.43, fueron calculadas las coordenadas del centro de corte O (\bar{x}_0, \bar{y}_0) y las coordenadas del centro geométrico C (x_c, y_c).

6.4.3 Análisis de Estabilidad

Producto del ingreso de datos (celdas color verde) en relación a las características geométricas y de rigidez del edificio obtenemos las cargas críticas del edificio, en los ejes principales ($N_{cr,X}, N_{cr,Y}$), definidas por (4.16). (Fig. 6.44).

$$N_{cr,X} = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 4,173}{(15)^2} = 2,96 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

$$N_{cr,Y} = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 4,173}{(15)^2} = 2,96 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

Ahora calculamos el factor de reducción (fórmula 4.17).

$$r_s = \frac{5}{5 + 1,588} = 0,759$$

y

$$k_s = \frac{0,148}{\sqrt{0,759}} = 0,170$$

Carga Crítica

$N_{cr,x}$ (Kgf)	2,96E+08	carga de oscilacion critica en X	(4.16)
$N_{cr,y}$ (Kgf)	2,96E+08	carga de oscilacion critica en Y	(4.16)
r_s	0,759	factor de reduccion (ver tabla 4.1)	(4.17)
k_s	0,170		(4.19)

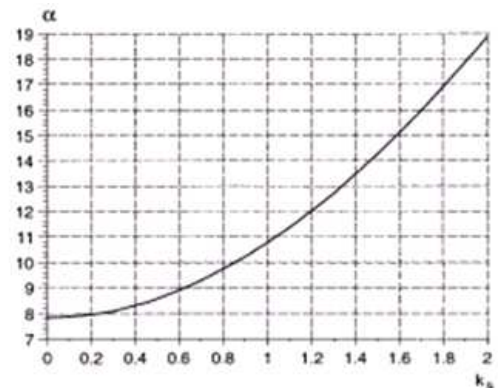
Figura 6.44
Datos de salida de cargas críticas en X e Y.

El factor de reducción r_s definido por (4.17) y la relación entre éste y el factor de torsión, dan origen a k_s definido por (4.19), factor que junto a la Tabla 4.4 permiten encontrar el valor de α interpolando entre los valores cercanos a k_s (Fig. 6.45), todo lo anterior, con el objetivo de poder calcular $N_{cr,\varphi}$, definido por (4.18). (Fig. 6.46).

Para obtener α debemos interpolar entre los valores cercanos a k_s (Tabla 4.4)

$x(1)$	0,100	valor anterior a k_s (ver tabla 4.4)
$x(2)$	0,200	valor posterior a k_s (ver tabla 4.4)
$y(1)$	7,867	valor anterior a α (ver tabla 4.4)
$y(2)$	7,957	valor posterior a α (ver tabla 4.4)
α	7,930	(ver tabla 4.4)

a)



b)

Figura 6.45

a) Interpolación de valores cercanos a k_s , b) Relación entre k_s y α .

La carga crítica asociada al pandeo torsional $N_{cr,\varphi}$ (fórmula 4,18) es

$$N_{cr,\varphi} = \frac{7,930 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 230,349}{12,229^2 \times 15^2} = 1,10 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

Los parámetros de excentricidad de carga son calculados por la fórmula (4.25)

con $\tau_x = \frac{9,872}{12,229} = 0,807$

y

$\tau_y = 0$

$r_1 = \frac{1,10 \times 10^8}{2,96 \times 10^8} = 0,373$

y

$r_2 = \frac{1,10 \times 10^8}{2,96 \times 10^8} = 0,373$

Como $k_s = 0,170$
 $\alpha = 7,930$, entonces:

$N_{cr,\phi}$ (Kgf)	1,10E+08	carga crítica de pandeo torsional puro	(4.18)
τ_x	0,807	parametro de excentricidad de carga	(4.25)
τ_y	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.25)
$r1$	0,373		(4.26)
$r2$	0,373		(4.26)

Figura 6.46

Datos de salida de carga crítica de pandeo torsional puro.

Puede observarse que $y_c = 0$ (Fig. 6.43), lo que indica que el sistema es monosimétrico o de acoplamiento doble (Fig.2.2/b). Por lo tanto sabemos que la carga crítica del edificio será la de menor valor entre la carga crítica independiente $N_{cr,x}$, definida por (4.16) y la carga combinada N_{comb} , definida por la fórmula (4.28). Para que la planilla *Excel* arroje el valor de N_{comb} primero debemos calcular el parámetro del modo acoplado ε , dicho valor depende de τ_x y r_2 , definido por (4.25) y (4.26) respectivamente. En la Fig.6.47 se puede ver que el parámetro de excentricidad de carga τ_x , junto a la Tabla 4.5 nos permite realizar una interpolación lineal entre los valores cercanos a r_2 para las curvas τ_{x1} y τ_{x2} .

ii) Monosimetrico

Tabla 4.5

Como $\tau_x = 0,807$
 $r_2 = 0,373$, entonces:

τ_{x1}	0,8	curva anterior a τ_x
τ_{x2}	0,9	curva posterior a τ_x
$r2(1)$	0,3	valor anterior a r_2 (ver tabla 4.5)
$r2(2)$	0,4	valor posterior a r_2 (ver tabla 4.5)

Figura 6.47

Datos de entrada interpolación de valores cercanos a r_2 .

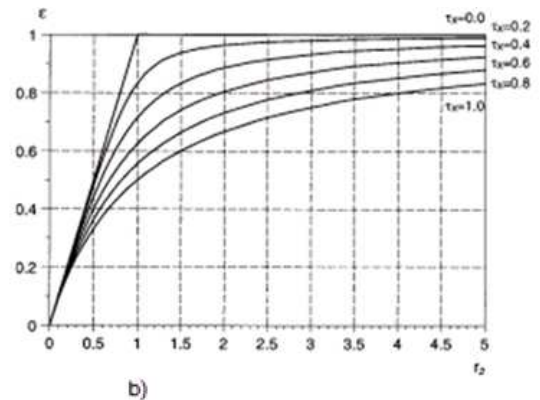
generando $\varepsilon_{(1)}$ y $\varepsilon_{(2)}$ (Fig.6.48), luego interpolando entre valores cercanos a τ_x se obtiene ε . Gracias a este parámetro obtenemos N_{comb} (Fig.6.49)

Interpolando entre valores cercanos a r2, para tx = 0,8

y(1)	0,2478	valor anterior a ε (1) (ver tabla 4.5)
y(2)	0,3105	valor posterior a ε (1) (ver tabla 4.5)
ε (1)	0,2938	

Interpolando entre valores cercanos a r2, para tx = 0,9

y(1)	0,2391	valor anterior a ε (2) (ver tabla 4.5)
y(2)	0,2977	valor posterior a ε (2) (ver tabla 4.5)
ε (2)	0,2821	



a)

b)

Figura 6.48

a) Interpolación de valores cercanos a r2, b) Relación entre r2 y ε .

Finalmente obtenemos la carga crítica del edificio, calculada de la fórmula (4.28).

$$N_{comb} = 0,2929 \times 2,96 \times 10^8 = 8,66 \times 10^7 \text{ Kgf}$$

Interpolando entre valores cercanos a tx (Tabla 4.5)

ε	0,2929	Parametro de modo acoplado
---	--------	----------------------------

Por lo tanto :

N _{comb}	8,66E+07	Carga critica combinada	(4.28)
-------------------	----------	-------------------------	--------

Figura 6.49

Datos de salida ε y obtención de N_{comb}

6.4.4 Análisis de Frecuencia

Al igual que en el análisis de estabilidad, el ingreso de datos (celdas color verde) en relación a las características geométricas y de rigidez del edificio nos entrega las frecuencias naturales del edificio (4.37), en dirección paralela a los ejes principales. (Fig. 6.50).

El factor de reducción es

$$r_f = \sqrt{\frac{5}{5 + 2,06}} = 0,842$$

Teniendo r_f, podemos calcular las frecuencias naturales en X e Y.

$$f_x = \frac{0,56 \times 0,842}{(15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 4,173 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 0,8011 \text{ Hz}$$

$$f_y = \frac{0,56 \times 0,842}{(15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 4,173 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 0,8011 \text{ Hz}$$

Como $r_f = 0,842$
 $\eta = 0,5621$, entonces:

f_ϕ (Hz)	0,489	frecuencia natural para vibración torsional pura	(4.40)
τ_x	0,807	parametro de excentricidad de carga	(4.46)
τ_y	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.46)
r_1	0,372		(4.47)
r_2	0,372		(4.47)

Figura 6.52

Datos de salida de frecuencia natural para vibración torsional puro.

De manera similar a lo sucedido con las cargas críticas, podemos observar que debido a que el sistema resistente es monosimétrico (Fig.2.2/b), la vibración lateral en el plano de simetría f_x , definida por (4.37) es independiente y la frecuencia combinada f_{comb} , definida por la fórmula (4.55) debe ser calculada por la planilla elaborada en Excel. Antes de esto debemos calcular el parámetro del modo acoplado ε , dicho valor depende de τ_x y r_2 , definido por (4.46) y (4.47) respectivamente. En la Fig.6.53 se puede ver que el parámetro de excentricidad de carga τ_x , junto a la Tabla 4.5 nos permite realizar una interpolación lineal entre los valores cercanos a r_2 para las curvas τ_{x1} y τ_{x2} .

ii) Monosimetrico

Tabla 4.5

Como $\tau_x = 0,807$
 $r_2 = 0,372$, entonces:

τ_{x1}	0,80	curva anterior a τ_x
τ_{x2}	0,90	curva posterior a τ_x
$r_{2(1)}$	0,30	valor anterior a r_2 (ver tabla 4.5)
$r_{2(2)}$	0,40	valor posterior a r_2 (ver tabla 4.5)

Figura 6.53

Datos de entrada interpolación de valores cercanos a r_2 .

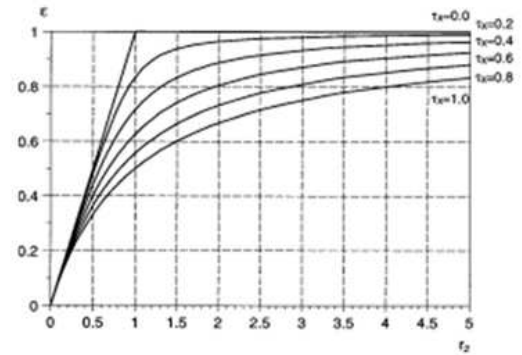
generando $\varepsilon_{(1)}$ y $\varepsilon_{(2)}$ (Fig.6.54), luego interpolando entre valores cercanos a τ_x se obtiene ε . Gracias a este parámetro obtenemos f_{comb} (Fig.6.55)

Interpolando entre valores cercanos a r_2 , para $\tau_x = 0,8$

$y(1)$	0,2478	valor anterior a $\varepsilon(1)$	(ver tabla 4.5)
$y(2)$	0,3105	valor posterior a $\varepsilon(1)$	(ver tabla 4.5)
$\varepsilon(1)$	0,2929		

Interpolando entre valores cercanos a r_2 , para $\tau_x = 0,9$

$y(1)$	0,2391	valor anterior a $\varepsilon(2)$	(ver tabla 4.5)
$y(2)$	0,2977	valor posterior a $\varepsilon(2)$	(ver tabla 4.5)
$\varepsilon(2)$	0,2812		



a) b)

Figura 6.54

a) Interpolación de valores cercanos a r_2 , b) Relación entre r_2 y ε .

Finalmente obtenemos la frecuencia natural del edificio, calculada de la fórmula (4.49).

$$f = \sqrt{0,2920 \times 0,8011} = 0,4329 Hz$$

Por lo tanto:

$$T = \frac{1}{0,4329} = 2,31 seg.$$

Interpolando entre valores cercanos a τ_x (Tabla 4.5)

ε	0,2920	Parametro de modo acoplado
$f_{comb} (Hz)$	0,4329	Frecuencia combinada

(4.49)

entonces :

$T(seg)$	2,3098	periodo natural del edificio
----------	--------	------------------------------

Figura 6.55

Datos de salida ε y obtención de f_{comb}

6.4.5 Tensiones y Deformación (viento en X)

A pesar de que el centro geométrico C del edificio, definido por (2.9), no coincide con el centro de corte O definido por (2.1) y (2.2), el torque alrededor del centro de corte (m_{z_0}) es nulo, ya que la excentricidad provocada por este hecho coincide con la dirección de la acción de la carga de viento uniformemente distribuida (q_x) (Fig. 6.56).

$$m_{z_0} = 1110,6 \times 0 + 0 \times (-9,87) = 0$$

Ahora calculamos los parámetros auxiliares de carga definidos por la fórmula (5.12)

$$\bar{q}_x = \frac{4,173 \times 1110,6}{17,41} = 266,12 \text{ Kgfm/m} \quad \text{y} \quad \bar{q}_y = \frac{0 \times 1110,6}{35,41 - (1,073)^2} = 0$$

Rotacion y deformaciones

m_{z0} (Kgfm/m)	0,00E+00	torque alrededor del centro de corte	(5.8)
\bar{q}_x (Kgfm/m)	266,12	parametro auxiliar de carga	(5.12)
\bar{q}_y (Kgfm/m)	0,00	parametro auxiliar de carga	(5.12)

Figura 6.56
Datos de salida de torque producto de la carga de viento.

Como ya se comentó en la sección 5.2.2.1, los desplazamientos máximos de la columna equivalente ocurren en la parte superior de ésta, la Fig.6.57 da muestra de ello. Así como los desplazamientos máximos se dan en $z=H$, lo mismo ocurre con la rotación máxima φ_{max} .

$$u_{max} = \frac{266,12}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8}\right) \times 15^4 = 0,0006m \quad \text{y} \quad v_{max} = 0$$

$$\varphi_{max} = 0$$

Desplazamientos horizontales en la parte superior de la columna equivalente

U_{max} (H) (m)	0,0006	trans. max. en la columna eq. en X	(5.13)
V_{max} (H) (m)	0,0000	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.14)

Rotacion del edificio

φ_{max} (rad)	0,0000	rotacion max en radianes	(5.15)
φ_{max} (°)	0,0000	rotacion max en grados	

Figura 6.57
Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.

Se puede apreciar que la rotación es nula (Fig.6.57.), por lo tanto no produce un desplazamiento adicional en la parte superior del edificio, definido por la fórmula (5.16).

Desplazamientos horizontales maximos del edificio

U_{edif} (u B) (m)	0,0006	trans. max. en la columna eq. en X	(5.16)
V_{edif} (v A) (m)	0,0000	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.16)

Figura 6.58
Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.

Ahora damos paso al cálculo de las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes (muros de corte), que se ubican en la base de la estructura, pero antes debemos calcular el factor de fuerza de corte máxima $\eta_{T_{max}}$ definida por la fórmula (5.20), y mostrada en la Fig.6.59.

$$\eta_{T_{max}} = 1 - \frac{1}{\cosh(0,146)} + \frac{\tanh(0,146)}{0,146} = 1,004$$

ηT_{max}	1,004	factor de fuerza de corte max.	(5.20)
ηM_{max}	1,002	factor de momento flector max.	(5.23)

Figura 6.59

Obtención de factor de carga, factor de corte máximo y factor de momento flector máximo.

Las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes son calculadas por la fórmula (5.18) y (5.19). A continuación se muestra el cálculo de estas para uno de los muros de corte (muro 3).

$$T_{x,3}^{max} = \left[15 \times (2,083 \times 266,12) - \frac{2,083 \times (-7,4)}{230,349} \times 0 \times 15 \times 1,004 \right] / 1000 = 8,32 \text{Tonf}$$

$$T_{y,3}^{max} = \left[15 \times (0,003 \times 0) + \frac{0,003 \times (-17,37)}{230,349} \times 0 \times 15 \times 1,004 \right] / 1000 = 0$$

La Fig. 6.60 muestra las fuerzas de corte para los demás elementos resistentes

Fuerzas de corte maximas en muros de corte

Muro en x	(5.18) Tx,i (Tonf)		(5.19) Ty,i (Tonf)			
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[ay,i]	[mz]	Ty,i
1	8,32	0,00	8,32	0,00	0,00	0,00
2	8,32	0,00	8,32	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	16,66	0,00	16,66	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.18) Tx,i (Tonf)		(5.19) Ty,i (Tonf)			
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[ay,i]	[mz]	Ty,i
1	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
2	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,02	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00

Figura 6.60

Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.

En la Fig.6.60 se puede ver claramente que los elementos 3 y 4 (muros de corte en dirección X) absorben la mayor parte de la carga en la dirección paralela a su plano de rigidez (eje X), y cero en la dirección perpendicular a este. Al no existir sollicitación en dirección al eje Y, los muros paralelos a este absorben muy poca carga.

La tabla de la planilla *Excel*, muestra los momentos máximos $M_{x,i}$ en cada uno de los elementos (Fig.6.61). El primer término señala los momentos flectores debido a la flexión asimétrica del centro de corte del sistema resistente.

El segundo término representa el efecto de la rotación (m_z) alrededor del centro de corte O, con un factor de momento flector η_M , que caracteriza la distribución en esa parte del momento flector y es calculado por la fórmula (5.23). (ver Fig. 6.59)

$$\eta_{M_{max}} = 2 \times \left[\left(\frac{1}{(0,148)^2 \times \cosh(0,148)} - \frac{1}{(0,148)^2} + \frac{\tanh(0,148)}{0,148} \right) + \left(\frac{\tanh(0,148)}{0,148} - \frac{1}{\cosh(0,148)} \right) \right] = 1,002$$

Los momentos máximos en cada uno de los elementos resistentes son calculados por la fórmula (5.21) y (5.22). A continuación se muestra el cálculo de estos para uno de los muros de corte.

$$M_{x,3}^{max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (2,083 \times 266,12) + \frac{2,083 \times (-7,4)}{230,349} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 1,002 \right] / 1000 = -62,37 \text{Tonm}$$

$$M_{y,3}^{max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0,003 \times 0) - \frac{0,003 \times (-17,37)}{230,349} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 1,002 \right] / 1000 = 0$$

La Fig.6.61 muestra los momentos máximos para los demás elementos resistentes.

Momentos máximos en muros de corte

Muro en x	(5.21)		(5.22)			
	Mx,i (Ton m)		My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	-62,37	0,00	-62,37	0,00	0,00	0,00
2	-62,37	0,00	-62,37	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	-124,94	0,00	-124,94	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.21)		(5.22)			
	Mx,i (Ton m)		My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	-0,10	0,00	-0,10	0,00	0,00	0,00
2	-0,10	0,00	-0,10	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	-124,94	0,00	-124,94	0,00	0,00	0,00

Figura 6.61
 Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.

Como $m_{z_0}=0$, entonces el momento torsor de alabeo máximo definido por la fórmula (5.41). y el momento torsor de alabeo máximo, definido por la fórmula (5.30) también es cero.

$$M_{t,max} = 0 \qquad \text{y} \qquad M_{\omega,max} = 0$$

Recordemos que anteriormente se obtuvieron los desplazamientos horizontales del edificio, definidos por (5.16), (Fig.6.58), evaluando estos desplazamientos respecto a las condiciones señaladas en la sección 5.2.2.1, donde se dan a conocer los desplazamientos horizontales máximos, vemos que se satisfacen estas recomendaciones definidas en (5.17) y mostradas en la Fig. 6.62.

$$u = \frac{15}{500} = 0,03m \qquad \text{y} \qquad v = \frac{15}{500} = 0,03m$$

u (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)
v (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)

Se puede observar que :

U_{edif} (m)	0,0006	<	0,03	Cumple
V_{edif} (m)	0,0000	<	0,03	Cumple

Figura 6.62
 Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.

6.4.6 Viento en Y

Ahora repetimos el procedimiento descrito en 6.4.2, pero esta vez incorporamos la intensidad de la carga de viento distribuida, en la dirección Y. En la Fig. 6.63 se muestra el ingreso de las características geométricas y del material de la estructura, además de la carga propiamente tal.

Recordemos que: $q = 61,7 \times 1,2 = 74,04 \text{ Kgf} / \text{m}^2$

Por lo tanto:

$q_y = 74,04 \times 20 = 1480,8 \text{ Kgf} / \text{m}$ (Carga de viento uniformemente distribuida en la dirección Y),

Características geométricas del edificio

L (m)	20,0	dimension planta de edif. en dir. X
B (m)	15,0	dimension planta de edif. en dir. Y
n	5,0	numero de pisos del edificio
h (m)	3,0	altura de piso
E (Kgf/m ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad material
G (Kgf/m ²)	1,13E+09	modulo de corte
μ	0,00	razon de la funcion de carga
γ (Kgf/m ³)	2500	densidad del material
e losa (m)	0,15	espesor losa de piso
q ∅x (Kgf/m)		intensidad de carga unif.distribuida en X
q ∅y (Kgf/m)	1480,80	intensidad de carga unif.distribuida en Y
H (m)	15,0	altura total del edif.
A (m ²)	300,0	area de planta del edif.



Carga de Viento

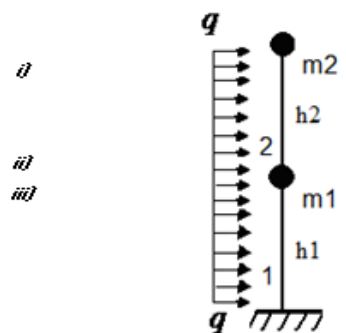


Figura 6.63
Incorporación datos de entrada.

6.4.7 Tensiones y Deformación (viento en Y)

Como se comentó anteriormente en 6.4.2.3, el centro geométrico C del edificio, definido por (2.9), no coincide con el centro de corte O definido por (2.1) y (2.2), esto produce un torque alrededor del centro de corte (m_{z_0}), ya que la excentricidad provocada por este hecho es perpendicular a la acción de la carga de viento uniformemente distribuida (q_y) (Fig. 6.64).

$$m_{z_0} = 1480,8 \times (-9,87) = -1,46 \times 10^4 \text{ Kfm} / \text{m}$$

Ahora calculamos los parámetros auxiliares de carga definidos por la fórmula (5.12)

$$\bar{q}_x = \frac{0 \times 1480,8}{17,41} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{q}_y = \frac{4,173 \times 1480,8}{17,41} = 354,82 \text{ Kgf} / \text{m}$$

m_{zD} (Kgfm/m)	-1,46E+04	torque alrededor del centro de corte	(5.8)
\bar{q}_1 (Kgfm)	0,00	parametro auxiliar de carga	(5.12)
\bar{q}_2 (Kgfm)	354,82	parametro auxiliar de carga	(5.12)

Figura 6.64

Datos de salida de torque producto de la carga de viento.

Como ya se comentó en la sección 5.2.2.1, los desplazamientos máximos de la columna equivalente ocurren en la parte superior de ésta, la Fig.6.65 da muestra de ello. Así como los desplazamientos máximos se dan en $z=H$, lo mismo ocurre con la rotación máxima φ_{\max} .

$$u_{\max} = 0 \quad \text{y} \quad v_{\max} = \frac{354,82}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} \right) \times 15^4 = 0,0008m$$

$$\varphi_{\max} = \frac{-1,46 \times 10^4 \times 15^2}{1,13 \times 10^9 \times 0,053} \left(\frac{\cosh(0,148) - 1}{0,148^2 \times \cosh(0,148)} - \frac{\tanh(0,148)}{0,148} + \frac{1}{2} \right) = 0,000149rad$$

Entonces

$$\varphi_{\max} = 57,3 \times 0,000149 = 0,0085^\circ$$

Desplazamientos horizontales en la parte superior de la columna equivalente

U_{\max} (H) (m)	0,0000	trans. max. en la columna eq. en X	(5.13)
V_{\max} (H) (m)	0,0008	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.14)

Rotacion del edificio

φ_{\max} (rad)	0,0001	rotacion max en radianes	(5.15)
φ_{\max} ($^\circ$)	0,0085	rotacion max en grados	

Figura 6.65

Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.

Se puede apreciar que existe rotación (Fig. 6.65), por lo tanto se produce un desplazamiento adicional en la parte superior del edificio, definido por la fórmula (5.16).

$$u_{edif} = 0 + 7,5 \times \tan(0,0085) = 0,0011m \quad ,$$

$$v_{edif} = 0,0008 + 19,87 \times \tan(0,0085) = 0,0038m$$

Desplazamientos horizontales maximos del edificio

$U_{edif} (u B)(m)$	0,0011	trans. max. en la columna eq. en X	(5.16)
$V_{edif} (v A)(m)$	0,0038	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.16)

Figura 6.66

Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.

$\eta_{T_{max}}$ fue calculada en la sección 6.4.2.3, Fig. 6.59. Las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes son calculadas por la fórmula (5.18) y (5.19). A continuación se muestra el cálculo de estas para uno de los muros de corte (muro 3).

$$T_{x,3}^{max} = \left[15 \times (2,083 \times 0) - \frac{2,083 \times (-7,4)}{230,349} \times -1,46 \times 10^4 \times 15 \times 1,004 \right] / 1000 = -14,73Tonf$$

$$T_{y,3}^{max} = \left[15 \times (0,003 \times 354,82) + \frac{0,003 \times (-17,37)}{230,349} \times -1,46 \times 10^4 \times 15 \times 1,004 \right] / 1000 = 0,07Tonf$$

La Fig. 6.67 muestra las fuerzas de corte para los demás elementos resistentes.

Fuerzas de corte maximas en muros de corte

Muro en x	(5.18) $T_{x,i} (Tonf)$		(5.19) $T_{y,i} (Tonf)$			
	$[qx,i]$	$[mz]$	$T_{x,i}$	$[qy,i]$	$[mz]$	$T_{y,i}$
1	0,00	-14,73	-14,73	0,02	0,06	0,07
2	0,00	14,73	14,73	0,02	0,06	0,07
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	22,21	0,00	22,21

Muro en y	(5.18) $T_{x,i} (Tonf)$		(5.19) $T_{y,i} (Tonf)$			
	$[qx,i]$	$[mz]$	$T_{x,i}$	$[qy,i]$	$[mz]$	$T_{y,i}$
1	0,00	-0,02	-0,02	11,09	-0,06	11,03
2	0,00	0,02	0,02	11,09	-0,06	11,03
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.67

Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.

Se puede ver que los elementos 1 y 2 (muros de corte en dirección Y), absorben la mayor parte de la carga en la dirección paralela a su plano de rigidez (eje Y), y muy poca en la dirección perpendicular a este. Producto de la rotación los muros de corte 3 y 4 (muros de corte en

dirección X), a pesar de que están orientados ortogonalmente a la sollicitación de viento absorben gran parte de la carga.

La tabla de la planilla *Excel*, muestra los momentos máximos $M_{x,i}$ y $M_{y,i}$ en cada uno de los elementos (Fig.6.68). $\eta_{M_{max}}$, este fue calculado en la sección 6.4.2.3, (ver Fig. 6.59)

Los momentos máximos en cada uno de los elementos resistentes son calculados por la fórmula (5.21) y (5.22). A continuación se muestra el cálculo de estos para el muro de corte.

$$M_{x,3}^{max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (2,083 \times 0) + \frac{2,083 \times (-7,4)}{230,349} \times \frac{(-1,46 \times 10^4) \times 15^2}{2} \times 1,002 \right] / 1000 = 110,27 \text{Tonm}$$

$$M_{y,3}^{max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0,003 \times 354,82) - \frac{0,003 \times (-17,37)}{230,349} \times \frac{(-1,46 \times 10^4) \times 15^2}{2} \times 1,002 \right] / 1000 = -0,55 \text{Tonm}$$

La Fig.6.68 muestra los momentos máximos para los demás elementos resistentes.

Momentos maximos en muros de corte

Muro en x	(5.21) Mx,i (Ton m)		Mx,i	(5.22) My,i (Ton m)		
	[qx,i]	[mz]		[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,00	110,27	110,27	-0,13	-0,41	-0,55
2	0,00	-110,27	-110,27	-0,13	-0,41	-0,55
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	-166,59	0,00	-166,59

Muro en y	(5.21) Mx,i (Ton m)		Mx,i	(5.22) My,i (Ton m)		
	[qx,i]	[mz]		[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,00	0,12	0,12	-83,16	0,41	-82,75
2	0,00	-0,12	-0,12	-83,16	0,41	-82,75
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	-166,59	0,00	-166,59

Figura 6.68

Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.

Como $k = 0,148$ y $\mu = 0$ (carga horizontal uniformemente distribuida), y utilizando la Tabla 5.3, podemos obtener la ubicación del momento torsor máximo $M_{t,max}$ en $z = 14,88$ m, su valor es mostrado en la Tabla de la Fig. 6.69. Además se asume que el momento torsor de alabeo máximo se produce en $z = 0$, y esta definido por la fórmula (5.30).

$$M_{t,max} = \left[-1,46 \times 10^4 \times \left\{ 15 - 14,88 + \sinh(0,148 \times 0,992) \times \left(\sinh(0,148) + \frac{1}{0,148} \right) \times \frac{15}{\cosh(0,148)} - 15 \times \cosh(0,148 \times 0,992) \right\} \right] / 1000 = -0,795 \text{Tonm}$$

Además se asume que el momento torsor de alabeo máximo se produce en $z = 0$, y está definido por la fórmula (5.30).

$$M_{\omega,max} = (-1,46 \times 10^4 \times 15) / 1000 = -219,281 \text{Tonm}$$

Momentos Torsores maximos y eficiencia de edificio

Como sabemos: $\mu = 0,00$
 $k = 0,148$

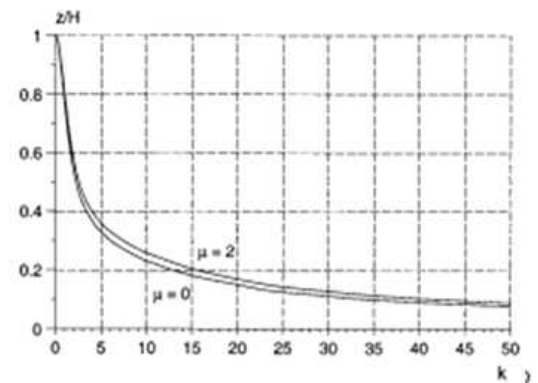
i) Para $\mu = 0, \mu = 0,2, \mu = 0,4, \mu = 0,8, \mu = 1, \mu = 2$

Interpolando entre valores cercanos a k (Tabla 5.3)

$X(1)$	0,100	valor anterior a k	(ver tabla 5.3)
$X(2)$	0,200	valor posterior a k	(ver tabla 5.3)
$y(1)$	0,997	valor anterior a z/H	(ver tabla 5.3)
$y(2)$	0,987	valor posterior a z/H	(ver tabla 5.3)

por lo tanto:

z/H	0,992	(ver tabla 5.3)
$z (m)$	14,88	
$M_t, max (Ton m)$	-0,795	momento torsional de Saint-Venant
$M_{\omega, max} (Ton m)$	-219,281	momento torsional de alabeo



(5.27)
 (5.30)

a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y z/H .

Figura 6.69

Recordemos que anteriormente se obtuvieron los desplazamientos horizontales del edificio, definidos por (5.16), (Fig.6.66), evaluando estos desplazamientos respecto a las condiciones señaladas en la sección 5.2.2.1, donde se dan a conocer los desplazamientos horizontales máximos, vemos que se satisfacen estas recomendaciones definidas en (5.17) y mostradas en la Fig. 6.70.

$$u = \frac{15}{500} = 0,03m \quad \text{y} \quad v = \frac{15}{500} = 0,03m$$

u (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)
v (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)

Se puede observar que :

U_{edif} (m)	0,0011	<	0,03	Cumple
V_{edif} (m)	0,0038	<	0,03	Cumple

Figura 6.70

Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.

A continuación se entrega a modo de resumen, un cuadro con los indicadores de desempeño del edificio, obtenidos producto de las solicitaciones de viento tanto en el eje X como en el Y.

Viento en X

Indicadores de desempeño

Rotacion max.(°)	Trans. max.(mm)	Razon de trans. max.	Frecuencia natural (Hz)			Razon de carga critica $v=N/Ncr$		
			Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico	Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico
0,0000	0,6284	0,0209	0,0000	0,4329	0,0000	0,0000	0,0082	0,0000

Se debe cumplir que: $v_{max} \leq 0,25$ (5.33)

Por lo tanto: $v = 0,0082$ Cumple!!

Viento en Y

Indicadores de desempeño

Rotacion max.(°)	Trans. max.(mm)	Razon de trans. max.	Frecuencia natural (Hz)			Razon de carga critica $v=N/Ncr$		
			Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico	Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico
0,0085	3,7905	0,1264	0,0000	0,4329	0,0000	0,0000	0,0082	0,0000

Se debe cumplir que: $v_{max} \leq 0,25$ (5.33)

Por lo tanto: $v = 0,0082$ Cumple!!

La intensidad de la carga uniformemente distribuida Q es definida por la fórmula (5.32)

$$Q = \frac{712.500}{5 \times 20 \times 15} = 475 \text{ Kg} / \text{m}^2$$

La razón de carga crítica del sistema es calculada por la fórmula (5.31)

$$v = \frac{475 \times 20 \times 15 \times 5}{8,66 \times 10^7} = 0,0082$$

Se puede observar que la sollicitación de carga de viento uniformemente distribuida en dirección Y , provoca un mayor desplazamiento en esa dirección, también se observa que dicha sollicitación produce una rotación en la parte superior de la estructura. Ambas traslaciones (en X e Y) están dentro del rango permitido. Podemos decir que la eficiencia del sistema resistente es mejor que la estructura del caso uno, sin embargo, aun puede mejorarse haciendo algunas modificaciones en la ubicación de los muros de corte, con el objeto de disminuir la distancia entre el centro de corte O y el centro de masa C , o como se dijo anteriormente, incrementar la rigidez torsional de alabeo del sistema resistente.

6.5 Caso 3

6.5.1 Ingreso de Datos

Como se aprecia en la Fig. 6.71, los muros de corte en la dirección Y son el 1 y 4, por otro lado, los muros de corte en la dirección X son el 2 y 3. Los elementos 5, 6, 7 y 8 son marcos empotrados de tres columnas cada uno, y los elementos 9 y 10 son núcleos "T", Tipo 1 y Tipo 3, respectivamente. Esta distribución es constante en todos los pisos del edificio.

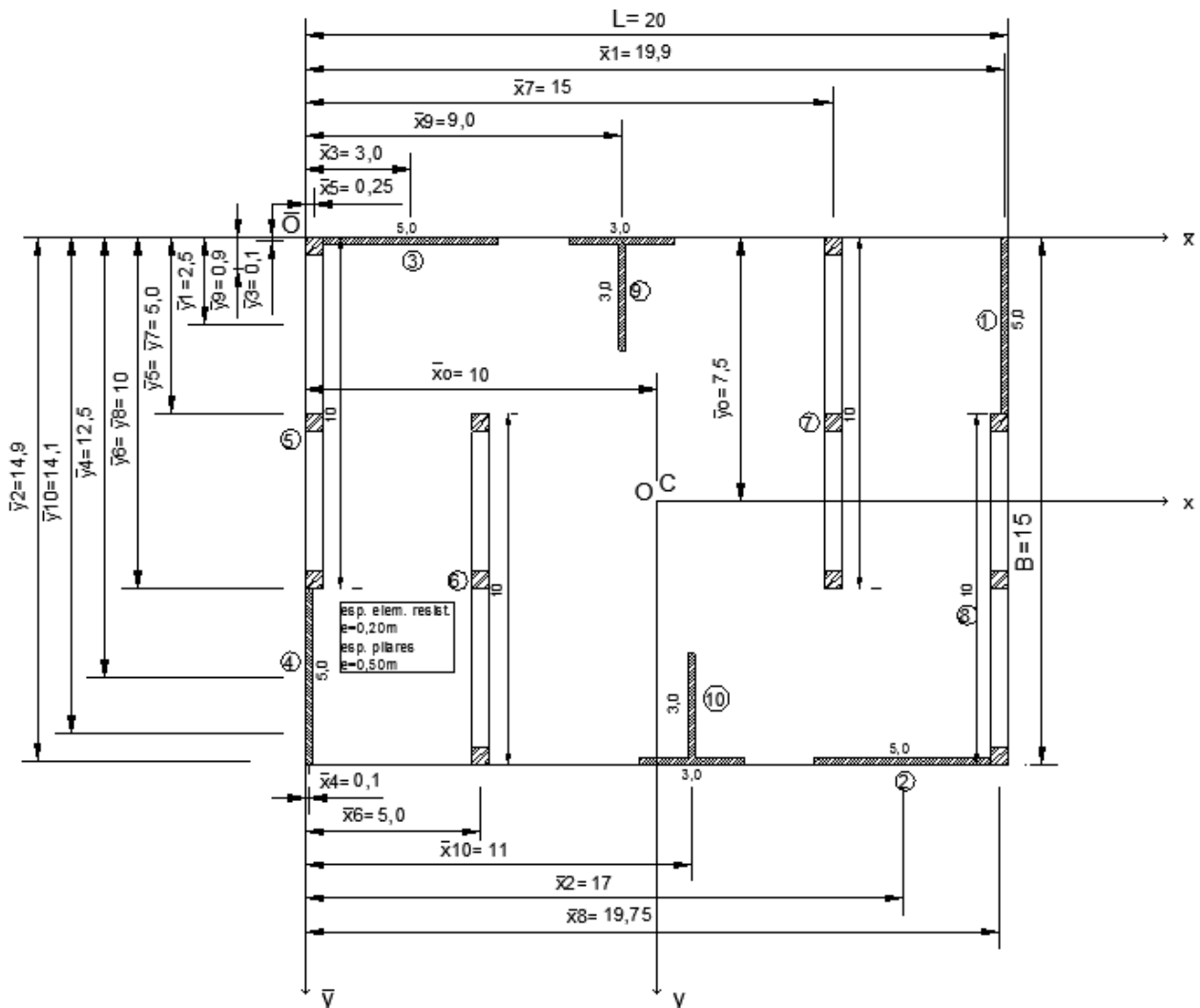


Figura 6.71

Distribución de elementos resistentes en planta de edificio.

El edificio estudiado es de 5 pisos, los cuales tienen una altura de 3 m cada uno, por lo tanto la altura total del edificio es $H=15\text{ m}$. El espesor de los muros y núcleos es de $0,20\text{ m}$ y de la losa es de $0,15\text{ m}$; se asume una calidad $H25$ para el hormigón, con $f'_c=250\text{ Kg}/\text{cm}^2$ y $\gamma=2.500\text{ Kg}/\text{m}^3$; el módulo de elasticidad $E=2,69 \times 10^9\text{ Kg}/\text{m}^2$; el módulo de corte $G=1.14 \times 10^9\text{ Kg}/\text{m}^2$ (módulo de Poisson $\nu=0,18$). La altura y espesor de las columnas es de $0,5\text{ m}$ y $0,5\text{ m}$ respectivamente, y la altura y espesor de las vigas es de $0,5\text{ m}$ y $0,5\text{ m}$ respectivamente. Las dimensiones de la planta del edificio son $L=20\text{ m}$ y $B=15\text{ m}$.

La acción del viento sobre la estructura se calcula según las disposiciones de la NCh432.Of71 (INN, 1971).

Teniendo en cuenta las dimensiones de la planta del edificio y lo dispuesto en la Tabla 1 (NCh432.Of71), obtenemos la presión básica del viento por interpolación $q = 61,7 \text{ Kgf} / \text{m}^2$.

Ahora amplificamos q por un factor de forma $C=1,2$, según 9.2.1 de la NCh432.Of71, ya que se asume la acción del viento perpendicular a las caras del edificio.

$$q = 61,7 \times 1,2 = 74,04 \text{ Kgf} / \text{m}^2$$

El valor obtenido se multiplica por una de las dimensiones de la planta para obtener la carga uniformemente distribuida tanto en la dirección X como en la Y (Fig. 5.1a). Se puede notar que el valor de q es constante, por lo que $\mu = 0$. (fórmula 5.3)

Por lo tanto:

$$q_x = 74,04 \times 15 = 1.110,6 \text{ Kgf} / \text{m} \quad (\text{Carga de viento uniformemente distribuida en la dirección } X),$$

6.5.2 Viento en X

El siguiente paso que debemos seguir es la incorporación de los datos de entrada (celdas color verde) a la planilla elaborada en *Excel*, como las dimensiones de la planta, módulo de elasticidad del material, nº de pisos, y por supuesto la intensidad de la carga de viento distribuida, en la dirección X . En las celdas color celeste están incorporadas las fórmulas que arrojarán los resultados o datos de salida (Fig. 6.72).

Características geométricas del edificio

L (m)	20,0	dimension planta de edif. en dir. X
B (m)	15,0	dimension planta de edif. en dir. Y
n	5,0	numero de pisos del edificio
h (m)	3,0	altura de piso
E (Kgf/m ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad material
G (Kgf/m ²)	1,13E+09	modulo de corte
μ	0,00	razon de la funcion de carga
γ (Kgf/m ³)	2500	densidad del material
e losa (m)	0,15	espesor losa de piso
$q \text{ } \partial x$ (Kgf/m)	1110,60	intensidad de carga unif.distribuida en X
$q \text{ } \partial y$ (Kgf/m)		intensidad de carga unif.distribuida en Y
H (m)	15,0	altura total del edif.
A (m ²)	300,0	area de planta del edif.

Datos de entrada
Datos de salida

Carga de Viento

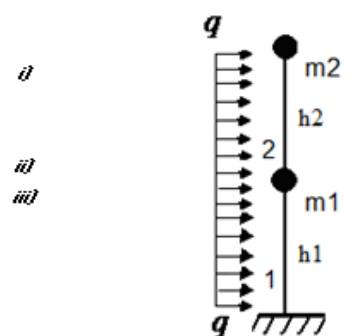


Figura 6.72
Incorporación datos de entrada.

Luego ingresamos las características geométricas de los muros de corte, como la altura,

espesor, largo y su ubicación en la planta (Fig. 6.73).

Aplicando la fórmula (2.1) y (2.2), tenemos las coordenadas del centro de corte de la columna equivalente. (Fig. 6.79).

$$\bar{x}_0 = \frac{66,36}{6,636} = 10,0m \quad \text{y} \quad \bar{y}_0 = \frac{38,07}{5,077} = 7,5m$$

Como se aprecia en la Fig. 6.73, obtenemos el momento de inercia con respecto a los ejes x e y , calculado de la fórmula (2.3). Calcularemos las características de rigidez del muro de corte 2.

$$I_x = \frac{(5 \times 0,2^3)}{12} = 0,0033m^4 \quad \text{y} \quad I_y = \frac{(0,2 \times 5^3)}{12} = 2,083m^4$$

Las coordenadas del centro de corte del i -ésimo elemento resistente (x_i), son calculadas de la fórmula (2.6)

$$x_i = 17 - 10,0 = 7,0m \quad \text{y} \quad y_i = 14,9 - 7,5 = 7,4m$$

Calculado lo anterior podemos obtener

$$I_x x_i^2 = 0,0033 \times (7,0)^2 = 0,163m^6 \quad \text{y} \quad I_y y_i^2 = 2,083 \times (7,4)^2 = 114,083m^4$$

La constante de torsión de Saint Venant (J), es calculada de la fórmula (2.4).

$$J_i = \frac{1}{3}(0,2^3 \times 5) = 0,013m^4$$

La Fig. 6.73 muestra la obtención de las características de rigidez de los demás muros de corte, cabe recordar que las celdas celestes entregan los datos de salida.

Muros de corte

Muro en x	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m4)	$I_{y,i}$ (m4)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i}x_i^2$ (m6)	$I_{x,i}y_i^2$ (m6)	J_i (m4)
1	17,000	14,900	3,0	5,0	0,20	0,003	2,083	7,000	7,400	0,163	114,083	0,013
2	3,000	0,100	3,0	5,0	0,20	0,003	2,083	-7,000	-7,400	0,163	114,083	0,013
3						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Muro en y	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m4)	$I_{y,i}$ (m4)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i}x_i^2$ (m6)	$I_{x,i}y_i^2$ (m6)	J_i (m4)
1	19,90	2,50	3,00	5,00	0,20	2,083	0,003	9,900	-5,000	204,188	0,083	0,013
2	0,10	12,50	3,00	5,00	0,20	2,083	0,003	-9,900	5,000	204,188	0,083	0,013
3						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Figura 6.73

Incorporación características geométricas y de rigidez de muros de corte.

Ahora se ingresan los datos de vigas, columnas para así encontrar I_g (fórmula 4.56).

Marco Empotrado

(maximo de columnas :10)

n marcos emp.	4	n° de marcos empotrados	
n columnas	3	n° de columnas	
h marc. emp. (m)	3,0	altura marco empotrado	
h viga (m)	0,5	altura de viga	
E_b (Kgf/m ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad viga	
h columna (m)	0,5	altura de columna	
e columna (m)	0,5	espesor columna	
k_p	2,0	(ver Tabla 1)	
L(m)	10,0	long. total marco emp.	
n vanos	2	n° de vanos	
I_g (m ⁴)	11,28	segundo momento global	(4.56)

Figura 6.74

Incorporación características geométricas y de marcos empotrados.

Para obtener la carga crítica de los marcos empotrados debemos calcular N_l , definido por la fórmula (4.52). La rigidez característica para la deformación por flexión local es calculada por la fórmula (4.53).

$$E_c I_c = 2,68 \times 10^9 \times \frac{0,5 \times 0,5^3}{12} = 1,39 \times 10^7 \text{ Kgf}m^2$$

Por lo tanto

$$N_l = \frac{7,84 \times 0,759 \times 1,39 \times 10^7 \times 3}{15^2} = 1,11 \times 10^6 \text{ Kgf}$$

Ahora calculamos N_g , definido por la fórmula (4.54). Cada marco empotrado está compuesto de tres columnas, por lo tanto $k_p = 2$ (ver tabla 1 en Anexo). Por lo tanto

$$I_g = 2 \times 0,25 \times 4,75^2 = 11,28m^4$$

La rigidez característica para la deformación por flexión global es calculada por la fórmula (4.55).

$$E_c I_g = 2,68 \times 10^9 \times 11,28 = 3,02 \times 10^{10} \text{ Kgf}m^2$$

Por lo tanto

$$N_g = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 11,28}{15^2} = 7,99 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

La carga crítica asociada a la deformación de corte global calculada por la fórmula (4.57)

es

$$K_g = 2 \times \frac{6 \times 2,68 \times 10^9 \times 0,0052}{5 \times 3} = 1,12 \times 10^7 \text{ Kgf}$$

La carga crítica asociada a la deformación de corte local calculada por la fórmula (4.58)

es

$$K_l = \frac{\pi^2 \times 1,39 \times 10^7 \times 3}{3^2} = 4,59 \times 10^7 \text{ Kgf}$$

Por lo tanto K , calculada por la fórmula (4.59) es

$$K = 1,12 \times 10^7 \times \frac{4,59 \times 10^7}{(1,12 \times 10^7 + 4,59 \times 10^7)} = 8,98 \times 10^6$$

Finalmente, la carga crítica para un marco empotrado, calculada por la fórmula (4.60) es

$$N_{cr} = \frac{1,11 \times 10^6 + 8,98 \times 10^6 + (1,11 \times 10^6 \times 8,98 \times 10^6) / 7,99 \times 10^8}{1 + (8,98 \times 10^6) / 7,99 \times 10^8} = 9,99 \times 10^6 \text{ Kgf}$$

Lo dispuesto en la sección 4.7 señala que la estabilidad, frecuencia y análisis de tensiones globales tanto de muros de corte acoplados así como de marcos puede ser simplificadas reemplazando dichos elementos por muros ficticios, manteniendo ancho y altura, no así el espesor, que se obtiene gracias a la fórmula (4.75).

$$t^* = \frac{1,53 \times 9,99 \times 10^6 \times 3^2}{0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 10^3} = 0,00007 \text{ m}$$

Por lo tanto :

$N_{cr} \text{ (Kgf)}$	9,99E+06	carga critica marco empotrado	(4.60)
$N_{cr, wall} \text{ (Kgf)}$	9,98E+06	carga critica muro equivalente	(4.74)
$t^* \text{ (m)}$	0,00007	espesor muro equivalente	(4.75)

Figura 6.75

Datos de salida carga crítica y espesor muro equivalente.

Teniendo el espesor equivalente del marco empotrado, (que ahora es un muro ficticio) podremos ingresar las características geométricas de este, para así obtener las características de rigidez de los cuatro muros ficticios. A continuación se mostrará el cálculo de uno de ellos.

$$I_x = \frac{(0,00007 \times 10^3)}{12} = 0,006m^4$$

$$I_y = \frac{(10 \times 0,00007^3)}{12} = 0$$

Las coordenadas del centro de corte del i -ésimo elemento resistente (x_i), son calculadas de la fórmula (2.6)

$$x_i = 5 - 10,0 = -5m$$

$$y_i = 10 - 7,5 = 2,5m$$

Calculado lo anterior podemos obtener

$$I_x x_i^2 = 0,006 \times (-5)^2 = 0,141m^6$$

$$I_y y_i^2 = 0$$

La constante de torsión de Saint Venant (J), es calculada de la fórmula (2.4).

$$J_i = \frac{1}{3} (0,0007^3 \times 10) = 0$$

La Fig. 6.76 muestra la obtención de las características de rigidez de los demás muros ficticios.

Características geométricas y de rigidez de marcos empotrados

Muro en y	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m4)	$I_{y,i}$ (m4)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i} x_i^2$ (m6)	$I_{y,i} y_i^2$ (m6)	J_i (m4)
1	5,00	10,00	3,00	10,00	0,00007	0,006	0,000	-5,000	2,500	0,141	0,000	0,000
2	15,00	5,00	3,00	10,00	0,00007	0,006	0,000	5,000	-2,500	0,141	0,000	0,000
3	0,25	5,00	3,00	10,00	0,00007	0,006	0,000	-9,750	-2,500	0,536	0,000	0,000
4	19,75	10,00	3,00	10,00	0,00007	0,006	0,000	9,750	2,500	0,536	0,000	0,000

Figura 6.76

Incorporación características geométricas y de rigidez de muros ficticios (marcos empotrados).

A continuación ingresamos las características geométricas de los núcleos. En este caso particular el edificio posee en cada piso, un núcleo “T” del Tipo 1 y 3. Lo anterior puede apreciarse en las Fig. 6.77 y Fig. 6.78. En primer lugar calcularemos los parámetros auxiliares dispuestos en el Anexo A para esta figura. (núcleo “T” Tipo I).

$$A_f = 3,0 \times 0,2 = 0,6m^2$$

$$A_a = 0,2 \times 0,2 = 0,04m^2$$

$$A_g = 0,2 \times \left(3 - \frac{0,2}{2} - \frac{0,2}{2} \right) = 0,56m^2$$

Por lo tanto:

$$A = 0,6 + 0,04 + 0,56 = 1,2m^2$$

$$e = \frac{0,04}{1,2} \times 3 + \frac{0,56}{1,2} \left(\frac{3}{2} - \frac{0,2}{4} + \frac{0,2}{4} \right) = 0,8 \quad e^* = 3 - 0,8 = 2,2$$

Ahora obtenemos el momento de inercia con respecto a los ejes x e y del núcleo "T"

Tipo I.

$$I_x = \frac{1}{12} \left(0,6 \times 0,2^2 + 0,04 \times 0,2^2 + 0,56 \times \left(3 - \frac{0,2}{2} - \frac{0,2}{2} \right)^2 \right) + 0,6 \times 0,8^2$$

$$+ 0,04 \times 2,2^2 + 0,56 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{0,2}{4} + \frac{0,2}{4} - 2,2 \right)^2 = 1,22m^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \times (0,6 \times 3^2 + 0,04 \times 0,2^2 + 0,56 \times 0,2^2) = 0,452m^4$$

El cálculo de las coordenadas del centro del núcleo "T" Tipo I se obtiene de la fórmula (2.6).

$$x_i = 9 - 10 = -1,0m$$

$$y_i = 0,9 - 7,5 = -6,6m$$

Obteniendo lo anterior, podemos calcular:

$$I_x x_i^2 = 1,22 \times (-1,0)^2 = 1,22m^6$$

$$I_y y_i^2 = 0,452 \times (-6,6)^2 = 19,689m^6$$

Dado que el núcleo "T" Tipo I es simétrico respecto a uno de sus ejes, el producto de inercia es nulo.

$$I_{xy} = 0$$

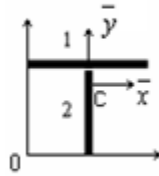
Ahora obtenemos la constante de torsión J_i

$$J_i = \frac{1}{3} (0,6 \times 0,2^2 + 0,04 \times 0,2^2 + 0,56 \times 0,2^2) = 0,016m^4$$

y la constante de alabeo I_ω

$$I_\omega = \frac{0,6 \times 3^2 \times 0,04 \times 0,2^2 \times 3^2}{144 \times 0,452} = 0,0012m^6$$

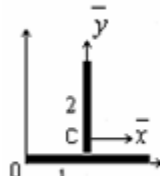
En la Fig. 6.77 se puede apreciar el ingreso de las características geométricas del elemento (celdas verdes), y la obtención de las características de rigidez del mismo. (celdas celestes).



Núcleo "T"	Coord. Global		Centroide (eje local)		
	$\bar{x}_i (m)$	$\bar{y}_i (m)$	$\bar{x} (m)$	$\bar{y} (m)$	$I_{x,i} (m^4)$
Tipo 1	9,000	0,900	1,500	2,300	1,220
Muro	$Lm (m)$	$e (m)$	$h (m)$	$A (m^2)$	$I_{y,i} (m^4)$
1	3,0	0,2	3,00	0,60	0,452
2	3,0	0,2	3,00	0,60	
$x_i (m)$	$y_i (m)$	$I_{\omega,i} (m^6)$	$I_{x,i \times 2} (m^6)$	$I_{x,i \ y 2} (m^6)$	$J_i (m^4)$
-1,000	-6,600	0,0012	1,220	19,689	0,016

Figura 6.77
Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo1.

El cálculo mostrado anteriormente se aplica también para el núcleo "T" Tipo 3, mostrado en la Fig. 6.78.



Núcleo "T"	Coord. Global		Centroide (eje local)		
	$\bar{x}_i (m)$	$\bar{y}_i (m)$	$\bar{x} (m)$	$\bar{y} (m)$	$I_{x,i} (m^4)$
Tipo 3	11,000	14,100	1,500	0,900	1,220
Muro	$Lm (m)$	$e (m)$	$h (m)$	$A (m^2)$	$I_{y,i} (m^4)$
1	3,0	0,2	3,00	0,60	0,452
2	3,0	0,2	3,00	0,60	
$x_i (m)$	$y_i (m)$	$I_{\omega,i} (m^6)$	$I_{x,i \times 2} (m^6)$	$I_{x,i \ y 2} (m^6)$	$J_i (m^4)$
1,000	6,600	0,0012	1,220	19,689	0,016

Figura 6.78
Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo3.

Cuando la ubicación del centro de corte es conocida, el sistema coordenado se traslada al centro de corte, que es donde se sitúa la columna equivalente. La constante de torsión de Saint Venant de la columna equivalente es:

$$\sum J_i = 0,013 \times 4 + 0,016 \times 2 = 0,085 m^4$$

La constante de torsión de alabeo (fórmula 2.5) de la columna equivalente es:

$$I_{\omega} = 0,0024 \times 2 + 412,495 + 267,712 = 680,209 m^6$$

Las coordenadas del centro geométrico de la planta del edificio, cuyo origen está en el centro de corte, se obtiene de la fórmula (2.9). El hecho de que x_c e y_c sean distintos de cero, nos indica que el sistema es doblemente simétrico, (Fig. 2.2/c) es decir, los tres modos básicos están desacoplados.

$$x_c = \frac{20}{2} - 10,0 = 0 \qquad y \qquad y_c = \frac{15}{2} - 7,5 = 0$$

Obteniendo lo anterior, se puede determinar que $t=0$, ya que no existe excentricidad, es decir, el centro de corte (O) y el centro geométrico (C) coinciden.

El radio de giro se calcula de la formula (2.8)

$$i_p = \sqrt{\frac{20^2 + 15^2}{12} + 0^2} = 7,217m$$

El valor del parámetro de torsión es obtenido de la fórmula (4.20)

$$k = 15 \times \sqrt{\left(\frac{1,13 \times 10^9 \times 0,085}{2,68 \times 10^9 \times 680,209} \right)} = 0,109$$

En la Fig.6.79 se puede apreciar la entrega de los parámetros anteriormente calculados.

Características de la columna equivalente
 Por lo tanto:

\bar{x}_0 (m)	10,00	coordenada x de centro de corte	(2.1)
\bar{y}_0 (m)	7,50	coordenada y de centro de corte	(2.2)
$\Sigma I_{x,i}$ (m4)	6,636	sumatoria de las inercias en X	(2.3)
$\Sigma I_{y,i}$ (m4)	5,077	sumatoria de las inercias en Y	(2.3)
ΣJ_i (m4)	0,085	cte. de torsion de Saint-Venant	(2.4)
$I\omega$ (m6)	680,209	cte. de alabeo	(2.5)
t (m)	0,000	dist. entre centro de corte O y centro geom. C	(2.7)
i_p (m)	7,217	radio de giro	(2.8)
x_c (m)	0,000	coordenada x de centro geometrico del edif.	(2.9)
y_c (m)	0,000	coordenada y de centro geometrico del edif.	(2.9)
ΣI_{xy}	0,000	sumatoria del producto de inercia	
$\Sigma I_{x,i} x^2$ (m6)	412,495		
$\Sigma I_{x,i} y^2$ (m6)	267,712		
k	0,109	parametro de torsion	(4.20)

Como $x_c = 0,000$
 $y_c = 0,000$ entonces el sistema es: **Doblemente Simetrico**

Figura 6.79
 Datos de salida de características geométricas y de rigidez.

Como lo indica la tabla de la Fig. 6.79, fueron calculadas las coordenadas del centro de corte O (\bar{x}_0, \bar{y}_0) y las coordenadas del centro geométrico C (x_c, y_c), que es donde actúa la carga vertical en cada piso.

6.5.3 Análisis de Estabilidad

Producto del ingreso de datos (celdas color verde) en relación a las características geométricas y de rigidez del edificio obtenemos las cargas críticas del edificio, en los ejes principales ($N_{cr,x}, N_{cr,y}$), definidas por (4.16). (Fig. 6.80).

$$N_{cr,x} = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 5,077}{(15)^2} = 3,6 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

$$N_{cr,y} = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 6,636}{(15)^2} = 4,7 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

Ahora calculamos el factor de reducción (fórmula 4.17).

$$r_s = \frac{5}{5+1,588} = 0,759 \quad \text{y} \quad k_s = \frac{0,109}{\sqrt{0,759}} = 0,125$$

Carga Crítica

$N_{cr,x}$ (Kgf)	3,60E+08	carga de oscilacion critica en X	(4.16)
$N_{cr,y}$ (Kgf)	4,70E+08	carga de oscilacion critica en Y	(4.16)
r_s	0,759	factor de reduccion (ver tabla 4.1)	(4.17)
k_s	0,125		(4.19)

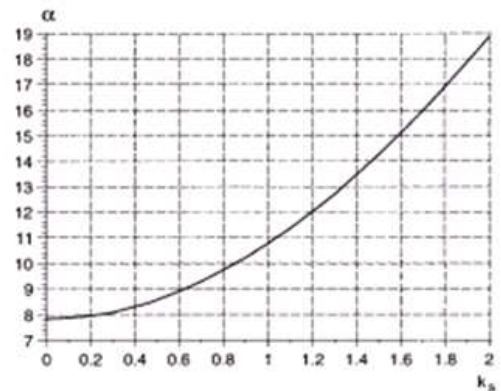
Figura 6.80
Datos de salida de cargas críticas en X e Y.

El factor de reducción r_s definido por (4.17) y la relación entre éste y el factor de torsión, dan origen a k_s definido por (4.19), factor que junto a la Tabla 4.4 permiten encontrar el valor de α interpolando entre los valores cercanos a k_s (Fig. 6.81), todo lo anterior, con el objetivo de poder calcular $N_{cr,\varphi}$, definido por (4.18). (Fig. 6.82).

Para obtener α debemos interpolar entre los valores cercanos a k_s (Tabla 4.4)

$x(1)$	0,100	valor anterior a k_s (ver tabla 4.4)
$x(2)$	0,200	valor posterior a k_s (ver tabla 4.4)
$y(1)$	7,867	valor anterior a α (ver tabla 4.4)
$y(2)$	7,957	valor posterior a α (ver tabla 4.4)
α	7,890	(ver tabla 4.4)

a)



b)

Figura 6.81

a) Interpolación de valores cercanos a k_s , b) Relación entre k_s y α .

La carga crítica asociada al pandeo torsional $N_{cr,\varphi}$ (fórmula 4,18) es

$$N_{cr,\varphi} = \frac{7,890 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 680,209}{7,217^2 \times 15^2} = 9,31 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

Los parámetros de excentricidad de carga son calculados por la fórmula (4.25)

$$\text{con} \quad \tau_x = \frac{0}{7,217} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_y = \frac{0}{7,217} = 0$$

$$r_1 = \frac{9,31 \times 10^8}{3,6 \times 10^8} = 2,589 \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{9,31 \times 10^8}{4,7 \times 10^8} = 1,981$$

Como $k_s = 0,125$
 $\alpha = 7,890$, entonces:

$N_{cr,\phi}$ (Kgf)	9,31E+08	carga critica de pandeo torsional puro	(4.18)
τ_x	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.25)
τ_y	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.25)
r_1	2,589		(4.26)
r_2	1,981		(4.26)

Figura 6.82

Datos de salida de carga critica de pandeo torsional puro.

Puede observarse que $x_c = y_c = 0$ (Fig. 6.79), lo que indica que el sistema es doblemente simétrico (Fig.2.2/c), y sus cargas críticas básicas no están acopladas, por lo tanto la carga crítica del edificio será la de menor valor entre $N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$ y $N_{cr,\phi}$.

Por lo tanto :

$N_{cr,x}$ (Kgf)	3,60E+08	carga de oscilacion critica en X
$N_{cr,y}$ (Kgf)	4,70E+08	carga de oscilacion critica en Y
$N_{cr,\phi}$ (Kgf)	9,31E+08	carga critica de pandeo torsional puro

Si el sistema es:

i) Doblemente simetrico

N_{cr} (Kgf)	3,60E+08	carga critica del edificio
----------------	----------	----------------------------

Figura 6.83

Datos de salida de carga de oscilación critica del edificio en X e Y.

6.5.4 Análisis de Frecuencia

Al igual que en el análisis de estabilidad, el ingreso de datos (celdas color verde) en relación a las características geométricas y de rigidez del edificio nos entrega las frecuencias naturales del edificio, calculada por la fórmula (4.37), en dirección paralela a los ejes principales. (Fig. 6.84).

El factor de reducción es

$$r_f = \sqrt{\frac{5}{5 + 2,06}} = 0,842$$

Teniendo r_f , podemos calcular las frecuencias naturales en X e Y.

$$f_x = \frac{0,56 \times 0,842}{(15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 5,077 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 0,884 \text{ Hz}$$

$$f_y = \frac{0,56 \times 0,842}{(15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 6,636 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 1,011 \text{ Hz}$$

Frecuencia fundamental

f_x (Hz)	0,8836	frecuencia natural en direccion X	(4.37)
f_y (Hz)	1,0112	frecuencia natural en direccion Y	(4.37)
r_f	0,842	ver tabla 4.7	(4.39)

Figura 6.84
Datos de salida de frecuencias naturales en X e Y.

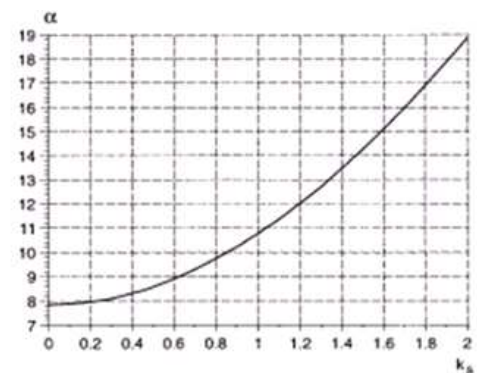
El factor de torsión k definido por (4.20) y la Tabla 4.8 nos permite encontrar el valor del parámetro de frecuencia η interpolando entre los valores cercanos a k (Fig. 6.85), todo lo anterior, con el objetivo de poder calcular f_φ , definido por (4.40). (Fig. 6.86).

Tabla 4.8

Como $k = 0,109$

Interpolando entre valores cercanos a k (Tabla 4.8)

X(1)	0,10	valor anterior a k	(ver tabla 4.8)
X(2)	0,20	valor posterior a k	(ver tabla 4.8)
y(1)	0,5606	valor anterior a η	(ver tabla 4.8)
y(2)	0,5638	valor posterior a η	(ver tabla 4.8)
η	0,5609	(ver tabla 4.8)	



a)

b)

Figura 6.85

a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y η .

La frecuencia natural para vibración torsional pura es

$$f_\varphi = \frac{0,5609 \times 0,842}{7,217 \times (15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 680,209 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 1,419 \text{ Hz}$$

Los parámetros de excentricidad de carga son calculados por la fórmula (4.46)

con $\tau_x = \frac{0}{7,217} = 0$ y $\tau_y = \frac{0}{7,217} = 0$

$r_1 = \frac{1,419^2}{0,8836^2} = 2,58$ y $r_2 = \frac{1,419^2}{1,011^2} = 1,974$

Como $r_f = 0,842$
 $\eta = 0,5609$, entonces:

f_ϕ (Hz)	1,419	frecuencia natural para vibración torsional pura	(4.40)
τ_x	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.46)
τ_y	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.46)
r_1	2,580		(4.47)
r_2	1,974		(4.47)

Figura 6.86
 Datos de salida de frecuencia natural para vibración torsional puro.

De manera similar a lo sucedido con las cargas críticas, podemos observar que debido a que el sistema resistente es doblemente simétrico (Fig.2.2/c), y los modos básicos no están combinados, la primera frecuencia natural del edificio es la de menor valor entre f_x , f_y y f_ϕ . Al obtener la frecuencia natural de mayor masa traslacional, también podemos obtener el periodo natural del edificio, definido por la ecuación (4.60).

Por lo tanto :

f_x (Hz)	0,8836	frecuencia natural en direccion X
f_y (Hz)	1,0102	frecuencia natural en direccion Y
f_ϕ (Hz)	1,4195	frecuencia natural para vibración torsional pura

Si el sistema es:

i) Doblemente simetrico

f (Hz)	0,8836	frecuencia natural del edificio
----------	--------	---------------------------------

entonces :

T (seg)	1,1317	periodo natural del edificio	(4.38)
-----------	--------	------------------------------	--------

Figura 6.87
 Datos de salida de frecuencias y periodo natural del edificio.

6.5.5 Tensiones y Deformación (viento en X)

El hecho de que el centro geométrico C del edificio, definido por (2.9), coincide con el centro de corte O definido por (2.1) y (2.2), permite que no exista torque alrededor del centro de corte (fórmula 5.8), como lo muestra la Figura 6.88.

$$m_{z0} = 1110,6 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

Ahora calculamos los parámetros auxiliares de carga definidos por la fórmula (5.12)

$$\bar{q}_x = \frac{6,636 \times 1110,6}{36,69} = 218,74 \text{ Kgfm/m} \quad \text{y} \quad \bar{q}_y = \frac{5,077 \times 0}{33,69} = 0$$

Rotacion y deformaciones

m_{z0} (Kgfm/m)	0,00E+00	torque alrededor del centro de corte	(5.8)
\bar{q}_x (Kgfm/m)	218,74	parametro auxiliar de carga	(5.12)
\bar{q}_y (Kgfm/m)	0,00	parametro auxiliar de carga	(5.12)

Figura 6.88

Datos de salida de torque producto de la carga de viento.

Como ya se comentó en la sección 5.2.2.1, los desplazamientos máximos de la columna equivalente ocurren en la parte superior de ésta, la Fig.6.89 da muestra de ello. Así como los desplazamientos máximos se dan en $z=H$, lo mismo ocurre con la rotación máxima φ_{max} .

$$u_{max} = \frac{218,74}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} \right) \times 15^4 = 0,0005m \quad \text{y} \quad v_{max} = 0$$

$$\varphi_{max} = 0$$

Desplazamientos horizontales en la parte superior de la columna equivalente

$U_{max} (H) (m)$	0,0005	trans. max. en la columna eq. en X	(5.13)
$V_{max} (H) (m)$	0,0000	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.14)

Rotacion del edificio

$\varphi_{max} (rad)$	0,0000	rotacion max en radianes	(5.15)
$\varphi_{max} (^\circ)$	0,0000	rotacion max en grados	

Figura 6.89

Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.

La rotación es cero debido a que $m_{z_0} = 0$ (Fig. 6.88), por lo que no hay desplazamientos adicionales en el edificio (Fig. 6.90).

Desplazamientos horizontales maximos del edificio

$U_{edif} (u_B)(m)$	0,0005	trans. max. en la columna eq. en X	(5.16)
$V_{edif} (v_A)(m)$	0,0000	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.16)

Figura 6.90

Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.

Ahora damos paso al cálculo de las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes (muros de corte, marcos y núcleos), que se ubican en la base de la estructura, en este caso no es necesario calcular $\eta_{T_{max}}$, ya que $m_{z_0} = 0$.

Las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes son calculadas por la fórmula (5.18) y (5.19). A continuación se muestra el cálculo de estas para uno de los muros de corte (muro 2).

$$T_{x,2}^{max} = \left[15 \times (2,083 \times 218,74) - \frac{2,083 \times (7,4)}{680,209} \times 0 \times 15 \times 1,002 \right] / 1000 = 6,84 \text{Tonf}$$

$$T_{y,2}^{max} = \left[15 \times (0,003 \times 0) + \frac{0,003 \times (7,0)}{680,209} \times 0 \times 15 \times 1,002 \right] / 1000 = 0$$

La Fig. 6.91 muestra las fuerzas de corte para los demás elementos resistentes

Fuerzas de corte maximas en muros de corte

Muro en x	(5.18) $T_{x,i} \text{ (Tonf)}$		(5.19) $T_{y,i} \text{ (Tonf)}$			
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$T_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$T_{y,i}$
1	6,84	0,00	6,84	0,00	0,00	0,00
2	6,84	0,00	6,84	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.18) $T_{x,i} \text{ (Tonf)}$		(5.19) $T_{y,i} \text{ (Tonf)}$			
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$T_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$T_{y,i}$
1	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
2	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.91

Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.

Se puede ver que los elementos 2 y 3 (muros de corte) absorben la mayor parte de la carga en la dirección paralela a su plano de rigidez (eje X), y cero en la dirección perpendicular a este. Los elementos 1 y 4 (muros de corte), absorben una pequeña parte de la carga, en la dirección perpendicular a su plano de rigidez (eje Y).

Fuerzas de corte maximas en marcos empotrados

Muro en y	(5.18)		(5.19)			
	Tx,i (Tonf)		Ty,i (Tonf)			
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
1	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000

Figura 6.92

Datos de salida fuerzas de corte máxima en marcos empotrados.

En el caso de los marcos empotrados (elementos 5, 6, 7 y 8), estos no absorben carga, ya que la rigidez proporcionada por su eje mayor es muy pequeña comparada con un muro de corte, además este eje es ortogonal a la sollicitación de viento. En la Fig. 6.93 se indica la sumatoria de fuerzas de corte de todos los elementos (muros de corte, muros ficticios y núcleos), que corresponde al corte basal Q_o , anteriormente calculado.

Fuerzas de corte maximas en nucleos

Núcleo	(5.18)		(5.19)			
	Tx,i (Tonf)		Ty,i (Tonf)			
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
Núcleo "Z"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"						
Tipo 1	1,48	0,00	1,48	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	1,48	0,00	1,48	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	16,66	0,00	16,66	0,00	0,00	0,00

Figura 6.93

Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos.

Finalmente los núcleos "T" Tipo 1 y Tipo 3 absorben una cantidad proporcional en el plano paralelo al eje X, y cero en el plano ortogonal a este. También se puede observar que las cargas absorbidas por ambos núcleos son de la misma magnitud, esto es debido a que los muros que componen ambos núcleos (1 y 2) tienen la misma orientación respecto a los ejes principales, a pesar de ser opuestos. (Fig. 6.94)

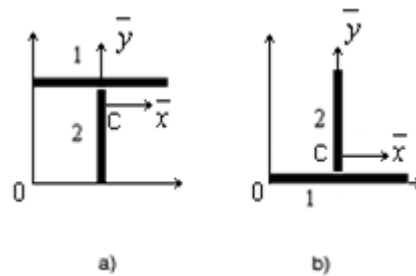


Figura 6.94
Orientación de los núcleos "T" a) Tipo 1 b) Tipo 3.

A continuación la tabla de la planilla *Excel*, muestra los momentos máximos $M_{x,i}$ en cada uno de los elementos (Fig.6.95, Fig.6.96 y Fig.6.97). En este caso debido a que $m_{z_0} = 0$, no es necesario calcular $\eta_{M \max}$

Los momentos máximos en cada uno de los elementos resistentes son calculados por la fórmula (5.21) y (5.22). A continuación se muestra el cálculo de estos para uno de los muros de corte.

$$M_{x,2}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (2,083 \times 218,74) + \frac{2,083 \times (7,4)}{680,209} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 1,001 \right] / 1000 = -51,27 \text{Tonm}$$

$$M_{y,2}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0,003 \times 0) - \frac{0,003 \times (7,0)}{680,209} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 1,001 \right] / 1000 = 0$$

La Fig.6.95 muestra los momentos máximos para los demás elementos resistentes.

Momentos máximos en muros de corte

Muro en x	(5.21)		(5.22)			
	Mx,i (Ton m)		My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	-51,27	0,00	-51,27	0,00	0,00	0,00
2	-51,27	0,00	-51,27	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.21)		(5.22)			
	Mx,i (Ton m)		My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	-0,08	0,00	-0,08	0,00	0,00	0,00
2	-0,08	0,00	-0,08	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.95

Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.

Los momentos máximos en los marcos o pórticos empotrados son cero en este caso. (Fig. 6.96).

Momentos máximos en marcos empotrados

Muro en y	(5.21)		(5.22)			
	Mx,i (Ton m)		My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Figura 6.96

Datos de salida de momentos máximos en marcos empotrados.

Momentos máximos en núcleos

	(5.21)			(5.22)		
	$M_{x,i}$ (Ton m)		$M_{x,i}$	$M_{y,i}$ (Ton m)		$M_{y,i}$
Núcleo "Z"	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
Tipo 1	-11,12	0,00	-11,12	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	-11,12	0,00	-11,12	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$M_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$M_{y,i}$
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	-124,943	0,00	-124,94	0,00	0,00	0,00

Figura 6.97
 Datos de salida de momentos máximos en núcleos.

Como $m_{z_0}=0$, entonces el momento torsor de alabeo máximo definido por la fórmula (5.41). y el momento torsor de alabeo máximo, definido por la fórmula (5.30) también es cero.

$$M_{t,max} = 0 \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad M_{\omega,max} = 0$$

Recordemos que anteriormente se obtuvieron los desplazamientos horizontales máximos del edificio, definidos por (5.16), (Fig.6.90), evaluando estos desplazamientos respecto a las condiciones señaladas en la sección 5.2.2.1, donde se dan a conocer los desplazamientos horizontales máximos, vemos que se satisfacen estas recomendaciones definidas en (5.17) y mostradas en la Fig. 6.98.

$$u = \frac{15}{500} = 0,03m \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad v = \frac{15}{500} = 0,03m$$

u (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)
v (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)

Se puede observar que :

U_{edif} (m)	0,0005	<	0,03	Cumple
V_{edif} (m)	0,0000	<	0,03	Cumple

Figura 6.98
 Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.

6.5.6 Viento en Y

Ahora continuamos con el procedimiento descrito en 6.5.2, pero esta vez incorporamos la intensidad de la carga de viento distribuida, en la dirección Y. En la Fig. 6.78 se muestra el ingreso de las características físicas y geométricas de la estructura, además de la carga propiamente tal.

Recordemos que: $q = 61,7 \times 1,2 = 74,04 \text{ Kgf} / \text{m}^2$

Por lo tanto:

$q_y = 74,04 \times 20 = 1480,8 \text{ Kgf} / \text{m}$ (Carga de viento uniformemente distribuida en la dirección Y),

Características geométricas del edificio

L (m)	20,0	dimension planta de edif. en dir. X
B (m)	15,0	dimension planta de edif. en dir. Y
n	5,0	numero de pisos del edificio
h (m)	3,0	altura de piso
E (Kgf/m ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad material
G (Kgf/m ²)	1,13E+09	modulo de corte
μ	0,00	razon de la funcion de carga
γ (Kgf/m ³)	2500	densidad del material
e losa (m)	0,15	espesor losa de piso
q \varnothing x (Kgf/m)		intensidad de carga unif.distribuida en X
q \varnothing y (Kgf/m)	1480,80	intensidad de carga unif.distribuida en Y
H (m)	15,0	altura total del edif.
A (m ²)	300,0	area de planta del edif.

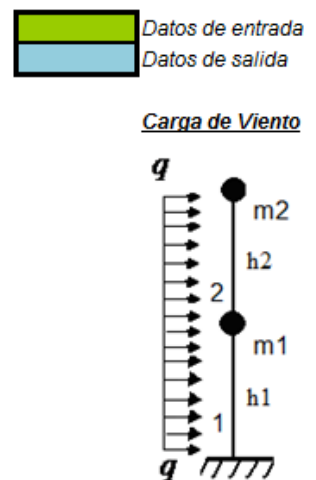


Figura 6.99
Incorporación datos de entrada.

Las características geométricas de los muros de corte, muros empotrados y núcleos se ingresaron en 6.5.2. (Fig. 6.73, a Fig. 6.78).

Con respecto al análisis de estabilidad y de frecuencia, estos ya fueron calculados en la sección 6.5.2.1 y 6.5.2.2 respectivamente.

6.5.7 Tensiones y Deformación (viento en Y)

El hecho de que el centro geométrico C del edificio, definido por (2.9), coincide con el centro de corte O definido por (2.1) y (2.2), permite que no exista torque alrededor del centro de corte como lo muestra la Figura 6.100.

$$m_{z_0} = 0 \times 0 + 1480,8 \times 0 = 0$$

Ahora calculamos los parámetros auxiliares de carga definidos por la fórmula (5.12)

$$\bar{q}_x = \frac{0}{36,69} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{q}_y = \frac{5,077 \times 1480,8}{33,69} = 223,15 \text{ Kgfm/m}$$

m_{z0} (Kgfm/m)	0,00E+00	torque alrededor del centro de corte	(5.8)
\bar{q}_x (Kgfm/m)	0,00	parametro auxiliar de carga	(5.12)
\bar{q}_y (Kgfm/m)	223,15	parametro auxiliar de carga	(5.12)

Figura 6.100

Datos de salida de torque producto de la carga de viento.

Como ya se comentó en la sección 5.2.2.1, los desplazamientos máximos de la columna equivalente ocurren en la parte superior de ésta, la Fig.6.101 da muestra de ello. Así como los desplazamientos máximos se dan en $z=H$, lo mismo ocurre con la rotación máxima φ_{\max} .

$$u_{\max} = 0 \quad \text{y} \quad v_{\max} = \frac{223,15}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} \right) \times 15^4 = 0,0005m$$

$$\varphi_{\max} = 0$$

Desplazamientos horizontales en la parte superior de la columna equivalente

$U_{\max} \text{ (H)} (m)$	0,0000	trans. max. en la columna eq. en X	(5.13)
$V_{\max} \text{ (H)} (m)$	0,0005	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.14)

Rotacion del edificio

$\varphi_{\max} (rad)$	0,0000	rotacion max en radianes	(5.15)
$\varphi_{\max} (^\circ)$	0,0000	rotacion max en grados	

Figura 6.101

Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.

La rotación es cero debido a que $m_{z0} = 0$ (Fig. 6.100), por lo que no hay desplazamientos adicionales en el edificio (Fig. 6.102).

Desplazamientos horizontales maximos del edificio

$U_{\text{edif}} (u \text{ B}) (m)$	0,0000	trans. max. en la columna eq. en X	(5.16)
$V_{\text{edif}} (v \text{ A}) (m)$	0,0005	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.16)

Figura 6.102

Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.

Ahora damos paso al cálculo de las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes (muros de corte, marcos y núcleos), que se ubican en la base de la estructura, en este caso no es necesario calcular $\eta_{T_{max}}$, ya que $m_{z0} = 0$.

Las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes son calculadas por la fórmula (5.18) y (5.19). A continuación se muestra el cálculo de estas para uno de los muros de corte (muro 2).

$$T_{x,2}^{max} = \left[15 \times (0 \times 223,15) - \frac{2,083 \times (7,4)}{680,209} \times 0 \times 15 \times 1,002 \right] / 1000 = 0$$

$$T_{y,2}^{max} = \left[15 \times (0,0033 \times 223,15) + \frac{0,003 \times (7,0)}{680,209} \times 0 \times 15 \times 1,002 \right] / 1000 = 0,01 \text{Tonf}$$

La Fig. 6.103, Fig.6.104 y Fig.6.105 muestran las fuerzas de corte para los demás elementos resistentes.

Fuerzas de corte maximas en muros de corte

Muro en x	(5.18) Tx,i (Tonf)			(5.19) Ty,i (Tonf)		
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
1	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,01
2	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,01
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.18) Tx,i (Tonf)			(5.19) Ty,i (Tonf)		
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
1	0,00	0,00	0,00	6,96	0,00	6,96
2	0,00	0,00	0,00	6,96	0,00	6,96
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.103
Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.

Se puede ver (Fig. 6.103), que los elementos 1 y 4 (muros de corte en dirección Y) absorben la mayor parte de la carga en la dirección paralela a su plano de rigidez (eje Y), y cero en la dirección perpendicular a este. Los elementos 2 y 3 (muros de corte en dirección X), absorben una pequeña parte de la carga, en la dirección perpendicular a su plano de rigidez (eje X).

Fuerzas de corte maximas en marcos empotrados

Muro en y	(5.18)			(5.19)		
	$T_{x,i}$ (Tonf)		$T_{x,i}$	$T_{y,i}$ (Tonf)		$T_{y,i}$
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$		$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	
1	0,0000	0,0000	0,000	0,0189	0,0000	0,0189
2	0,0000	0,0000	0,000	0,0189	0,0000	0,0189
3	0,0000	0,0000	0,000	0,0189	0,0000	0,0189
4	0,0000	0,0000	0,000	0,0189	0,0000	0,0189

Figura 6.104

Datos de salida fuerzas de corte máxima en marcos empotrados.

En la Fig. 6.104 puede observarse que los marcos empotrados (elementos 5, 6, 7 y 8), absorben una parte de la carga de viento en el eje Y, ya que su plano de rigidez es paralelo a dicho eje, la parte de la carga absorbida por estos pórticos es pequeña, ya que la rigidez aportada por estos elementos es mucho menor que la entregada por muros de corte y núcleos. En la Fig. 6.105 se indica la sumatoria de fuerzas de corte de todos los elementos (muros de corte, muros ficticios y núcleos), que corresponde al corte basal Q_o , anteriormente calculado.

Fuerzas de corte maximas en nucleos

	(5.18)			(5.19)		
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$T_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$T_{y,i}$
Nucleo "Z"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Nucleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Nucleo "T"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	4,08	0,00	4,08
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	4,08	0,00	4,08
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Nucleo "U"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	22,21	0,00	22,21

Figura 6.105

Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos.

Finalmente los núcleos "T" Tipo 1 y Tipo 3 absorben una cantidad proporcional en el plano paralelo al eje Y, y cero en el plano ortogonal a este. También se puede observar que las cargas absorbidas por ambos núcleos son de la misma magnitud, esto es debido a que los muros

que componen ambos núcleos (1 y 2) tienen la misma orientación respecto a los ejes principales, a pesar de ser opuestos. (Fig. 6.94).

A continuación la tabla de la planilla *Excel*, muestra los momentos máximos $M_{y,i}$ en cada uno de los elementos (Fig.6.106, Fig.6.107 y Fig.6.108).

En este caso debido a que $m_{z,0} = 0$, no es necesario calcular $\eta_{M \max}$

Los momentos máximos en cada uno de los elementos resistentes son calculados por la fórmula (5.21) y (5.22). A continuación se muestra el cálculo de estos para uno de los muros de corte (muro 2).

$$M_{x,2}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0 \times 223,15) + \frac{2,083 \times (7,4)}{680,209} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 1,001 \right] / 1000 = 0$$

$$M_{y,2}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times (0,003 \times 223,15) - \frac{0,003 \times (7,0)}{680,209} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 1,001 \right] / 1000 = -0,08 \text{Tonm}$$

La Fig.6.106, Fig.6.107 y Fig.6.108 muestran los momentos máximos para los demás elementos resistentes.

Momentos maximos en muros de corte

Muro en x	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,00	0,00	0,00	-0,08	0,00	-0,08
2	0,00	0,00	0,00	-0,08	0,00	-0,08
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,00	0,00	0,00	-52,20	0,00	-52,20
2	0,00	0,00	0,00	-52,20	0,00	-52,20
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.106
Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.

Momentos máximos en marcos empotrados

Muro en y	(5.21)			(5.22)		
	$M_{x,i}$ (Ton m)		$M_{x,i}$	$M_{y,i}$ (Ton m)		$M_{y,i}$
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$		$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	
1	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1415	0,0000	-0,1415
2	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1415	0,0000	-0,1415
3	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1415	0,0000	-0,1415
4	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1415	0,0000	-0,1415

Figura 6.107

Datos de salida de momentos máximos en marcos empotrados.

Momentos máximos en núcleos

Núcleo	(5.21)			(5.22)		
	$M_{x,i}$ (Ton m)		$M_{x,i}$	$M_{y,i}$ (Ton m)		$M_{y,i}$
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$		$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	
Núcleo "Z"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	-30,63	0,00	-30,63
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	-30,63	0,00	-30,63
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	-166,59	0,00	-166,59

Figura 6.108

Datos de salida de momentos máximos en núcleos.

Como $m_{z_0}=0$, entonces el momento torsor de alabeo máximo definido por la fórmula (5.41). y el momento torsor de alabeo máximo, definido por la fórmula (5.30) también es cero.

$$M_{t,max} = 0 \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad M_{\omega,max} = 0$$

Recordemos que anteriormente se obtuvieron los desplazamientos horizontales del edificio, definidos por (5.16), (Fig.6.102), evaluando estos desplazamientos respecto a las condiciones señaladas en la sección 5.2.2.1, donde se dan a conocer los desplazamientos horizontales máximos, vemos que se satisfacen estas recomendaciones definidas en (5.18) y mostradas en la Fig. 6.109.

$$u = \frac{15}{500} = 0,03m \quad \text{y} \quad v = \frac{15}{500} = 0,03m$$

$u (m)$	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)
$v (m)$	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)

Se puede observar que :

$U_{edif} (m)$	0,0000	<	0,03	Cumple
$V_{edif} (m)$	0,0005	<	0,03	Cumple

Figura 6.109

Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.

A continuación se entrega a modo de resumen, un cuadro para cada sollicitación, con los indicadores de desempeño del edificio, obtenidos producto de las sollicitaciones de viento tanto en el eje X como en el Y.

Viento en X

Indicadores de desempeño

(5.31)

Rotacion max.(°)	Trans. max.(mm)	Razon de trans. max.	Frecuencia natural (Hz)			Razon de carga critica $v=N/Ncr$		
			Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico	Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico
0,0000	0,5165	0,0172	0,8836	0,0000	0,0000	0,0028	0,0000	0,0000

Se debe cumplir que: $v_{max} \leq 0,25$ (5.33)

Por lo tanto: $v = 0,0028$ Cumple!!

Viento en Y

Indicadores de desempeño

(5.31)

Rotacion max.(°)	Trans. max.(mm)	Razon de trans. max.	Frecuencia natural (Hz)			Razon de carga critica $v=N/Ncr$		
			Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico	Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico
0,0000	0,5269	0,0176	0,8836	0,0000	0,0000	0,0028	0,0000	0,0000

Se debe cumplir que: $v_{max} \leq 0,25$ (5.33)

Por lo tanto: $v = 0,0028$ Cumple!!

La intensidad de la carga uniformemente distribuida Q es definida por la fórmula (5.32)

$$Q = \frac{1.021.250}{5 \times 20 \times 15} = 680,8Kgf / m^2$$

La razón de carga crítica del sistema es calculada por la fórmula (5.31)

$$\nu = \frac{680,833 \times 20 \times 15 \times 5}{3,6 \times 10^8} = 0,0028$$

Se puede observar en este caso que ambas sollicitaciones (viento en X y viento en Y), producen una traslación o desplazamiento (en la parte superior de la estructura) similar en ambas direcciones, además de anular la rotación, esto es debido a la reubicación de los muros de corte e inclusión de otros elementos resistentes (marcos empotrados y núcleos), que orientados de forma adecuada tanto en la dirección X como el Y , proporcionan mayor rigidez al sistema y disminuyen la distancia entre el centro de corte O y el centro de masa C , transformando al sistema de monosimétrico a doblemente simétrico, lo que evita que la estructura sufra desplazamientos adicionales producto de la rotación.

En conclusión podemos decir que la eficiencia del sistema resistente del caso tres es mucho mejor que la del caso anterior (caso dos), ya que al reubicar los elementos resistentes (muros de corte) y agregar núcleos y marcos y ubicarlos de manera adecuada se eliminó la excentricidad que provocaba una torsión accidental en la planta del edificio. Por otro lado, el hecho de ubicar otros elementos (núcleos y marcos empotrados) a una distancia adecuada respecto del centro de corte O incrementó la rigidez torsional a la torsión de alabeo del sistema resistente. También se puede apreciar que el desplazamiento máximo disminuyó considerablemente.

6.6 Caso 4 (Análisis Sísmico)

Como ejemplo adicional tomaremos el modelo mostrado en la Fig. 6.110, para someterlo esta vez, a solicitaciones sísmicas. Los muros de corte en la dirección Y son el 1, 2, 3 y 4, por otro lado, los muros de corte en la dirección X son el 5, 6, 7 y 8. Los elementos 9 y 10 son marcos empotrados de tres columnas cada uno, y los elementos 11 y 12 son núcleos "T", Tipo 1 y Tipo 3, respectivamente. Esta distribución es constante en todos los pisos del edificio.

Se asume que el edificio será destinado a uso de oficinas con áreas privadas sin equipos, el edificio se ubica en la zona 1, con un suelo de tipo III.

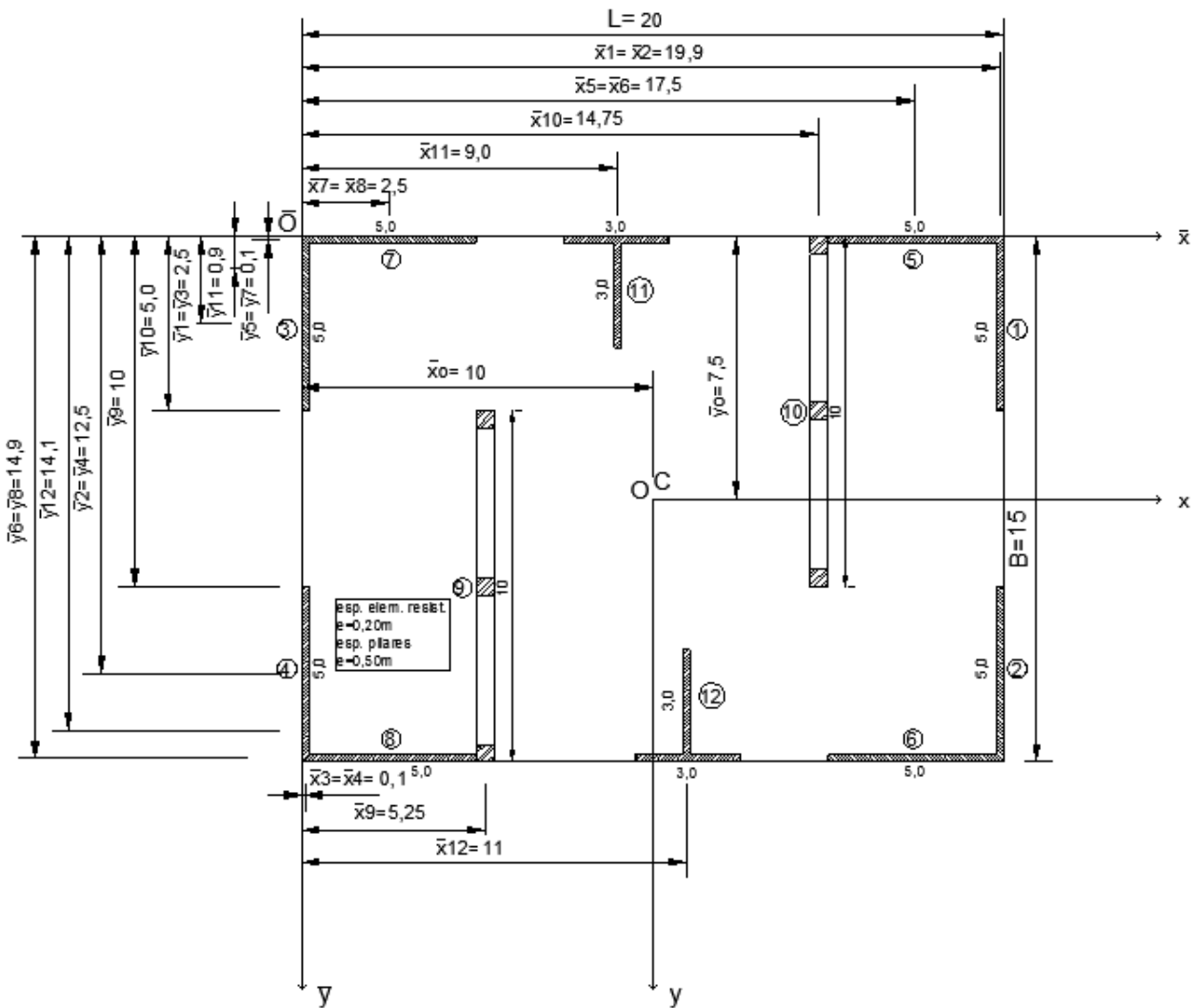


Figura 6.110
Distribución de elementos resistentes en planta de edificio.

6.6.1 Ingreso de Datos

El edificio estudiado es de 5 pisos, los cuales tienen una altura de 3 m cada uno, por lo tanto la altura total del edificio es $H=15$ m. El espesor de los muros es de 0,20 m y de la losa es de 0,15 m; se asume una calidad H25 para el hormigón, con $f'_c=250$ Kgf/cm² y $\gamma=2.500$ Kgf/m³; el módulo de elasticidad $E=2,68 \times 10^9$ Kgf/m²; el módulo de corte

$G = 1.13 \times 10^9 \text{ Kg} / \text{m}^2$ (módulo de Poisson $\nu = 0,18$). La altura y espesor de las columnas es de 0,5 m y 0,5 m respectivamente, y la altura y espesor de las vigas es de 0,5 m y 0,5 m respectivamente. Las dimensiones de la planta del edificio son $L=20 \text{ m}$ y $B=15 \text{ m}$.

Como ya se dijo en el punto 5.1.2, la carga sísmica se aproximará a una carga distribuida trapezoidal de intensidad q_0 y q_1 respectivamente, tal que la resultante R^* de dicha carga distribuida sea igual al esfuerzo de corte basal Q_0 . Para obtener lo anterior debemos calcular en primer lugar el coeficiente sísmico C , definido en el punto 6.2.3.1 de la *NCh 433 Of.96* "Diseño sísmico de edificios". Como se aprecia en la Fig. 6.111 ingresamos los parámetros definidos en las tablas 5.1, 6.1, 6.2 y 6.3 de la *NCh 433 Of.96*, luego de eso comparamos el coeficiente sísmico C con C_{\min} y C_{\max} .

Primero calculamos C_{\min} , definido por 6.2.3.1.1 de la *NCh 433 Of.96*

Según Tabla 6.2 de la *NCh 433 Of.96*, para zona sísmica 3, $A_o = 0,4g$, entonces:

$$C_{\min} = \frac{A_o}{6g} = \frac{0,2g}{6g} = 0,033$$

Según Tabla 6.3 de la *NCh 433 Of.96*, para tipo de suelo III, se tiene:

$$S = 1,2, \quad T' = 0,85, \quad n = 1,8, \quad \text{y}$$

según Tabla 5.1 de la *NCh 433 Of.96*, tenemos $R = 7$

$$C = \frac{2,75A_o}{gR} \times \left(\frac{T'}{T^*} \right)^n = \frac{2,75 \times 0,2g}{7g} \times \left(\frac{0,85}{0,84} \right)^{1,8} = 0,081$$

Ahora calculamos C_{\max} , definido por Tabla 6.4 de la *NCh 433 Of.96*. Según Tabla 6.4 de la *NCh 433 Of.96*, para zona sísmica 1, $A_o = 0,2g$, entonces:

$$C_{\max} = 0,35 \times \frac{SA_o}{g} = 0,35 \times \frac{1,2 \times 0,2g}{g} = 0,084$$

Como $0,033 < 0,081 < 0,084$, entonces el coeficiente sísmico $C = 0,081$.

Ahora pasamos a definir el coeficiente de categoría del edificio, para esto debemos recurrir a la tabla 6.1 de la *NCh 433 Of.96* "Diseño sísmico de edificios", donde se establece dicha clasificación. En vista de que se estableció que el edificio se destinaria para uso de oficinas con áreas privadas sin equipos, se asume que $I=1,0$. Respecto al peso sísmico del edificio, este se

calcula según el punto 5.5.1 de la *NCh 433 Of.96*.

En primer lugar calcularemos el peso total del edificio, sabemos que la densidad del hormigón es $\gamma = 2.500 \text{ Kg} / \text{m}^3$, el espesor de la losa es de $0,15\text{m}$, el área de la planta es $A=300 \text{ m}^2$, el numero de pisos es 5, el peso de los muros de corte es $P_{\text{muros}} = 60.000 \text{ Kg}$, el peso de los marcos empotrados es $P_{\text{marcos}} = 21.875 \text{ Kg}$, el peso de los núcleos es $P_{\text{nucleos}} = 18.000 \text{ Kg}$,

El peso total del edificio es:

$$P_t = 5 \times [(2.500 \times 0,15 \times 300) + 60.000 + 21.875 + 18.000] = 1.061.875 \text{ Kg}$$

Según Tabla 1 de la *NCh 1537 Of.86*, la sobrecarga de uso para techumbre es:

$$q_k = 1 \text{ kPa} = 100 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

Según Tabla 3 de la *NCh 1537 Of.86*, la sobrecarga de uso para pisos es:

$$q_k = 2,5 \text{ kPa} = 250 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y lo dispuesto en el punto 5.5.1 de la *NCh 433 Of.96*, el peso sísmico P es:

$$P = 1.061.875 + 0,25 \times [(100 \times 300) + (250 \times 300)] = 1.088.125 \text{ Kg}$$

Como $Q_0 = CIP$, entonces:

$$Q_0 = 0,081 \times 1,0 \times 1.088.125 = 87.635,5 \text{ Kg}$$

Analisis Sismico (Estatico)

R	7,00	factor de modif. de respuesta estructural (tabla 5.1 NCh 433)
I	1,00	coef. categoria edificio (tabla 6.1 NCh 433)
A ₀	0,20	aceleracion efectiva (tabla 6.2 NCh 433)
S	1,20	parametro del tipo de suelo (tabla 6.3 NCh 433)
T	0,85	parametro del tipo de suelo (tabla 6.3 NCh 433)
n	1,80	parametro del tipo de suelo (tabla 6.3 NCh 433)
T* (seg.)	0,838	periodo del modo con mayor masa traslacional
C	0,081	coef. sismico (seccion 6.2.3.1 NCh 433)
P (Kgf)	1088125,0	peso sismico del edificio (seccion 5.5.1 NCh 433)
Q ₀ (Kgf)	87635,53	esfuerzo de corte basal
R* (Kgf)	87635,53	resultante carga dist. sismica
q ₀ (Kgf/m)	3083,98	int. de carga unif.dist. sismica (ingresar valor en ii) ó iii))
q ₁ (Kgf/m)	5516,78	int. de carga dist.triang sismica
μ	1,79	razon de la funcion de carga (ingresar valor en #)

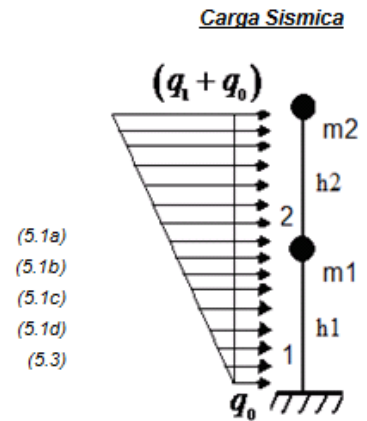


Figura 6.111
Incorporación datos de entrada para análisis sísmico.

Ahora que ya tenemos calculado Q_0 , definido por (5.1a), debemos calcular q_0 y q_1 , que como ya sabemos, uno corresponde a la parte uniforme de la carga sísmica, y la otra a la parte triangular, que en conjunto definen la distribución trapezoidal de la sollicitación. q_0 y q_1 están definidas por (5.1c) y (5.1d) respectivamente.

Para calcular q_0 , primero debemos saber el valor de F_1 . Según el punto 6.2.5 de la NCh 433 Of.96, la fuerza sísmica F_k esta definida como:

$$F_k = \frac{A_k P_k}{\sum_{j=1}^N A_j P_j} \times Q_0, \quad \text{con} \quad A_k = \sqrt{1 - \frac{Z_{k-1}}{H}} - \sqrt{1 - \frac{Z_k}{H}}$$

Por lo tanto:

$$F_1 = 87.635,5 \times \frac{22.975,3}{217.625} = 9.251,93 \text{Kgf}$$

Entonces:

$$q_0 = \frac{9.251,93}{3} = 3.083,98 \text{Kgf} \quad q_1 = 2 \times \left(\frac{87.635,5}{15} - 3.083,98 \right) = 5.516,78 \text{Kgf}$$

Calculado lo anterior, la razón de carga calculada por la fórmula (5.3) es:

$$\mu = \frac{5.516,78}{3.083,98} = 1,79$$

Por lo tanto la carga sísmica corresponde a una carga distribuida trapezoidal (Fig. 5.2).

6.6.2 Sismo en X

Una vez calculado lo anterior, se debe recordar que la fórmula que define esta distribución de carga depende de q_0 y μ , además de la altura total del edificio (fórmula 5.2), por lo tanto ambos valores se deben ingresar en la tabla de la planilla Excel, donde además se ingresan los datos geométricos y características del material. Como evaluaremos primero el sismo con dirección X, debemos ingresar el valor de q_0 en la celda ii). (Fig. 6.112).

Características geométricas del edificio

L (m)	20,0	dimension planta de edif. en dir. X	
B (m)	15,0	dimension planta de edif. en dir. Y	
n	5,0	numero de pisos del edificio	
h (m)	3,0	altura de piso	
E (Kgf/m ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad material	
G (Kgf/m ²)	1,13E+09	modulo de corte	
μ	1,79	razon de la funcion de carga	i)
γ (Kgf/m ³)	2500	densidad del material	
e losa (m)	0,15	espesor losa de piso	
q \varnothing x (Kgf/m)	3083,98	intensidad de carga unif.distribuida en X	ii)
q \varnothing y (Kgf/m)		intensidad de carga unif.distribuida en Y	iii)
H (m)	15,0	altura total del edif.	
A (m ²)	300,0	area de planta del edif.	
Pt (Kgf)	1061875,0	peso total del edificio	

Figura 6.112
Incorporación datos de entrada.

Luego ingresamos las características geométricas de los muros de corte, como la altura, espesor, largo y su ubicación en la planta (Fig. 6.113).

Aplicando la fórmula (2.1) y (2.2), tenemos las coordenadas del centro de corte de la columna equivalente. (Fig. 6.119).

$$\bar{x}_0 = \frac{107,798}{10,798} = 10,0m \quad \text{y} \quad \bar{y}_0 = \frac{69,38}{9,251} = 7,5m$$

Como se aprecia en la Fig. 6.113, obtenemos el momento de inercia con respecto a los ejes x e y, calculado de la fórmula (2.3). Calcularemos las características de rigidez del muro de corte 6.

$$I_x = \frac{(5 \times 0,2^3)}{12} = 0,0033m^4 \quad \text{y} \quad I_y = \frac{(0,2 \times 5^3)}{12} = 2,083m^4$$

Las coordenadas del centro de corte del i-ésimo elemento resistente (x_i), son calculadas de la fórmula (2.6).

$$x_i = 17,5 - 10,0 = 7,5m$$

$$y_i = 14,9 - 7,5 = 7,4m$$

Calculado lo anterior podemos obtener

$$I_x x_i^2 = 0,0033 \times (7,5)^2 = 0,188m^6$$

$$I_y y_i^2 = 2,083 \times (7,4)^2 = 114,083m^6$$

La constante de torsión de Saint Venant (J), es calculada de la fórmula (2.4).

$$J_i = \frac{1}{3}(0,2^3 \times 5) = 0,013m^4$$

La Fig. 6.113 muestra la obtención de las características de rigidez de los demás muros de corte, cabe recordar que las celdas celestes entregan los datos de salida.

Muros de corte

Muro en x	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m4)	$I_{y,i}$ (m4)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i}x^2$ (m6)	$I_{x,i}y^2$ (m6)	J_i (m4)
1	17,500	14,900	3,00	5,00	0,20	0,003	2,083	7,500	7,400	0,188	114,083	0,013
2	2,500	0,100	3,00	5,00	0,20	0,003	2,083	-7,500	-7,400	0,188	114,083	0,013
3	17,500	0,100	3,00	5,00	0,20	0,003	2,083	7,500	-7,400	0,188	114,083	0,013
4	2,500	14,900	3,00	5,00	0,20	0,003	2,083	-7,500	7,400	0,188	114,083	0,013
5						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Muro en y	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m4)	$I_{y,i}$ (m4)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i}x^2$ (m6)	$I_{x,i}y^2$ (m6)	J_i (m4)
1	19,900	2,500	3,00	5,00	0,20	2,083	0,003	9,900	-5,000	204,188	0,083	0,013
2	0,100	12,500	3,00	5,00	0,20	2,083	0,003	-9,900	5,000	204,188	0,083	0,013
3	0,100	2,500	3,00	5,00	0,20	2,083	0,003	-9,900	-5,000	204,188	0,083	0,013
4	19,900	12,500	3,00	5,00	0,20	2,083	0,003	9,900	5,000	204,188	0,083	0,013
5						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6						0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Figura 6.113

Incorporación características geométricas y de rigidez de muros de corte.

Ahora se ingresan los datos de vigas, columnas para así encontrar I_g la carga crítica (Fig. 6.114).

(maximo de columnas :10)

n marcos emp.	2	n° de marcos empotrados
n columnas	3	n° de columnas
h marc. emp. (m)	3,0	altura marco empotrado
h viga (m)	0,5	altura de viga
E_b (Kg/m ²)	2,69E+09	modulo de elasticidad viga
h columna (m)	0,5	altura de columna
e columna (m)	0,5	espesor columna
k_p	2,0	(ver Tabla 1)
L(m)	10,0	long. total marco emp.
n vanos	2	n° de vanos
I_g (m ⁴)	11,28	segundo momento global

(4.56)

Figura 6.114

Incorporación características geométricas y de marcos empotrados.

Para obtener la carga crítica de los marcos empotrados debemos calcular N_l , definido por la fórmula (4.52). La rigidez característica para la deformación por flexión local es calculada por la fórmula (4.53).

$$E_c I_c = 2,68 \times 10^9 \times \frac{0,5 \times 0,5^3}{12} = 1,39 \times 10^7 \text{ Kgfm}^2$$

Por lo tanto

$$N_l = \frac{7,84 \times 0,759 \times 1,39 \times 10^7 \times 3}{15^2} = 1,11 \times 10^6 \text{ Kgf}$$

Ahora calculamos N_g , definido por la fórmula (4.54). Cada marco empotrado está compuesto de tres columnas, por lo tanto $k_p = 2$ (ver tabla 1 en Anexo). Por lo tanto

$$I_g = 2 \times 0,25 \times 4,75^2 = 11,28 \text{ m}^4$$

La rigidez característica para la deformación por flexión global es calculada por la fórmula (4.55).

$$E_c I_g = 2,68 \times 10^9 \times 11,28 = 3,02 \times 10^{10} \text{ Kgfm}^2$$

Por lo tanto

$$N_g = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 11,28}{15^2} = 7,99 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

La carga crítica asociada a la deformación de corte global calculada por la fórmula (4.57) es

$$K_g = 2 \times \frac{6 \times 2,68 \times 10^9 \times 0,0052}{5 \times 3} = 1,12 \times 10^7 \text{ Kgf}$$

La carga crítica asociada a la deformación de corte local calculada por la fórmula (4.58) es

$$K_l = \frac{\pi^2 \times 1,39 \times 10^7 \times 3}{3^2} = 4,59 \times 10^7 \text{ Kgf}$$

Por lo tanto K , calculada por la fórmula (4.59) es

$$K = 1,12 \times 10^7 \times \frac{4,59 \times 10^7}{(1,12 \times 10^7 + 4,59 \times 10^7)} = 8,98 \times 10^6$$

Finalmente, la carga crítica para un marco empotrado, calculada por la fórmula (4.60) es

$$N_{cr} = \frac{1,11 \times 10^6 + 8,98 \times 10^6 + (1,11 \times 10^6 \times 8,98 \times 10^6) / 7,99 \times 10^8}{1 + (8,98 \times 10^6) / 7,99 \times 10^8} = 9,99 \times 10^6 \text{ Kgf}$$

Lo dispuesto en la sección 4.7 señala que la estabilidad, frecuencia y análisis de tensiones globales tanto de muros de corte acoplados así como de marcos puede ser simplificada reemplazando dichos elementos por muros ficticios, manteniendo ancho y altura, no así el espesor, que se obtiene gracias a la fórmula (4.75).

$$t^* = \frac{1,53 \times 9,99 \times 10^6 \times 3^2}{0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 10^3} = 0,00007 \text{ m}$$

$N_{cr} \text{ (Kgf)}$	1,00E+07	carga critica marco empotrado	(4.60)
$N_{cr, wall} \text{ (Kgf)}$	1,00E+07	carga critica muro equivalente	(4.74)
$t^* \text{ (m)}$	0,00007	espesor muro equivalente	(4.75)

Figura 6.115

Datos de salida carga crítica y espesor muro equivalente.

Teniendo el espesor equivalente del marco empotrado, (que ahora es un muro ficticio) podremos ingresar las características geométricas de este, para así obtener las características de rigidez de los cuatro muros ficticios. A continuación se mostrará el cálculo de uno de ellos (muro ficticio 9).

$$I_x = \frac{(0,00007 \times 10^3)^3}{12} = 0,006 \text{ m}^4 \qquad I_y = \frac{(10 \times 0,00007^3)}{12} = 0$$

Las coordenadas del centro de corte del i -ésimo elemento resistente (x_i), son calculadas de la fórmula (2.6)

$$x_i = 5,25 - 10,0 = -4,75 \text{ m} \qquad y_i = 10 - 7,5 = 2,5 \text{ m}$$

Calculado lo anterior podemos obtener

$$I_x x_i^2 = 0,006 \times (-4,75)^2 = 0,127 \text{ m}^6 \qquad I_y y_i^2 = 0$$

La constante de torsión de Saint Venant (J), es calculada de la fórmula (2.4).

$$J_i = \frac{1}{3}(0,0007^3 \times 10) = 0$$

La Fig. 6.116 muestra la obtención de las características de rigidez de los demás muros ficticios.

Características geométricas y de rigidez de marcos empotrados

Muro en y	\bar{x}_j (m)	\bar{y}_j (m)	h (m)	Lm (m)	e (m)	$I_{x,i}$ (m ⁴)	$I_{y,i}$ (m ⁴)	x_i (m)	y_i (m)	$I_{x,i \times 2}$ (m ⁶)	$I_{x,i \times y2}$ (m ⁶)	J_i (m ⁴)
1	5,25	10,00	3,00	10,00	0,00007	0,006	0,000	-4,750	2,500	0,127	0,000	0,000
2	14,75	5,00	3,00	10,00	0,00007	0,006	0,000	4,750	-2,500	0,127	0,000	0,000
3				0,00	0,00000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4				0,00	0,00000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Figura 6.116

Incorporación características geométricas y de rigidez de muros equivalentes (marcos empotrados).

A continuación ingresamos las características geométricas de los núcleos. En este caso el edificio posee en cada piso, un núcleo "T" del Tipo 1 y 3. Lo anterior puede apreciarse en las Fig. 6.117 y Fig. 6.118.

En primer lugar calcularemos los parámetros auxiliares dispuestos en el Anexo A para esta figura. (núcleo "T" Tipo I).

$$A_f = 3,0 \times 0,2 = 0,6m^2$$

$$A_a = 0,2 \times 0,2 = 0,04m^2$$

$$A_g = 0,2 \times \left(3 - \frac{0,2}{2} - \frac{0,2}{2} \right) = 0,56m^2$$

Por lo tanto:

$$A = 0,6 + 0,04 + 0,56 = 1,2m^2$$

$$e = \frac{0,04}{1,2} \times 3 + \frac{0,56}{1,2} \left(\frac{3}{2} - \frac{0,2}{4} + \frac{0,2}{4} \right) = 0,8$$

$$e^* = 3 - 0,8 = 2,2$$

Ahora obtenemos el momento de inercia con respecto a los ejes x e y del núcleo "T" Tipo I.

$$I_x = \frac{1}{12} \left(0,6 \times 0,2^2 + 0,04 \times 0,2^2 + 0,56 \times \left(3 - \frac{0,2}{2} - \frac{0,2}{2} \right)^2 \right) + 0,6 \times 0,8^2$$

$$+ 0,04 \times 2,2^2 + 0,56 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{0,2}{4} + \frac{0,2}{4} - 2,2 \right)^2 = 1,22m^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} \times (0,6 \times 3^2 + 0,04 \times 0,2^2 + 0,56 \times 0,2^2) = 0,452m^4$$

El cálculo de las coordenadas del centro del núcleo "T" Tipo I se obtiene de la fórmula (2.6).

$$x_i = 9 - 10 = -1,0m \qquad y_i = 0,9 - 7,5 = -6,6m$$

Obteniendo lo anterior, podemos calcular:

$$I_x x_i^2 = 1,22 \times (-1,0)^2 = 1,22m^6 \qquad I_y y_i^2 = 0,452 \times (-6,6)^2 = 25,425m^6$$

Dado que el núcleo "T" Tipo I es simétrico respecto a uno de sus ejes, el producto de inercia es nulo.

$$I_{xy} = 0$$

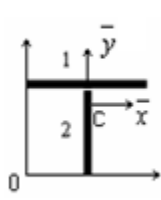
Ahora obtenemos la constante de torsión J_i

$$J_i = \frac{1}{3} (0,6 \times 0,2^2 + 0,04 \times 0,2^2 + 0,56 \times 0,2^2) = 0,016m^4$$

y la constante de alabeo I_ω

$$I_\omega = \frac{0,6 \times 3^2 \times 0,04 \times 0,2^2 \times 3^2}{144 \times 0,452} = 0,0012m^6$$

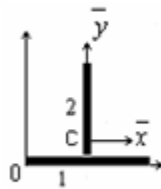
En la Fig. 6.117 se puede apreciar el ingreso de las características geométricas del elemento (celdas verdes), y la obtención de las características de rigidez del mismo. (celdas celestes).



	Coord. Global		Centroide (eje local)		
Nucleo "T"	$\bar{x}_i (m)$	$\bar{y}_i (m)$	$\bar{x} (m)$	$\bar{y} (m)$	$I_{x,i} (m^4)$
Tipo 1	9,000	0,900	1,500	2,300	1,220
Muro	Lm (m)	e (m)	h (m)	A (m2)	$I_{y,i} (m^4)$
1	3,0	0,2	3,00	0,60	0,452
2	3,0	0,2	3,00	0,60	
$x_i (m)$	$y_i (m)$	$I_{\omega,i} (m^6)$	$I_{x,i \times 2} (m^6)$	$I_{x,i} y_2 (m^6)$	$J_i (m^4)$
-1,000	-6,600	0,0012	1,220	19,689	0,016

Figura 6.117 Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo I

El cálculo mostrado anteriormente se aplica también para el núcleo "T" Tipo 3, mostrado en la Fig. 6.118.



	Coord. Global		Centroide (eje local)		
Núcleo "T"	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	\bar{x} (m)	\bar{y} (m)	$I_{x,i}$ (m ⁴)
Tipo 3	11,000	14,100	1,500	0,900	1,220
Muro	L_m (m)	e (m)	h (m)	A (m ²)	$I_{y,i}$ (m ⁴)
1	3,0	0,2	3,00	0,60	0,452
2	3,0	0,2	3,00	0,60	
x_i (m)	y_i (m)	$I_{\omega,i}$ (m ⁶)	$I_{x,i x^2}$ (m ⁶)	$I_{x,i y^2}$ (m ⁶)	J_i (m ⁴)
1,000	6,600	0,0012	1,220	19,689	0,016

Figura 6.118
Incorporación características geométricas y de rigidez de núcleo "T" Tipo3.

Cuando la ubicación del centro de corte es conocida, el sistema coordenado se traslada al centro de corte, que es donde se sitúa la columna equivalente. La constante de torsión de Saint Venant de la columna equivalente es:

$$\sum J_i = 0,0133 \times 8 + 0,016 \times 2 = 0,139 m^4$$

La constante de torsión de alabeo (fórmula 2.5) de la columna equivalente es:

$$I_{\omega} = 0,0024 \times 2 + 820,195 + 496,045 = 1316,242 m^6$$

Las coordenadas del centro geométrico de la planta del edificio, cuyo origen está en el centro de corte, se obtiene de la fórmula (2.9). El hecho de que x_c e y_c sean distintos de cero, nos indica que el sistema es doblemente simétrico, (Fig. 2.2/c) es decir, los tres modos básicos están desacoplados.

$$x_c = \frac{20}{2} - 10,0 = 0 \qquad y \qquad y_c = \frac{15}{2} - 7,5 = 0$$

Obteniendo lo anterior, se puede determinar que $t=0$, ya que no existe excentricidad, es decir, el centro de corte (O) y el centro geométrico (C) coinciden.

El radio de giro se calcula de la formula (2.8)

$$i_p = \sqrt{\frac{20^2 + 15^2}{12} + 0^2} = 7,217 m$$

El valor del parámetro de torsión es obtenido de la fórmula (4.20)

$$k = 15 \times \sqrt{\left(\frac{1,13 \times 10^9 \times 0,139}{2,68 \times 10^9 \times 1316,242} \right)} = 0,100$$

En la Fig.6.119 se puede apreciar la entrega de los parámetros anteriormente calculados.

Características de la columna equivalente

Por lo tanto:

\bar{x}_0 (m)	10,00	coordenada x de centro de corte	(2.1)
\bar{y}_0 (m)	7,50	coordenada y de centro de corte	(2.2)
$\Sigma I_{x,i}$ (m4)	10,798	sumatoria de las inercias en X	(2.3)
$\Sigma I_{y,i}$ (m4)	9,251	sumatoria de las inercias en Y	(2.3)
ΣJ_i (m4)	0,139	cte. de torsion de Saint-Venant	(2.4)
$I\omega$ (m6)	1316,242	cte. de alabeo	(2.5)
t (m)	0,000	dist. entre centro de corte O y centro geom. C	(2.7)
i_p (m)	7,217	radio de giro	(2.8)
x_c (m)	0,000	coordenada x de centro geometrico del edif.	(2.9)
y_c (m)	0,000	coordenada y de centro geometrico del edif.	(2.9)
ΣI_{xy}	0,000	sumatoria del producto de inercia	
$\Sigma I_{x,i} x^2$ (m6)	820,195		
$\Sigma I_{x,i} y^2$ (m6)	496,045		
k	0,100	parametro de torsion	(4.20)

Como $x_c = 0,000$
 $y_c = 0,000$ entonces el sistema es: **Doblemente Simetrico**

Figura 6.119

Datos de salida de características geométricas y de rigidez.

6.6.3 Análisis de Estabilidad

Producto del ingreso de datos (celdas color verde) en relación a las características geométricas y de rigidez del edificio obtenemos las cargas críticas del edificio, en los ejes principales ($N_{cr,x}, N_{cr,y}$), definidas por (4.16). (Fig. 6.120).

$$N_{cr,x} = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 9,251}{(15)^2} = 6,56 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

$$N_{cr,y} = \frac{7,84 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 10,798}{(15)^2} = 7,65 \times 10^8 \text{ Kgf}$$

Ahora calculamos el factor de reducción (fórmula 4.17).

$$r_s = \frac{5}{5+1,588} = 0,759 \quad \text{y} \quad k_s = \frac{0,100}{\sqrt{0,759}} = 0,115$$

Carga Critica

$N_{cr,x}$ (Kgf)	6,56E+08	carga de oscilacion critica en X	(4.16)
$N_{cr,y}$ (Kgf)	7,65E+08	carga de oscilacion critica en Y	(4.16)
r_s	0,759	factor de reduccion (ver tabla 4.1)	(4.17)
k_s	0,115		(4.19)

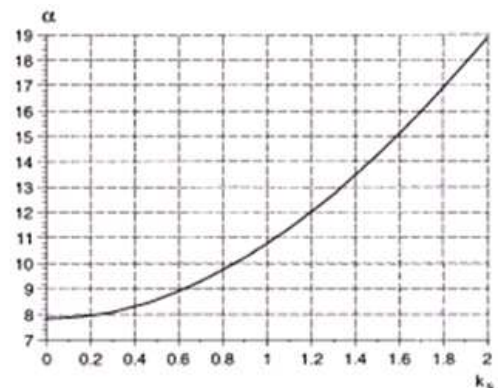
Figura 6.120
Datos de salida de cargas criticas en X e Y.

El factor de reducción r_s definido por (4.17) y la relación entre éste y el factor de torsión, dan origen a k_s definido por (4.19), factor que junto a la Tabla 4.4 permiten encontrar el valor de α interpolando entre los valores cercanos a k_s (Fig. 6.121), todo lo anterior, con el objetivo de poder calcular $N_{cr,\varphi}$, definido por (4.30). (Fig. 6.122).

Para obtener α debemos interpolar entre los valores cercanos a k_s (Tabla 4.4)

x (1)	0,100	valor anterior a k_s (ver tabla 4.4)
x (2)	0,200	valor posterior a k_s (ver tabla 4.4)
y (1)	7,867	valor anterior a α (ver tabla 4.4)
y (2)	7,957	valor posterior a α (ver tabla 4.4)
α	7,880	(ver tabla 4.4)

a)



b)

Figura 6.121

a) Interpolación de valores cercanos a k_s , b) Relación entre k_s y α .

La carga crítica asociada al pandeo torsional $N_{cr,\varphi}$ (fórmula 4,18) es

$$N_{cr,\varphi} = \frac{7,880 \times 0,759 \times 2,68 \times 10^9 \times 1316,242}{7,217^2 \times 15^2} = 1,80 \times 10^9 \text{ Kgf}$$

Los parámetros de excentricidad de carga son calculados por la fórmula (4.25)

con $\tau_x = \frac{0}{7,217} = 0$ y $\tau_y = \frac{0}{7,217} = 0$

$$r_1 = \frac{1,80 \times 10^9}{6,56 \times 10^8} = 2,746 \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1,80 \times 10^9}{7,65 \times 10^8} = 2,352$$

Como $k_s = 0,115$
 $\alpha = 7,880$, entonces:

$N_{cr,\phi}$ (Kgf)	1,80E+09	carga crítica de pandeo torsional puro	(4.18)
τ_x	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.25)
τ_y	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.25)
r_1	2,746		(4.26)
r_2	2,352		(4.26)

Figura 6.122
 Datos de salida de carga crítica de pandeo torsional puro.

Puede observarse que $x_c = y_c = 0$ (Fig. 6.119), lo que indica que el sistema es doblemente simétrico (Fig.2.2/c), y sus cargas críticas básicas no están acopladas, por lo tanto la carga crítica del edificio será la de menor valor entre $N_{cr,x}$, $N_{cr,y}$ y $N_{cr,\phi}$. (Fig. 6.123),

Por lo tanto :

$N_{cr,x}$ (Kgf)	6,56E+08	carga de oscilacion critica en X
$N_{cr,y}$ (Kgf)	7,65E+08	carga de oscilacion critica en Y
$N_{cr,\phi}$ (Kgf)	1,80E+09	carga crítica de pandeo torsional puro

Si el sistema es:

i) Doblemente simetrico

N_{cr} (Kgf)	6,56E+08	carga crítica del edificio
----------------	----------	----------------------------

Figura 6.123
 Datos de salida de carga de oscilación crítica del edificio en X e Y.

6.6.4 Análisis de Frecuencia

Al igual que en el análisis de estabilidad, el ingreso de datos (celdas color verde) en relación a las características geométricas y de rigidez del edificio nos entrega las frecuencias naturales del edificio (4.59), en dirección paralela a los ejes principales. (Fig. 6.124).

El factor de reducción es

$$r_f = \sqrt{\frac{5}{5 + 2,06}} = 0,842$$

Teniendo r_f , podemos calcular las frecuencias naturales en X e Y.

$$f_x = \frac{0,56 \times 0,842}{(15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 9,251 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 1,1927 \text{ Hz}$$

$$f_y = \frac{0,56 \times 0,842}{(15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 10,798 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 1,2886 \text{ Hz}$$

Frecuencia fundamental

f_x (Hz)	1,1927	frecuencia natural en direccion X	(4.37)
f_y (Hz)	1,2886	frecuencia natural en direccion Y	(4.37)
r_f	0,842	ver tabla 4.7	(4.39)

Figura 6.124
Datos de salida de frecuencias naturales en X e Y.

El factor de torsión k definido por (4.33) y la Tabla 4.8 nos permite encontrar el valor del parámetro de frecuencia (Fig. 6.125), todo lo anterior, con el objetivo de poder calcular f_φ , definido por (4.40). (Fig. 6.126).

Como $k = 0,100$

entonces:

η	0,5606	(ver tabla 4.8)
--------	--------	-----------------

Figura 6.125

a) Interpolación de valores cercanos a k , b) Relación entre k y η .

La frecuencia natural para vibración torsional pura es

$$f_\varphi = \frac{0,5606 \times 0,842}{7,217 \times (15)^2} \times \sqrt{\frac{2,68 \times 10^9 \times 1316,242 \times 9,81}{2500 \times 300}} = 1,974 \text{ Hz}$$

Los parámetros de excentricidad de carga son calculados por la fórmula (4.46)

con

$$\tau_x = \frac{0}{7,217} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_y = \frac{0}{7,217} = 0$$

$$r_1 = \frac{1,974^2}{1,1927^2} = 2,738 \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1,974^2}{1,2886^2} = 2,345$$

Como $r_f = 0,842$
 $\eta = 0,5606$, entonces:

f_ϕ (Hz)	1,974	frecuencia natural para vibración torsional pura	(4.40)
τ_x	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.46)
τ_y	0,000	parametro de excentricidad de carga	(4.46)
r_1	2,738		(4.47)
r_2	2,345		(4.47)

Figura 6.126

Datos de salida de frecuencia natural para vibración torsional puro.

De manera similar a lo sucedido con las cargas críticas, podemos observar que debido a que el sistema resistente es doblemente simétrico (Fig.2.2/c), y los modos básicos no están combinados, la primera frecuencia natural del edificio es la de menor valor entre f_x , f_y y f_ϕ . Al obtener la frecuencia natural de mayor masa traslacional, también podemos obtener el periodo natural del edificio, definido por la ecuación (4.60).

Por lo tanto :

f_x (Hz)	1,1927	frecuencia natural en dirección X
f_y (Hz)	1,2886	frecuencia natural en dirección Y
f_ϕ (Hz)	1,9735	frecuencia natural para vibración torsional pura

Si el sistema es:

i) Doblemente simetrico

f (Hz)	1,1927	frecuencia natural del edificio
----------	--------	---------------------------------

entonces :

T (seg)	0,8384	periodo natural del edificio	(4.38)
-----------	--------	------------------------------	--------

Figura 6.127

Datos de salida de frecuencias y periodo natural del edificio.

6.6.5 Tensiones y Deformación (sismo en X)

Sabemos que la dirección de la carga sísmica $q(z)$ es X y el hecho de que una de las coordenadas del centro geométrico es cero anulan el torque alrededor del centro de corte, definido por (5.8), mostrado en la Fig. 6.128.

$$m_{z_0} = 3.083,98 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

Ahora calculamos los parámetros auxiliares de carga definidos por la fórmula (5.12)

$$\bar{q}_x = \frac{10,798 \times 3083,98}{99,89} = 333,38 \text{Kgf} / m \quad \text{y} \quad \bar{q}_y = \frac{9,251 \times 0}{99,89} = 0$$

m_{z0} (Kgf/m)	0,00E+00	torque alrededor del centro de corte	(5.8)
\bar{q}_x (Kgf/m)	333,38	parametro auxiliar de carga	(5.12)
\bar{q}_y (Kgf/m)	0,00	parametro auxiliar de carga	(5.12)

Figura 6.128
Datos de salida de torque producto de la carga de viento.

Como ya se comentó en la sección 5.2.2.1, los desplazamientos máximos de la columna equivalente ocurren en la parte superior de ésta, la Fig.6.129 da muestra de ello. Así como los desplazamientos máximos se dan en $z=H$, lo mismo ocurre con la rotación máxima ϕ_{max} .

$$u_{max} = \frac{333,38}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} + 1,79 \times \frac{11}{120} \right) \times 15^4 = 0,00182m \quad \text{y} \quad v_{max} = 0$$

$$\phi_{max} = 0$$

Desplazamientos horizontales en la parte superior de la columna equivalente

U_{max} (H) (m)	0,0018	trans. max. en la columna eq. en X	(5.13)
V_{max} (H) (m)	0,0000	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.14)

Rotacion del edificio

ϕ_{max} (rad)	0,0000	rotacion max en radianes	(5.15)
ϕ_{max} (°)	0,0000	rotacion max en grados	

Figura 6.129
Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.

En este caso, la rotación de la columna equivalente definida por la fórmula (5.15) es nula, por lo tanto no produce desplazamientos adicionales en la parte superior del edificio, definido por la fórmula (5.16). (Fig. 6.130)

Desplazamientos horizontales maximos del edificio

U_{edif} (u B) (m)	0,0018	trans. max. en la columna eq. en X	(5.16)
V_{edif} (v A) (m)	0,0000	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.16)

Figura 6.130
Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.

Ahora damos paso al cálculo de las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes (muros de corte, marcos y núcleos), que se ubican en la base de la

estructura, en este caso no es necesario calcular $\eta_{T_{max}}$, ya que $m_{z0} = 0$.

Las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes son calculadas por la fórmula (5.18) y (5.19). A continuación se muestra el cálculo de estas para uno de los muros de corte (muro 6).

$$T_{x,6}^{max} = \left[15 \times \left(1 + \frac{1,79}{2} \right) \times (2,083 \times 333,38) - \frac{2,083 \times (7,4)}{1316,242} \times 0 \times 15 \times 1,899 \right] / 1000 = 19,74 \text{Tonf}$$

$$T_{y,6}^{max} = \left[15 \times \left(1 + \frac{1,79}{2} \right) \times (0,003 \times 0) + \frac{0,003 \times (7,5)}{1316,242} \times 0 \times 15 \times 1,899 \right] / 1000 = 0$$

La Fig.6.131, Fig.6.132 y Fig.6.133 muestran las fuerzas de corte para los demás elementos resistentes.

Fuerzas de corte maximas en muros de corte

Muro en x	(5.18) Tx,i (Tonf)			(5.19) Ty,i (Tonf)		
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
1	19,74	0,00	19,74	0,00	0,00	0,00
2	19,74	0,00	19,74	0,00	0,00	0,00
3	19,74	0,00	19,74	0,00	0,00	0,00
4	19,74	0,00	19,74	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.18) Tx,i (Tonf)			(5.19) Ty,i (Tonf)		
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
1	0,03	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00
2	0,03	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00
3	0,03	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00
4	0,03	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.131
Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.

Se puede ver claramente que los elementos 5, 6, 7 y 8 (muros de corte en dirección X) absorben la mayor parte de la carga en la dirección paralela a su plano de rigidez (eje X), y cero en la dirección perpendicular a este. Por otra parte los elementos 1, 2, 3 y 4 (muros de corte en dirección Y), absorben una pequeña parte de la carga, en la dirección perpendicular a su plano de rigidez (eje Y).

Fuerzas de corte máximas en marcos empotrados

Muro en y	(5.18)		(5.19)			
	Tx,i (Tonf)		Tx,i	Ty,i (Tonf)		Ty,i
	[qx,i]	[mz]		[qy,i]	[mz]	
1	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000

Figura 6.132

Datos de salida fuerzas de corte máxima en marcos empotrados.

En el caso de los marcos empotrados (elementos 9 y 10), estos no absorben carga, ya que la rigidez proporcionada por su eje mayor es muy pequeña comparada con un muro de corte, además este eje es ortogonal a la sollicitación de viento.

Fuerzas de corte máximas en núcleos

	(5.18)		(5.19)			
	Tx,i (Tonf)		Tx,i	Ty,i (Tonf)		Ty,i
	[qx,i]	[mz]		[qy,i]	[mz]	
Núcleo "Z"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"						
Tipo 1	4,28	0,00	4,28	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	4,28	0,00	4,28	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	87,66	0,00	87,66	0,00	0,00	0,00

Figura 6.133

Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos.

Finalmente los núcleos "T" Tipo 1 y Tipo 3 absorben una cantidad proporcional en el plano paralelo al eje X, y cero en el plano ortogonal a este. En la Fig. 6.133 se indica la sumatoria de fuerzas de corte de todos los elementos (muros de corte, muros ficticios y núcleos), que corresponde al corte basal Q_o , anteriormente calculado.

También se puede observar que las cargas absorbidas por ambos núcleos son de la misma magnitud, esto es debido a que los muros que componen ambos núcleos (1 y 2) tienen la misma orientación respecto a los ejes principales, a pesar de ser opuestos. (Fig. 6.134).

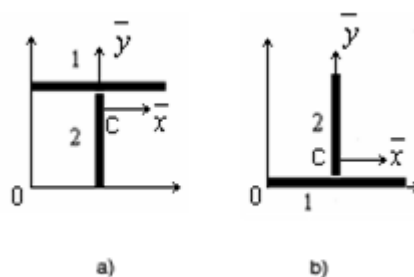


Figura 6.134
Orientación de los núcleos "T" a) Tipo 1 b) Tipo 3.

A continuación la tabla de la planilla *Excel*, muestra los momentos máximos $M_{x,i}$ en cada uno de los elementos (Fig.6.135, Fig.6.136 y Fig.6.137).

En este caso debido a que $m_{z0} = 0$, no es necesario calcular η_M

Los momentos máximos en cada uno de los elementos resistentes son calculados por la fórmula (5.21) y (5.22). A continuación se muestra el cálculo de estos para uno de los muros de corte (muro 6).

$$M_{x,6}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times \left(1 + \frac{2 \times 1,79}{3} \right) \times (2,083 \times 333,38) + \frac{2,083 \times (7,4)}{1316,242} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 2,195 \right] / 1000 = -171,38 \text{Tonm}$$

$$M_{y,6}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times \left(1 + \frac{2 \times 1,79}{3} \right) \times (0,003 \times 0) - \frac{0,003 \times (7,5)}{1316,242} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 2,195 \right] / 1000 = 0$$

La Fig.6.135, Fig.6.136 y Fig.6.137 muestran los momentos máximos para los demás elementos resistentes.

Momentos máximos en muros de corte

Muro en x	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	-171,38	0,00	-171,38	0,00	0,00	0,00
2	-171,38	0,00	-171,38	0,00	0,00	0,00
3	-171,38	0,00	-171,38	0,00	0,00	0,00
4	-171,38	0,00	-171,38	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	-0,27	0,00	-0,27	0,00	0,00	0,00
2	-0,27	0,00	-0,27	0,00	0,00	0,00
3	-0,27	0,00	-0,27	0,00	0,00	0,00
4	-0,27	0,00	-0,27	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.135
Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.

Momentos máximos en marcos empotrados

Muro en y	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Figura 6.136
Datos de salida de momentos máximos en marcos empotrados.

Momentos máximos en núcleos

	(5.21)		(5.22)			
	Mx,i (Ton m)		My,i (Ton m)			
Núcleo "Z"	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
Tipo 1	-37,18	0,00	-37,18	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	-37,18	0,00	-37,18	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	-760,972	0,00	-760,97	0,00	0,00	0,00

Figura 6.137
 Datos de salida de momentos máximos en núcleos.

Analizando las fórmulas (5.38) y (5.41) podemos deducir que tanto el momento torsional de Saint –Venant como el de alabeo es cero, esto debido a que ambos dependen de m_{z_0} que en este caso es nulo.

$$M_{t,max} = 0 \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad M_{\omega,max} = 0$$

Recordemos que anteriormente se obtuvieron los desplazamientos horizontales del edificio, definidos por (5.16), (Fig.6.130), evaluando estos desplazamientos respecto a las condiciones señaladas en la sección 5.2.2.1, donde se dan a conocer los desplazamientos horizontales máximos, vemos que se satisfacen estas recomendaciones definidas en (5.18) y mostradas en la Fig. 6.138.

$$u = \frac{15}{500} = 0,03m \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad v = \frac{15}{500} = 0,03m$$

u (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)
v (m)	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)

Se puede observar que :

U_{edif} (m)	0,0018	<	0,03	Cumple
V_{edif} (m)	0,0000	<	0,03	Cumple

Figura 6.138

Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.

6.6.6 Sismo en Y

Ahora evaluaremos el sismo con dirección Y, debemos ingresar el valor de q_0 en la celda iii) (Fig. 6.139).

Características geométricas del edificio

L (m)	20,0	dimension planta de edif. en dir. X	■ Datos de entrada
B (m)	15,0	dimension planta de edif. en dir. Y	
n	5,0	numero de pisos del edificio	■ Datos de salida
h (m)	3,0	altura de piso	
E (Kgf/m ²)	2,68E+09	modulo de elasticidad material	i
G (Kgf/m ²)	1,13E+09	modulo de corte	
μ	1,79	razon de la funcion de carga	ii
γ (Kgf/m ³)	2500	densidad del material	
e_{losa} (m)	0,15	espesor losa de piso	iii
$q \varnothing x$ (Kgf/m)		intensidad de carga unif.distribuida en X	
$q \varnothing y$ (Kgf/m)	3083,98	intensidad de carga unif.distribuida en Y	
H (m)	15,0	altura total del edif.	
A (m ²)	300,0	area de planta del edif.	
Pt (Kgf)	1061875,0	peso total del edificio	

Figura 6.139

Incorporación datos de entrada

6.6.7 Tensiones y Deformación (sismo en Y)

Sabemos que la dirección de la carga sísmica $q(z)$ es Y, y el hecho de que una de las coordenadas del centro geométrico es cero anulan el torque alrededor del centro de corte, definido por (5.8), mostrado en la Fig. 6.140.

$$m_{z_0} = 0 \times 0 + 3083,98 \times 0 = 0$$

Ahora calculamos los parámetros auxiliares de carga definidos por la fórmula (5.12)

$$\bar{q}_x = 0 \quad \text{y} \quad \bar{q}_y = \frac{9,251 \times 3083,98}{99,89} = 285,61 \text{Kgf} / m$$

m_{z0} (Kgfm/m)	0,00E+00	torque alrededor del centro de corte	(5.8)
\bar{q}_1 (Kgfm)	0,00	parametro auxiliar de carga	(5.12)
\bar{q}_2 (Kgfm)	285,61	parametro auxiliar de carga	(5.12)

Figura 6.140

Datos de salida de torque producto de la carga de viento.

Como ya se comentó en la sección 5.2.2.1, los desplazamientos máximos de la columna equivalente ocurren en la parte superior de ésta, la Fig.6.141 da muestra de ello. Así como los desplazamientos máximos se dan en $z=H$, lo mismo ocurre con la rotación máxima φ_{\max} .

$$u_{\max} = 0 \quad \text{y} \quad v_{\max} = \frac{285,61}{2,68 \times 10^9} \left(\frac{1}{8} + 1,79 \times \frac{11}{120} \right) \times 15^4 = 0,0016m$$

$$\varphi_{\max} = 0$$

Desplazamientos horizontales en la parte superior de la columna equivalente

$U_{\max} (H)$ (m)	0,0000	trans. max. en la columna eq. en X	(5.13)
$V_{\max} (H)$ (m)	0,0016	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.14)

Rotacion del edificio

φ_{\max} (rad)	0,0000	rotacion max en radianes	(5.15)
φ_{\max} (°)	0,0000	rotacion max en grados	

Figura 6.141

Datos de salida desplazamientos horizontales y rotación de la columna equivalente.

En este caso particular, la rotación de la columna equivalente definida por la fórmula (5.16) es nula, Por lo tanto no produce desplazamientos adicionales en la parte superior del edificio, definido por la fórmula (5.17). (Fig. 6.142)

Desplazamientos horizontales maximos del edificio

$U_{\text{edif}} (u B)$ (m)	0,0000	trans. max. en la columna eq. en X	(5.16)
$V_{\text{edif}} (v A)$ (m)	0,0016	trans. max. en la columna eq. en Y	(5.16)

Figura 6.142

Datos de salida desplazamientos horizontales adicionales del edificio debido a la rotación.

Ahora damos paso al cálculo de las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes (muros de corte, marcos y núcleos), que se ubican en la base de la estructura, en este caso no es necesario calcular $\eta_{T_{\max}}$, ya que $m_{z0} = 0$.

Las fuerzas de corte máximas en cada uno de los elementos resistentes son calculadas por

la fórmula (5.18) y (5.19). A continuación se muestra el cálculo de estas para uno de los muros de corte (muro 6).

$$T_{x,6}^{\max} = \left[15 \times \left(1 + \frac{1,79}{2} \right) \times (2,083 \times 0) - \frac{2,083 \times (7,4)}{1316,242} \times 0 \times 15 \times 1,899 \right] / 1000 = 0$$

$$T_{y,6}^{\max} = \left[15 \times \left(1 + \frac{1,79}{2} \right) \times (0,003 \times 285,61) + \frac{0,003 \times (7,5)}{1316,242} \times 0 \times 15 \times 1,899 \right] / 1000 = 0,03 \text{Tonf}$$

La Fig.6.143, Fig.6.144 y Fig.6.145 muestran las fuerzas de corte para los demás elementos resistentes.

Fuerzas de corte maximas en muros de corte

Muro en x	(5.18) Tx,i (Tonf)			(5.19) Ty,i (Tonf)		
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
1	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,03
2	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,03
3	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,03
4	0,00	0,00	0,00	0,03	0,00	0,03
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.18) Tx,i (Tonf)			(5.19) Ty,i (Tonf)		
	[qx,i]	[mz]	Tx,i	[qy,i]	[mz]	Ty,i
1	0,00	0,00	0,00	16,91	0,00	16,91
2	0,00	0,00	0,00	16,91	0,00	16,91
3	0,00	0,00	0,00	16,91	0,00	16,91
4	0,00	0,00	0,00	16,91	0,00	16,91
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.143
Datos de salida fuerzas de corte máxima en muros de corte.

Se puede ver que los elementos 1, 2, 3 y 4 (muros de corte) absorben mayor parte de la fuerza en la dirección paralela a su plano de rigidez (eje Y), y cero en la dirección perpendicular a este. Por otra parte los elementos 5, 6, 7 y 8 (muros de corte), absorben una pequeña parte de la carga, en la dirección perpendicular a su plano de rigidez (eje X).

Fuerzas de corte máximas en marcos empotrados

Muro en y	(5.18)		(5.19)			
	$T_{x,i}$ (Tonf)		$T_{y,i}$ (Tonf)			
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$T_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$T_{y,i}$
1	0,0000	0,0000	0,000	0,0459	0,0000	0,0459
2	0,0000	0,0000	0,000	0,0459	0,0000	0,0459
3	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000

Figura 6.144

Datos de salida fuerzas de corte máxima en marcos empotrados.

En la Fig. 6.144 puede observarse que los marcos empotrados (elementos 9 y 10), absorben una parte de la carga de viento en el eje Y , ya que su plano de rigidez es paralelo a dicho eje, la parte de la carga absorbida por estos pórticos es pequeña, ya que la rigidez aportada por estos elementos es mucho menor que la entregada por muros de corte y núcleos.

Fuerzas de corte máximas en núcleos

	(5.18)		(5.19)			
	$T_{x,i}$ (Tonf)		$T_{y,i}$ (Tonf)			
	$[q_{x,i}]$	$[m_z]$	$T_{x,i}$	$[q_{y,i}]$	$[m_z]$	$T_{y,i}$
Núcleo "Z"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	9,90	0,00	9,90
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	9,90	0,00	9,90
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	87,66	0,00	87,66

Figura 6.145

Datos de salida fuerzas de corte máxima en núcleos.

Finalmente los núcleos "T" Tipo 1 y Tipo 3 absorben una cantidad proporcional en el plano paralelo al eje Y , y cero en el plano ortogonal a este. En la Fig. 6.145 se indica la sumatoria de fuerzas de corte de todos los elementos (muros de corte, muros ficticios y núcleos), que corresponde al corte basal Q_o , anteriormente calculado.

También se puede observar que las cargas absorbidas por ambos núcleos son de la misma magnitud, esto es debido a que los muros que componen ambos núcleos (1 y 2) tienen la misma

orientación respecto a los ejes principales, a pesar de ser opuestos. (Fig. 6.134)

En este caso debido a que $m_{z0} = 0$, no es necesario calcular $\eta_{M \max}$

Los momentos máximos en cada uno de los elementos resistentes son calculados por la fórmula (5.21) y (5.22). A continuación se muestra el cálculo de estos para uno de los muros de corte (muro 6).

$$M_{x,6}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times \left(1 + \frac{2 \times 1,79}{3} \right) \times (0 \times 285,61) + \frac{2,083 \times (7,4)}{1316,242} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 2,195 \right] / 1000 = 0$$

$$M_{y,2}^{\max} = \left[-\frac{15^2}{2} \times \left(1 + \frac{2 \times 1,79}{3} \right) \times (0,003 \times 285,61) - \frac{0,003 \times (7,5)}{1316,242} \times \frac{0 \times 15^2}{2} \times 2,195 \right] / 1000 = -0,23 \text{Tonm}$$

La Fig.6.146, Fig.6.147 y Fig.6.148 muestran los momentos máximos para los demás elementos resistentes.

Momentos máximos en muros de corte

Muro en x	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,00	0,00	0,00	-0,23	0,00	-0,23
2	0,00	0,00	0,00	-0,23	0,00	-0,23
3	0,00	0,00	0,00	-0,23	0,00	-0,23
4	0,00	0,00	0,00	-0,23	0,00	-0,23
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Muro en y	(5.21) Mx,i (Ton m)		(5.22) My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,00	0,00	0,00	-146,82	0,00	-146,82
2	0,00	0,00	0,00	-146,82	0,00	-146,82
3	0,00	0,00	0,00	-146,82	0,00	-146,82
4	0,00	0,00	0,00	-146,82	0,00	-146,82
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 6.146

Datos de salida de momentos máximos en muros de corte.

Momentos máximos en marcos empotrados

Muro en y	(5.21)		(5.22)			
	Mx,i (Ton m)		My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
1	0,0000	0,0000	0,0000	-0,3982	0,0000	-0,3982
2	0,0000	0,0000	0,0000	-0,3982	0,0000	-0,3982
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Figura 6.147
Datos de salida de momentos máximos en marcos empotrados.

Momentos máximos en núcleos

Núcleo	(5.21)		(5.22)			
	Mx,i (Ton m)		My,i (Ton m)			
	[qx,i]	[mz]	Mx,i	[qy,i]	[mz]	My,i
Núcleo "Z"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "L"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "T"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	-85,98	0,00	-85,98
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	-85,98	0,00	-85,98
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Núcleo "U"						
Tipo 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Tipo 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	-760,97	0,00	-760,97

Figura 6.148
Datos de salida de momentos máximos en núcleos.

Analizando las fórmulas (5.38) y (5.41) podemos deducir que tanto el momento torsional de Saint Venant como el de alabeo es cero, esto debido a que ambos dependen de $m_{z,0}$ que en este caso es nulo.

$$M_{t,max} = 0 \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad M_{\omega,max} = 0$$

Recordemos que anteriormente se obtuvieron los desplazamientos horizontales del edificio, definidos por (5.16), (Fig.6.142), evaluando estos desplazamientos respecto a las condiciones señaladas en la sección 5.2.2.1, donde se dan a conocer los desplazamientos horizontales máximos, vemos que se satisfacen estas recomendaciones definidas en (5.18) y mostradas en la Fig.6.149.

$$u = \frac{15}{500} = 0,03m \quad \text{y} \quad v = \frac{15}{500} = 0,03m$$

$u (m)$	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)
$v (m)$	0,03	desplazamiento horiz. recomendado	(5.17)

Se puede observar que :

$U_{edif} (m)$	0,0000	<	0,03	Cumple
$V_{edif} (m)$	0,0016	<	0,03	Cumple

Figura 6.149

Desplazamientos horizontales del edificio v/s desplazamientos horizontales máximos.

A continuación se entrega a modo de resumen, un cuadro para cada sollicitación, con los indicadores de desempeño del edificio, obtenidos producto de las sollicitaciones sísmicas tanto en el eje X como en el Y.

Sismo en X

Indicadores de desempeño

Rotacion max.(°)	Trans. max.(mm)	Razon de trans. max.	Frecuencia natural (Hz)			Razon de carga critica $v=N/Ncr$		
			Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico	Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico
0,0000	1,8205	0,0607	1,1927	0,0000	0,0000	0,0016	0,0000	0,0000

Se debe cumplir que: $v_{max} \leq 0,25$ (5.33)

Por lo tanto: $v= 0,0016$ Cumple!!

Sismo en Y

Indicadores de desempeño

Rotacion max.(°)	Trans. max.(mm)	Razon de trans. max.	Frecuencia natural (Hz)			Razon de carga critica $v=N/Ncr$		
			Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico	Doblemente simetrico	Mono simetrico	Asimetrico
0,0000	1,5596	0,0520	1,1927	0,0000	0,0000	0,0016	0,0000	0,0000

Se debe cumplir que: $v_{max} \leq 0,25$ (5.33)

Por lo tanto: $v= 0,0016$ Cumple!!

La intensidad de la carga uniformemente distribuida Q es definida por la fórmula (5.32).

$$Q = \frac{1.061.785}{5 \times 20 \times 15} = 707,85Kgf / m^2$$

La razón de carga crítica del sistema es calculada por la fórmula (5.31)

$$\nu = \frac{707,85 \times 20 \times 15 \times 5}{6,56 \times 10^8} = 0,0016$$

Se puede observar que la sollicitación sísmica en X produce una traslación o desplazamiento (en la parte superior de la estructura) mayor que en Y . Este desplazamiento, sin embargo, está dentro del rango permitido, definido en (5.18).

Cabe señalar que el modelo estudiado en este caso está basado en el caso tres, sólo que se reemplazaron los marcos empotrados perimetrales (5 y 8 del caso tres), por muros de corte en la misma dirección (2 y 3), y además se incorporaron muros de corte en dirección X (5 y 8).

Esta modificación contribuyó a aumentar la rigidez del sistema y la resistencia a la torsión de alabeo, además de mantener la coincidencia del centro de rigidez con el centro geométrico de la planta, lo que anula la rotación, impidiendo desplazamientos adicionales.

Respecto a la eficiencia del sistema resistente de la estructura, este mejoró considerablemente respecto al caso anterior, esto debido a la modificación de algunos elementos resistentes, como ya se mencionó en el párrafo anterior, y que se refleja en la disminución de la razón de carga crítica del sistema respecto al caso anterior.

CAPITULO VII

Modelación de algunos casos en SAP2000

7.1 Introducción

En el presente capítulo se tomarán el caso tres y el caso cuatro (análisis sísmico), evaluados por el método analítico presentado en esta Tesis y se modelarán en el programa basado en análisis de elementos finitos *SAP2000 v.14.0.0*, esto con el propósito de comparar ambos métodos, uno aproximado y el otro exacto.

7.2 Modelación de las Estructuras

La planta de las estructuras medidas a partir de los ejes es de 20 m (dirección X) por 15 m (dirección Y), los edificios tienen una altura total de 15 m y altura de entrepiso de 3,0 m (el eje vertical perpendicular al plano XY es el eje Z).

Se utilizarán elementos tipo *frame* para modelar: vigas, columnas y muros, con las propiedades de los materiales descritos en 6.4.1 y 6.5.1 para cada modelo.

Al modelar las losas, se asume que éstas constituyen diafragmas rígidos que transmiten los esfuerzos provenientes de las solicitaciones a los elementos verticales. Los elementos verticales que resistirán dichas solicitaciones serán muros de hormigón armado y marcos, ya descritos con anterioridad.

Los elementos resistentes verticales del primer piso se encuentran empotrados a la base, y todos los elementos se encuentran unidos entre sí a momento.

7.3 Ingreso de Datos Edificio Caso 3

En la Fig.7.1 se puede apreciar el ingreso de las propiedades del material (hormigón armado) en el programa *SAP2000 v.14.0.0*. Luego se definieron los elementos *frames* para: muros (Shell), losas (Plate), vigas (Beam) y columnas (Column).

Una vez definido lo anterior, e ingresado los elementos *frames* a las grillas, se procedió a establecer un grado de discretización para los muros. (Fig. 7.2). Es importante señalar que mientras más subdivisiones se hagan al muro, más exacto es el cálculo, sin embargo, esto implica un mayor esfuerzo para computar los datos por parte de programa, en este caso del *SAP2000 v.14.0.0*.

Figura 7.1 Cuadro de dialogo SAP2000
Ingreso de propiedades del material.

Figura 7.2 Cuadro de dialogo SAP2000
Discretización de muros.

La Fig. 7.3 muestra una vista en 3D del modelo ya ingresado en el programa. Se debe tener en cuenta de que se le asignaron apoyos empotrados a los elementos resistentes, así como también se conectaron todos los nudos de cada elemento entre si.

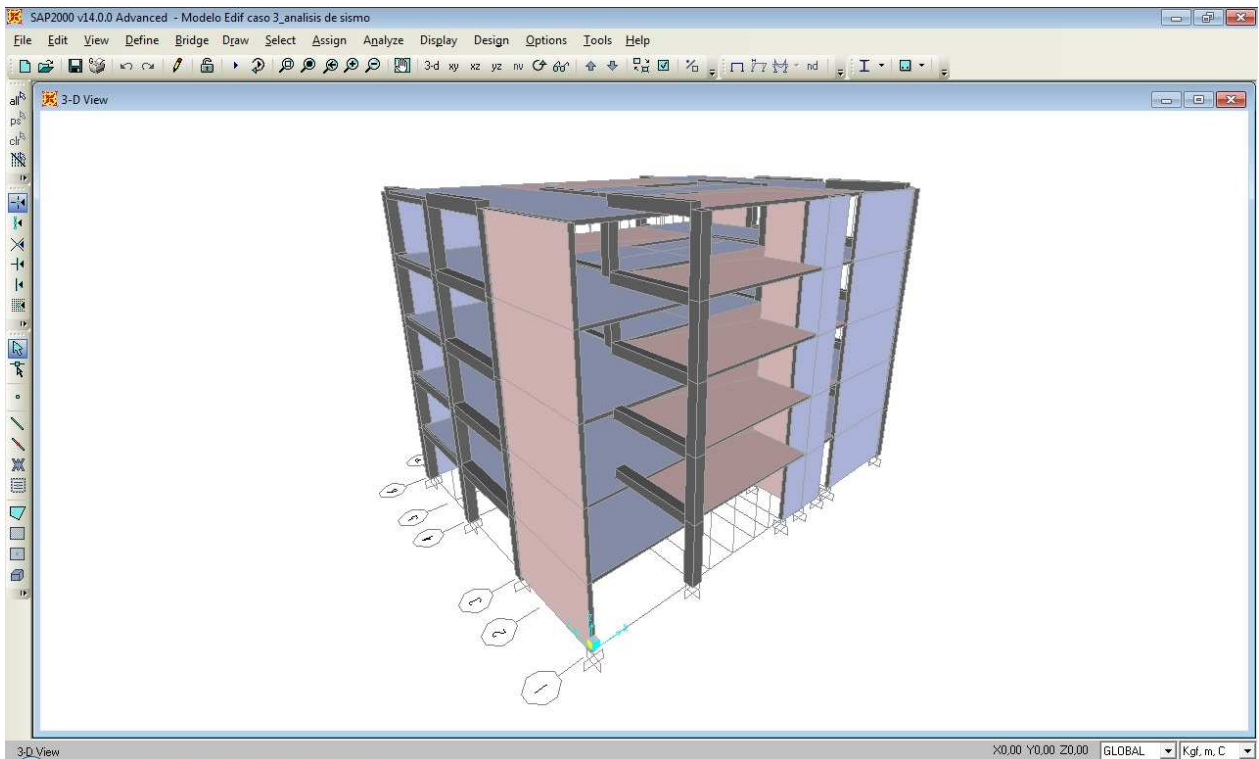


Figura 7.3
Vista en 3D modelo. SAP2000

La Fig. 7.4 muestra la incorporación de cachos rígidos, este comando permite que las conexiones entre los elementos no sufran deformación, simulando una condición de empotramiento en los encuentros viga-columna, o viga muro.

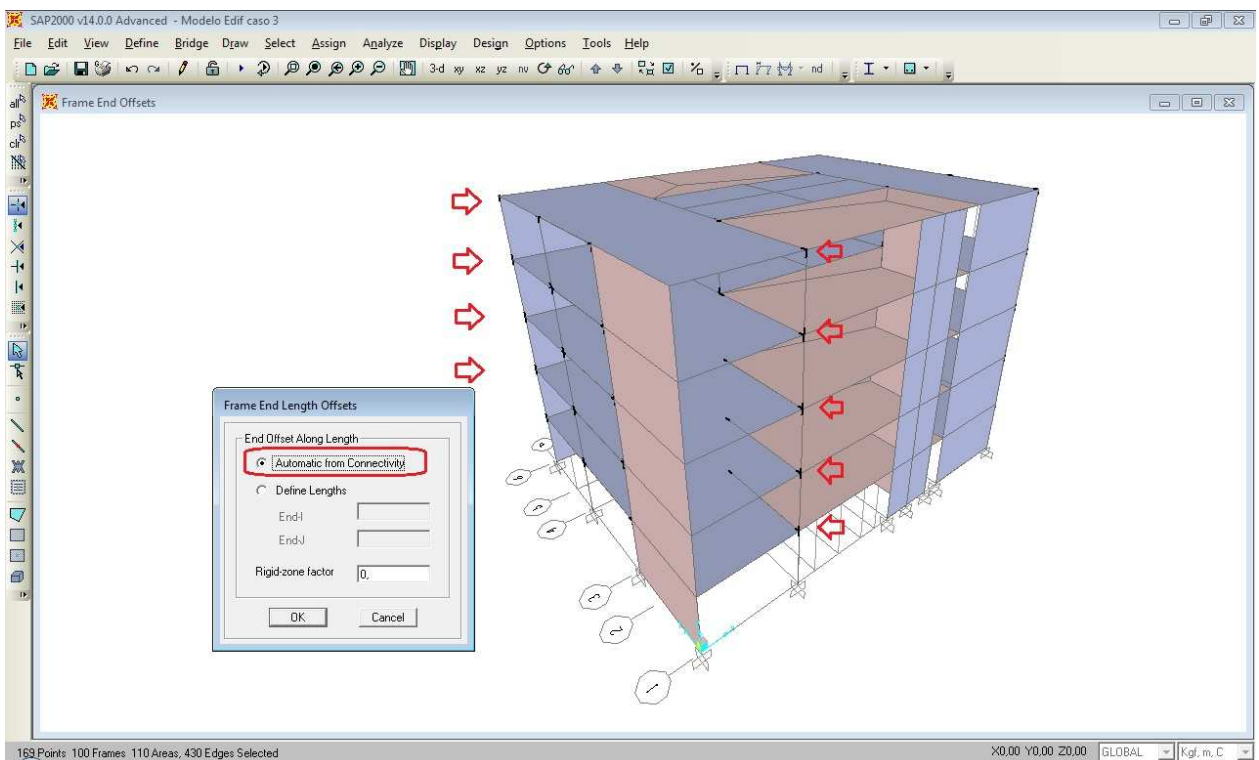


Figura 7.4
Incorporación de cachos rígidos en el modelo. SAP2000

7.3.1 Periodos y Frecuencias Naturales

La Fig. 7.5 muestra la ejecución del programa para la obtención de los periodos y frecuencias naturales del modelo mediante el método de análisis *modal*.

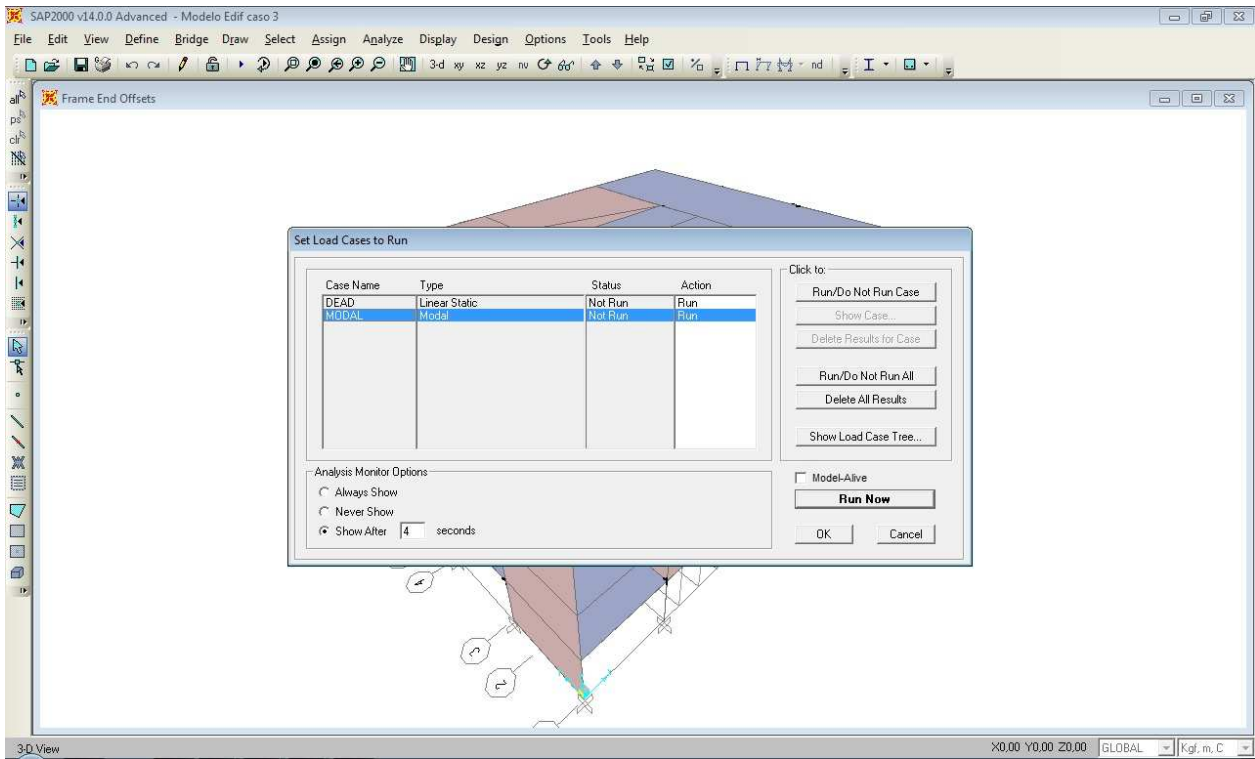


Figura 7.5 Cuadro de dialogo *SAP2000*
Ejecución del programa para encontrar los periodos y frecuencias naturales del edificio.

En la Fig. 7.6 se muestra la ventana que genera el programa *SAP2000 v.14.0.0* donde se dan a conocer los modos de vibrar de la estructura.

Los datos marcados con rojo son la frecuencia de oscilación natural de mayor masa traslacional, junto al periodo de oscilación correspondiente.

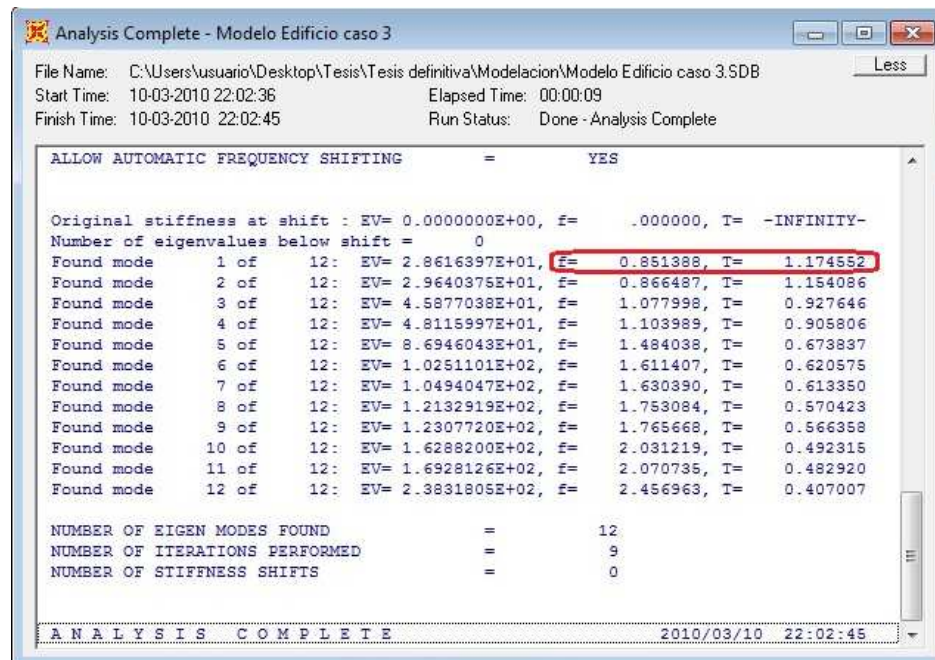


Figura 7.6 Cuadro de dialogo SAP2000
Periodos y frecuencias naturales del edificio.

7.3.2 Ingreso de Fuerzas Estáticas.

En primer lugar asignamos la condición de diafragma rígido al elemento *plate*, que es el que define la losa del edificio. Debemos tener claro que al asignar a cada piso un diafragma rígido, éste debe ser independiente en su movimiento de los demás diafragmas. En la Fig. 7.7 se muestran los nombres de cada diafragma y la asignación de estos para cada nivel de z .

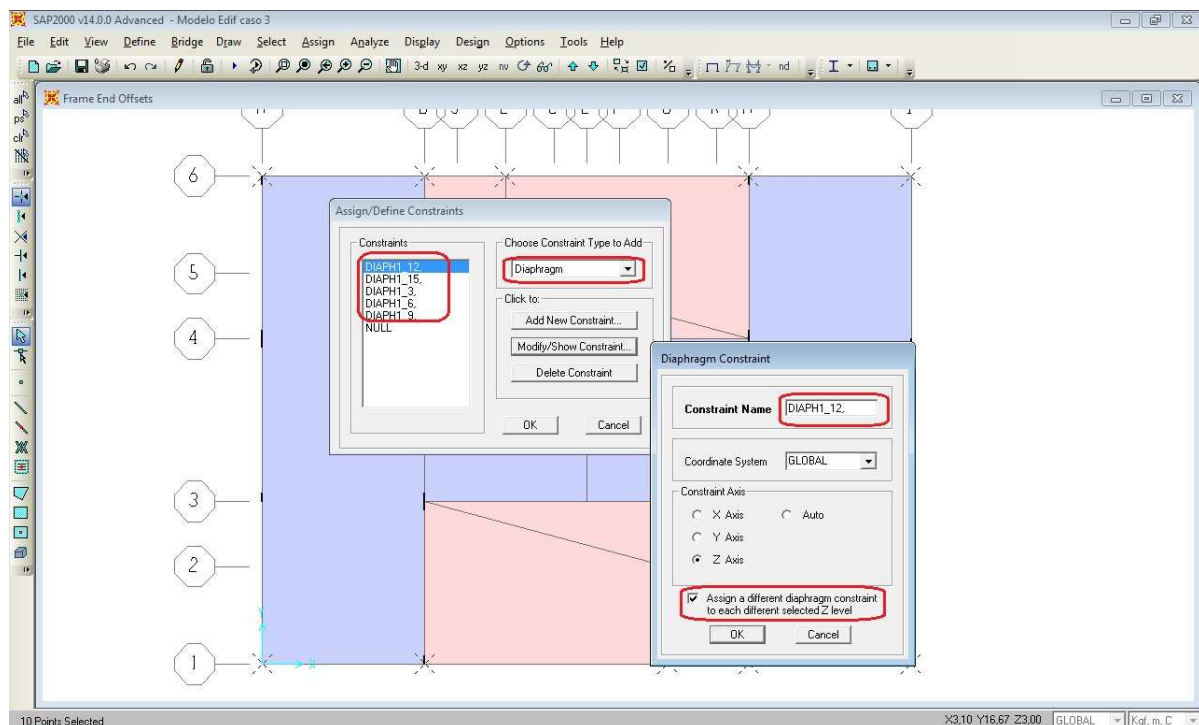


Figura 7.7 Cuadro de dialogo SAP2000
Incorporación de diafragma rígido al modelo.

Recordemos que en el caso 3 (sección 6.5.1) la estructura es sometida a cargas de viento, que fueron ingresadas a la planilla *Excel*, como cargas distribuidas en función de la altura.

En este caso estas mismas cargas se aplicarán al modelo pero como cargas concentradas en el centro de masa de cada piso.

7.3.2.1 Viento en X

Sabemos que la altura total del edificio es de 15m, teniendo en cuenta las dimensiones de la planta del edificio y lo dispuesto en la Tabla 1 (NCh432.Of71), obtenemos la presión básica del viento $q = 61,7 \text{ Kg} / \text{m}^2$.

Ahora amplificamos q por un factor de forma $C=1,2$, según 9.2.1 de la *NCh432.Of71*, ya que se asume la acción del viento perpendicular a las caras del edificio.

Para obtener la carga concentrada el valor obtenido del producto de la presión del viento y el factor de forma se multiplica por la dimensión perpendicular a la solicitud y la altura del entrepiso. Las Figuras 7.8 y 7.9 muestran el valor de la carga ingresada para los primeros cuatro pisos y para el ultimo piso respectivamente. Se puede observar que la carga de viento en el último piso es la mitad de las demás cargas concentradas, esto, por que solo toma la mitad del área tributaria del último piso.

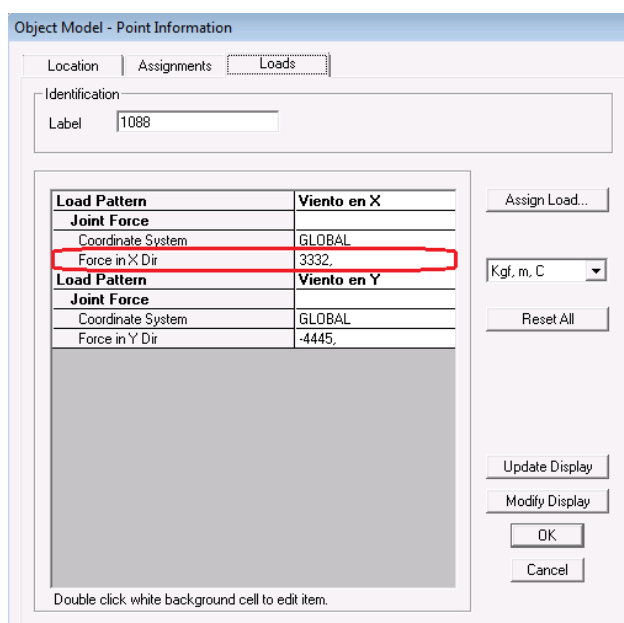


Figura 7.8 Cuadro de dialogo *SAP2000*
Ingreso de carga concentrada de viento en X para
los primeros cuatro pisos.

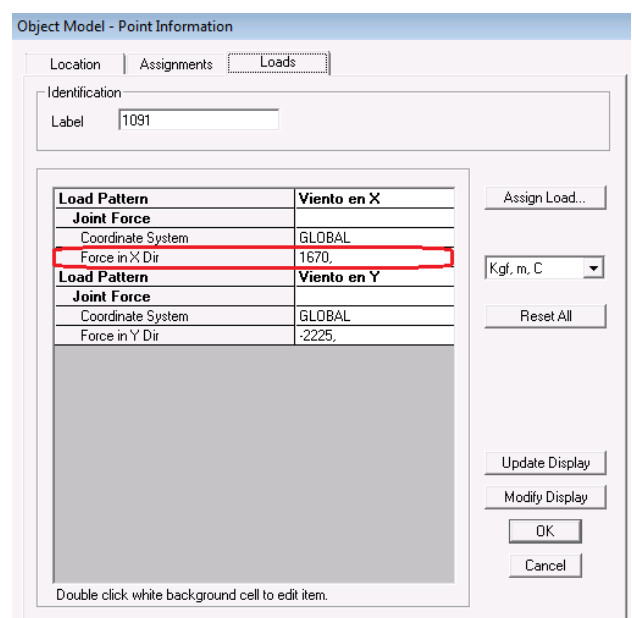


Figura 7.9 Cuadro de dialogo *SAP2000*
Ingreso de carga concentrada de viento en X para
el ultimo piso.

Una vez definidas e ingresadas las cargas de viento en ambas direcciones se procede a ejecutar nuevamente el programa *SAP2000 v.14.0.0* como lo muestra la Fig.7.10.

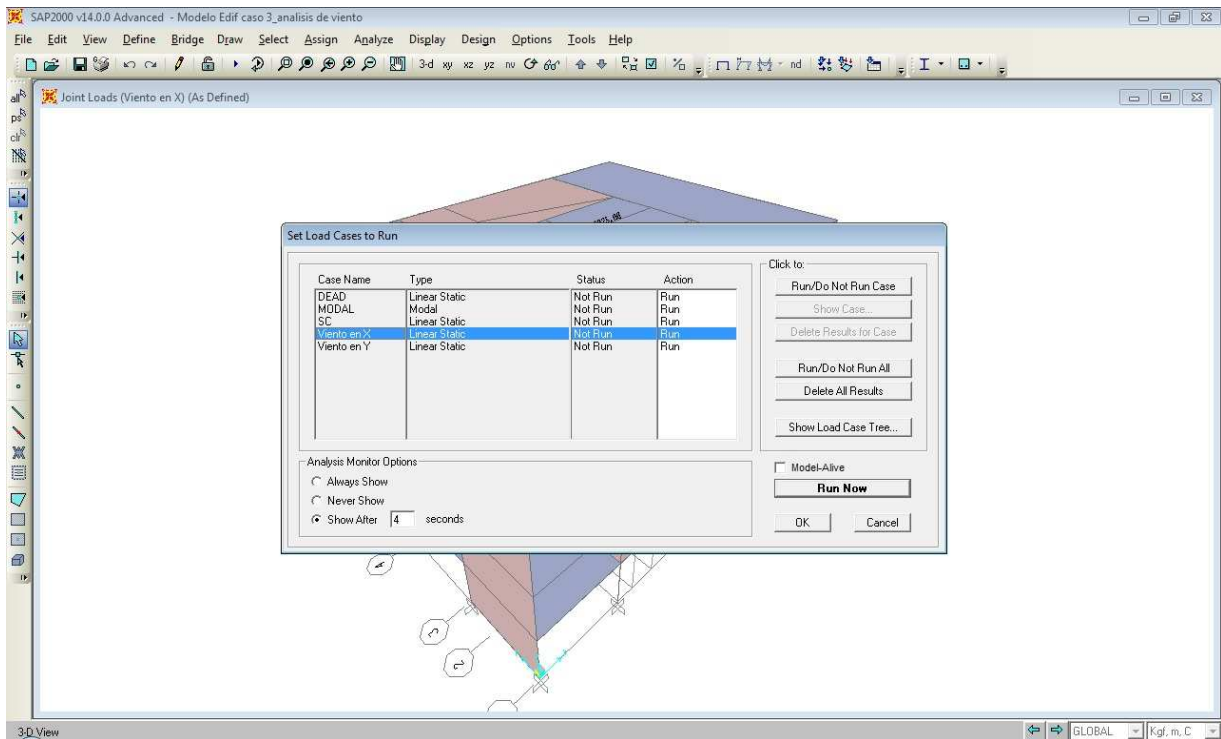


Figura 7.10 Cuadro de dialogo SAP2000
Ejecución del programa para cargas estáticas.

Una vez ejecutado el software verificamos el desplazamiento máximo de la estructura debido al viento en la dirección X. la Fig. 7.11 nos da un acercamiento visual de la deformación en la parte superior del edificio además de su rotación (nula en este caso).

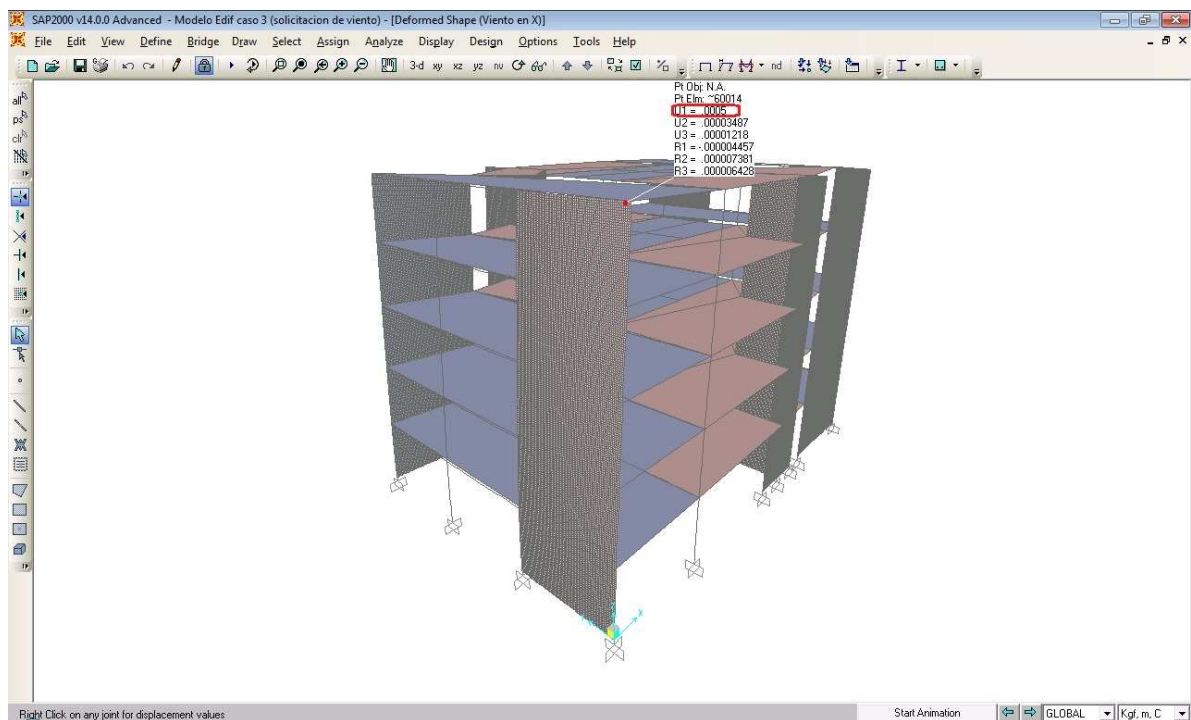


Figura 7.11
Deformación debido a carga de viento en dirección X. SAP2000

7.3.2.1.1 Datos de Salida

El programa *SAP2000 v.14.0.0* genera una planilla de los datos computados en el análisis, es así como se pueden obtener parámetros globales como los desplazamientos máximos (que ocurren en la parte superior del edificio) en la dirección *X*, producida por la acción del viento en esta dirección. En la Tabla 7.1 se pueden apreciar los desplazamientos máximos en la dirección *X* (U1), los desplazamientos en la dirección *Y* (U2), que en este caso son despreciables, y finalmente el ángulo de rotación con respecto al eje *Z* (R3), que en este caso también es despreciable, ya que no existe excentricidad por el hecho de que la estructura es doblemente simétrica.

Tabla 7.1
Deformaciones máximas y rotación debido a carga de viento en dirección *X*. (*SAP2000*)

TABLE: Joint Displacements				
Joint	OutputCase	U1	U2	R3
Text	Text	m	m	Radians
1076	Viento en X	0,000523	0,000035	6,1090E-07
1062	Viento en X	0,000523	0,000035	-6,1080E-07
51	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
64	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
707	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
709	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
743	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
746	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
861	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
866	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
870	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
934	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
939	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
942	Viento en X	0,000522	0,000035	3,7080E-11
772	Viento en X	0,000519	0,000035	6,4970E-07
798	Viento en X	0,000519	0,000035	-6,4960E-07

La Tabla 7.2 nos entrega la fuerza de corte global en *X* (primera columna); el momento de flexión global en *X* (cuarta columna); las coordenadas del centro geométrico (quinta y sexta columna) y las coordenadas del centro de corte (séptima y octava columna)

Puede notarse que las fuerzas de corte y momento de flexión global que están ortogonales a la dirección *X* son despreciables.

Tabla 7.2

Parámetros globales debido a cargas de viento en dirección X, coordenadas de centro geométrico y de corte. (SAP2000)

OutputCase	GlobalFX	GlobalFY	GlobalMX	GlobalMY	GlobalX	GlobalY	XCentroidFX	YCentroidFX	XCentroidFY	YCentroidFY
Text	Kgf	Kgf	Kgf-m	Kgf-m	m	m	m	m	m	m
Viento en X	-14998	1,67E-08	0,000	-125010	0	0	10,001	7,499		
Viento en Y	-9,09E-08	20005	-166725	0,000	0	0			9,996	7,519

7.3.2.2 Viento en Y

Se aplica el mismo procedimiento indicado en 7.3.2.1, solo que esta vez será para obtener las cargas concentradas en dirección Y.

Las Figuras 7.12 y 7.13 muestran el valor de la carga ingresada para los primeros cuatro pisos y para el ultimo piso respectivamente. Se puede observar que la carga de viento en el último piso es la mitad de las demás cargas concentradas, esto, por que solo toma la mitad del área tributaria del último piso.

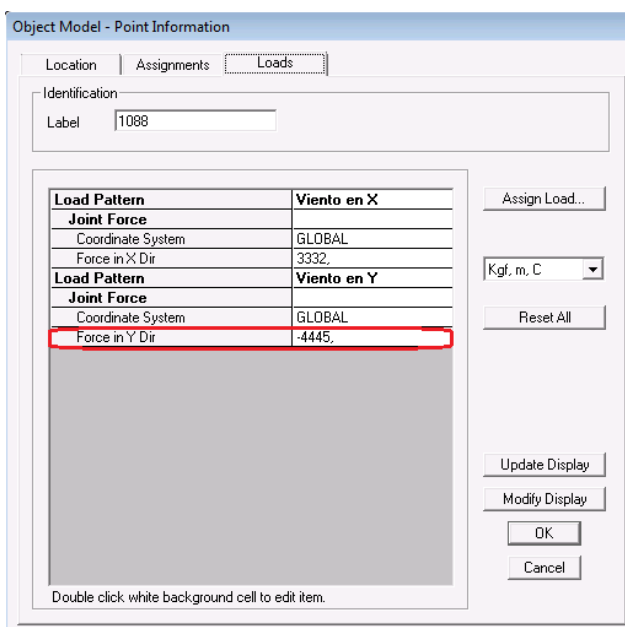


Figura 7.12 Cuadro de dialogo SAP2000 Ingreso de carga concentrada de viento en Y para los primeros cuatro pisos.

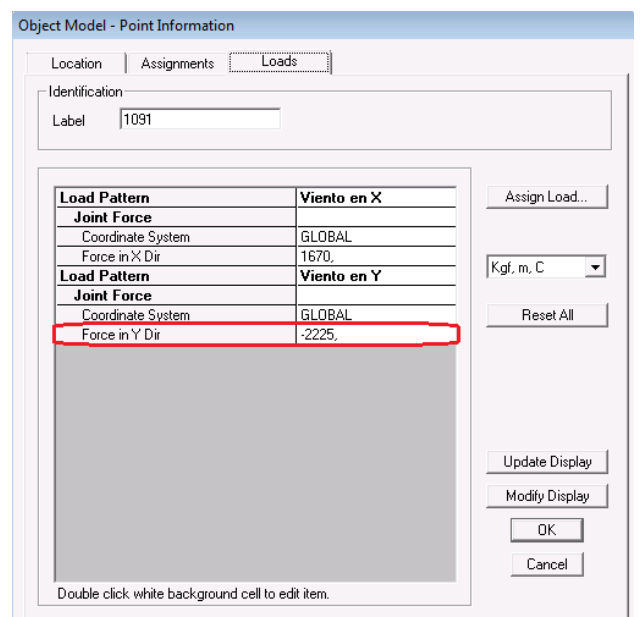


Figura 7.13 Cuadro de dialogo SAP2000 Ingreso de carga concentrada de viento en Y para el último piso.

En 7.3.2 se definieron e ingresaron las cargas de viento para ambas direcciones (X e Y), por lo tanto se procede a ejecutar nuevamente el programa SAP2000 v.14.0.0 como lo muestra la Fig.7.14.

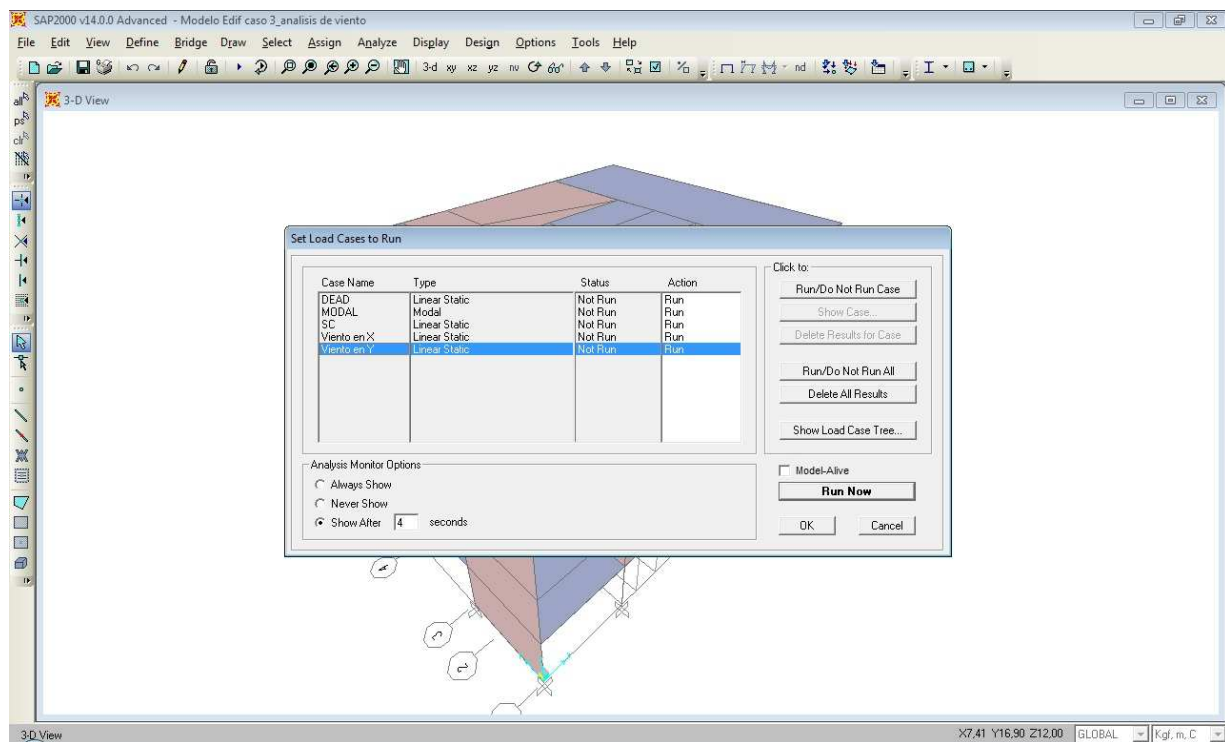


Figura 7.14 Cuadro de dialogo SAP2000
Ejecución del programa para cargas estáticas.

Una vez ejecutado el software verificamos el desplazamiento máximo de la estructura debido al viento en la dirección Y . La Fig. 7.15 nos da un acercamiento visual de la deformación en la parte superior del edificio además de su rotación (nula en este caso).

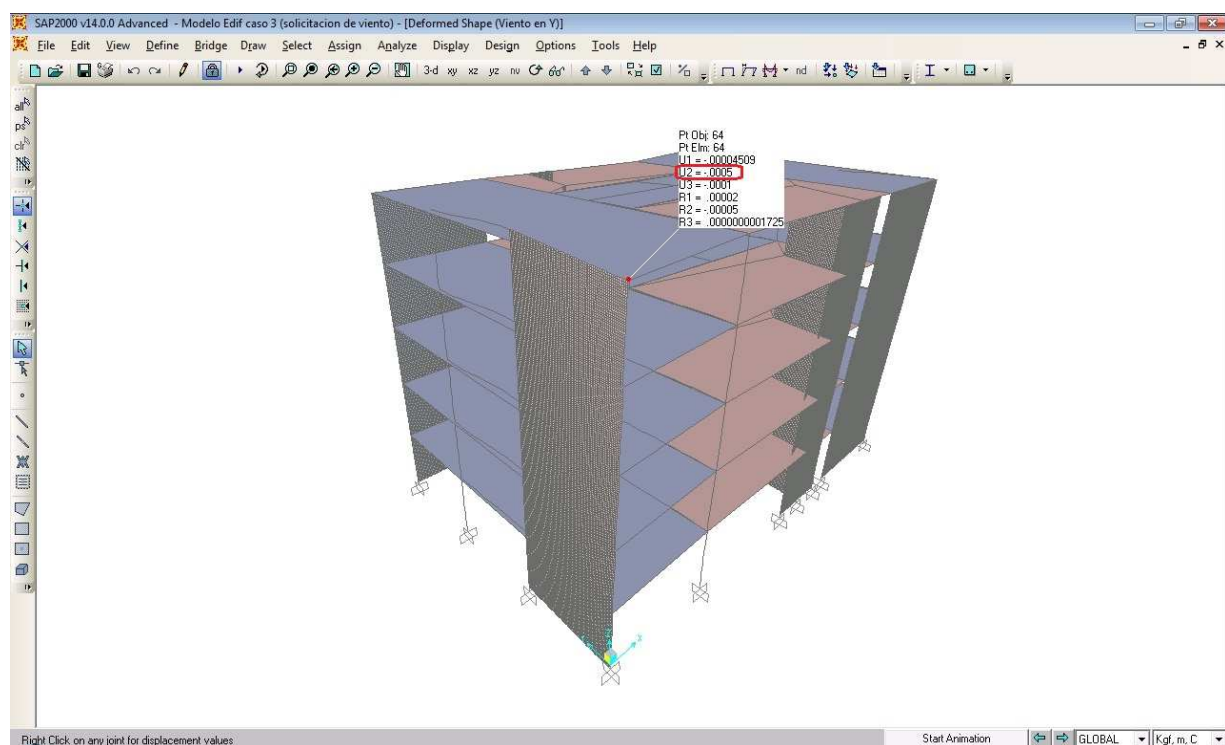


Figura 7.15
Deformación debido a carga de viento en dirección Y . SAP2000

7.3.2.2.1 Datos de Salida

En la Tabla 7.3 se pueden apreciar los desplazamientos máximos en la dirección X (U1), que en este caso son despreciables, los desplazamientos máximos en Y (U2), y finalmente la rotación con respecto al eje Z (R3), que en este caso también es despreciable, ya que no existe excentricidad por el hecho de que el edificio es doblemente simétrico.

Tabla 7.3
Deformaciones máximas y rotación debido a carga de viento en dirección Y. (SAP2000)

TABLE: Joint Displacements				
Joint	OutputCase	U1	U2	R3
Text	Text	m	m	Radians
51	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
64	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
707	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
709	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
743	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
746	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
861	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
866	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
870	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
934	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
939	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
942	Viento en Y	-0,000045	-0,000464	1,725E-10
772	Viento en Y	-0,000044	-0,000462	2,644E-07
798	Viento en Y	-0,000044	-0,000462	-2,64E-07

La Tabla 7.4 nos entrega la fuerza de corte global en Y (segunda columna); el momento de flexión global en Y (tercera columna); las coordenadas del centro geométrico (quinta y sexta columna) y las coordenadas del centro de corte (novena y décima columna)

Puede notarse que las fuerzas de corte y momento de flexión global que están ortogonales a la dirección Y son despreciables.

Tabla 7.4
Parámetros globales debido a cargas de viento en dirección Y, coordenadas de centro geométrico y de corte. (SAP2000)

TABLE: Base Reactions										
OutputCase	GlobalFX	GlobalFY	GlobalMX	GlobalMY	GlobalX	GlobalY	XCentroidFX	YCentroidFX	XCentroidFY	YCentroidFY
Text	Kgf	Kgf	Kgf-m	Kgf-m	m	m	m	m	m	m
Viento en X	-14998	1,67E-08	0,000	-125010	0	0	10,001	7,499		
Viento en Y	-9,09E-08	20005	-166725	0,000	0	0			9,996	7,519

En resumen, podemos señalar que para la estructura sometida a cargas de viento tanto en X como en Y, se obtuvieron como parámetros globales, la frecuencia y periodo natural de los modos básicos, junto con el desplazamiento máximo en X e Y (en la parte superior de la

estructura), el ángulo de rotación, las fuerzas de corte globales en X e Y y finalmente los momentos máximos de flexión globales en X e Y .

7.4 Ingreso de Datos Edificio Caso 4 (Análisis Sísmico)

Luego de realizar el procedimiento descrito en 7.3, se procede a ejecutar el programa *SAP2000 v.14.0.0*, para encontrar las frecuencias y periodos naturales de la estructura.

7.4.1 Periodos y Frecuencias Naturales

La Fig. 7.16 muestra la ejecución del programa para la obtención de los periodos y frecuencias naturales del modelo mediante el método de análisis *modal*.

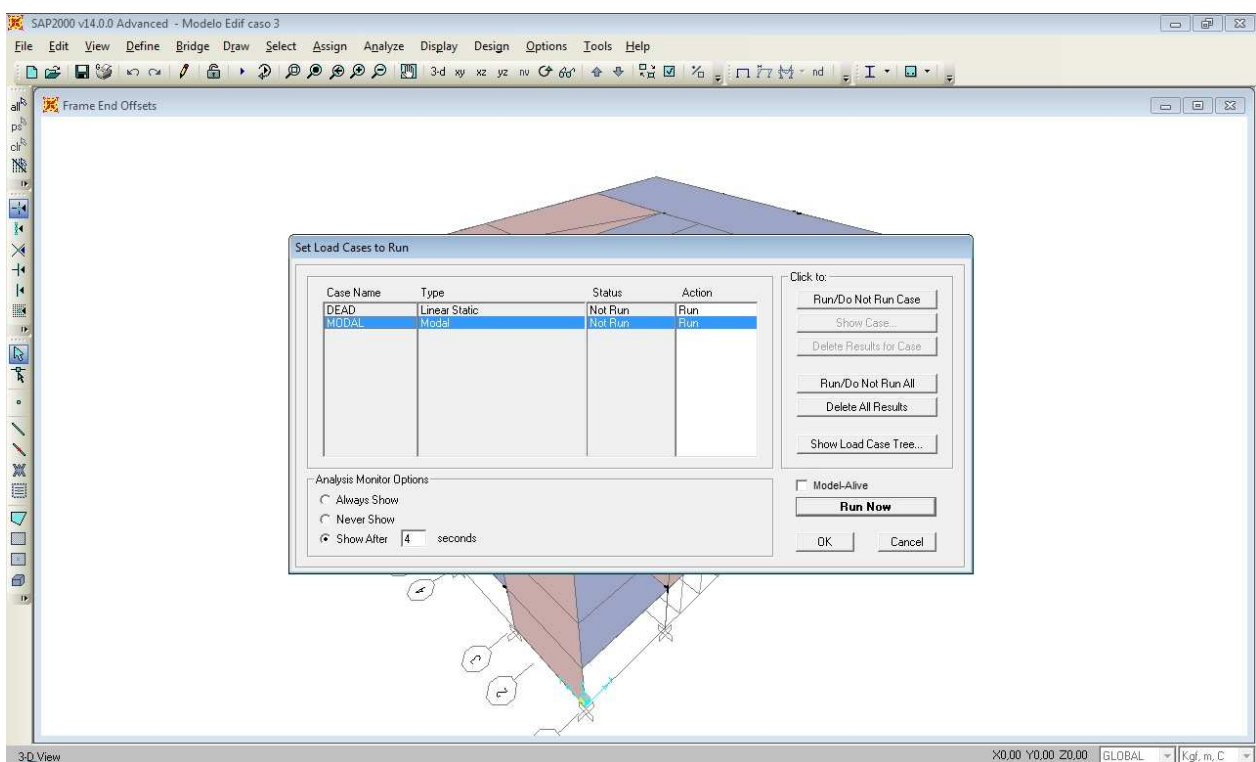


Figura 7.16 Cuadro de dialogo *SAP2000*
Ejecución del programa para encontrar los periodos y frecuencias naturales del edificio.

En la Fig. 7.17 se muestra la ventana que genera el programa *SAP2000 v.14.0.0* donde se dan a conocer los modos de vibrar de la estructura.

Los datos marcados con rojo son la frecuencia de oscilación natural de mayor masa traslacional, junto al periodo de oscilación correspondiente.

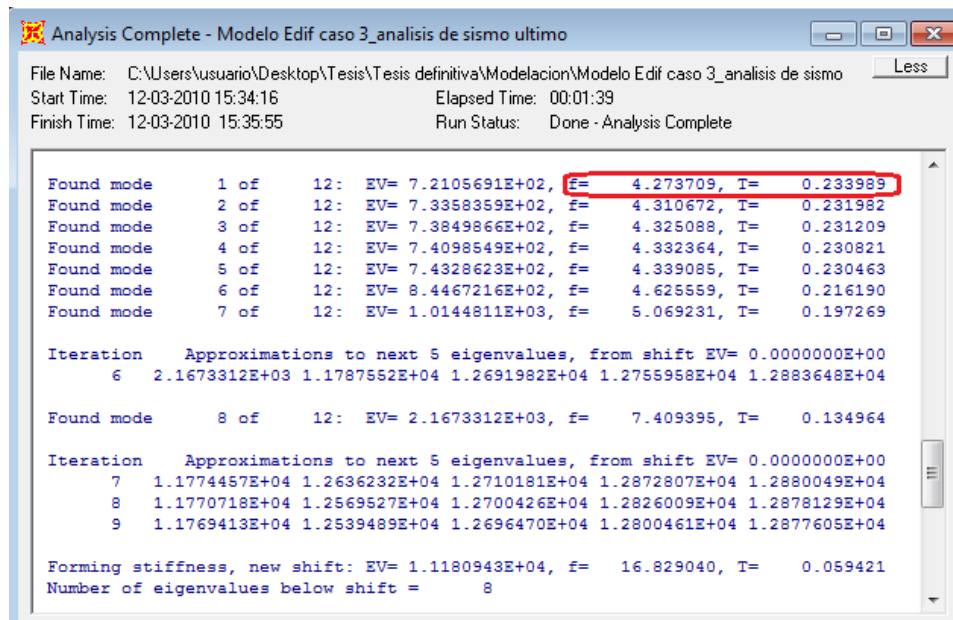


Figura 7.17 Cuadro de dialogo SAP2000
Periodos y frecuencias naturales del edificio.

7.4.2 Ingreso de Fuerzas Estáticas.

Recordemos que en el caso adicional (análisis sísmico) (sección 6.7.1) la estructura es sometida a cargas sísmicas, que fueron ingresadas a la planilla *Excel*, como cargas trapezoidales distribuidas en función de la altura. En este caso estas mismas cargas se aplicarán al modelo pero como cargas concentradas en el centro de masa de cada piso.

7.4.2.1 Sismo en X

En primer lugar determinamos Q_0 siguiendo el procedimiento explicado en 6.7.1, basado en la *NCh 433 Of.96* "Diseño sísmico de edificios". Luego aplicamos lo establecido en la sección 6.2 de la *NCh 433 Of.96* "Diseño sísmico de edificios", para determinar las fuerzas horizontales sísmicas F_k . En la tabla 7.5 se muestran los valores de F_k para cada nivel de piso.

Tabla 7.5
Obtención de fuerzas horizontales sísmicas según *NCh 433 Of.96*

Nivel	Pk	h _j	A _k	Pk*A _k	F _k
1	217625	3	0,1056	22975,3	9251,93
2	217625	6	0,1198	26078,1	10501,41
3	217625	9	0,1421	30933,5	12456,61
4	217625	12	0,1852	40313,3	16233,77
5	217625	15	0,4472	97324,9	39191,80

A continuación las Figuras 7.18 a 7.22 muestra el ingreso de las fuerzas horizontales F_k al programa SAP2000 v.14.0.0.

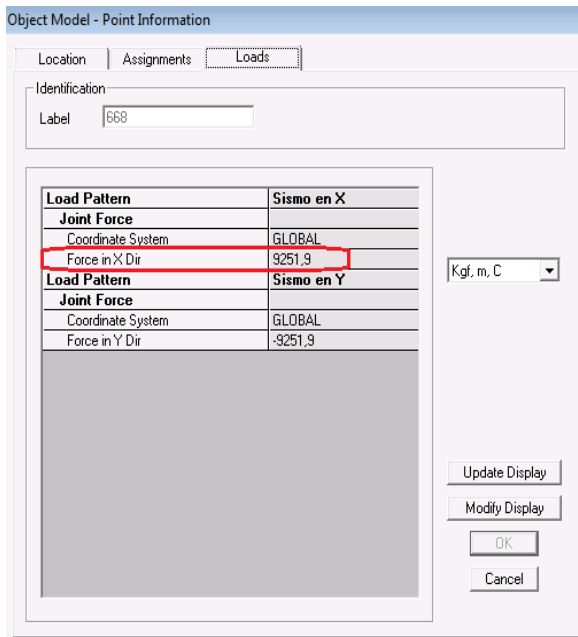


Figura 7.18 Cuadro de dialogo SAP2000 Ingreso de fuerza sísmica en nivel 1 de la estructura.

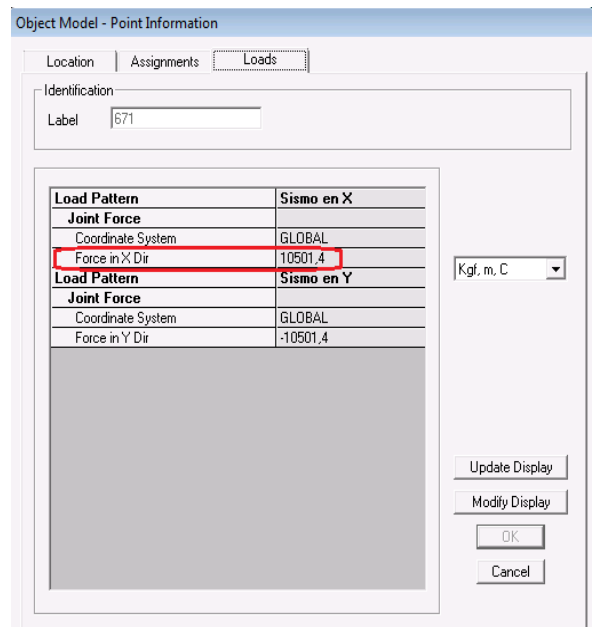


Figura 7.19 Cuadro de dialogo SAP2000 Ingreso de fuerza sísmica en nivel 2 de la estructura.

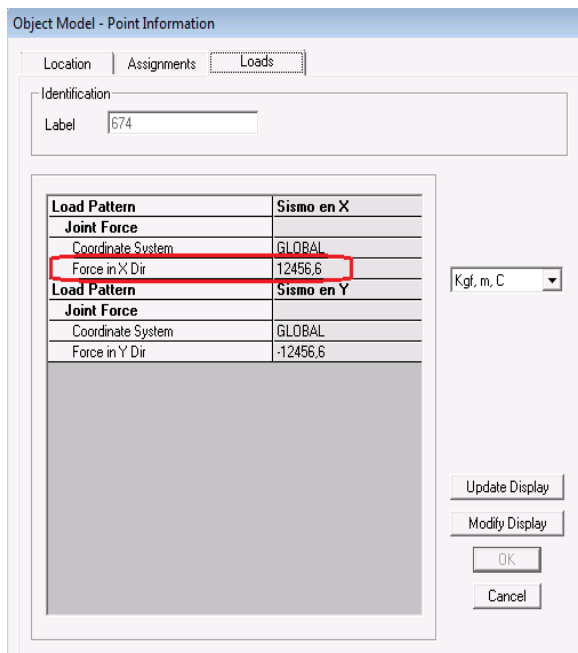


Figura 7.20 Cuadro de dialogo SAP2000 Ingreso de fuerza sísmica en nivel 3 de la estructura.

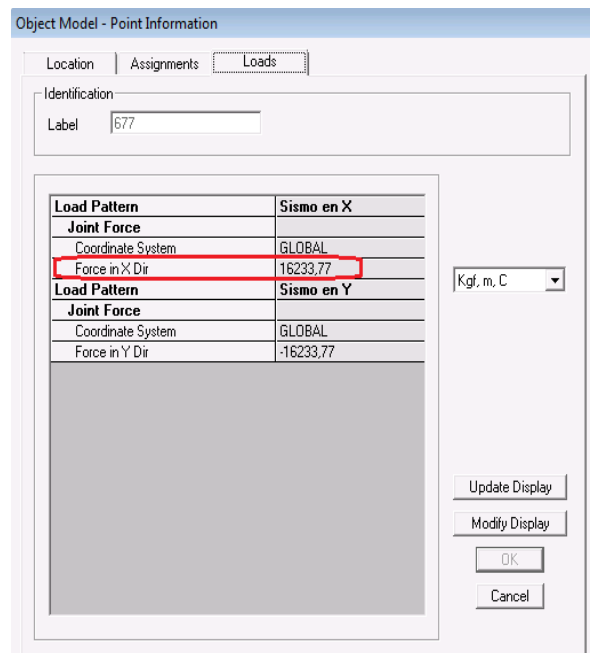


Figura 7.21 Cuadro de dialogo SAP2000 Ingreso de fuerza sísmica en nivel 4 de la estructura.

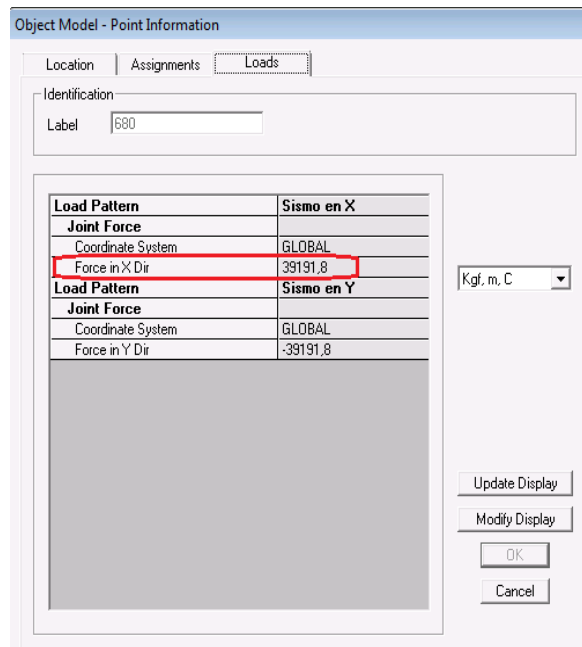


Figura 7.22 Cuadro de dialogo *SAP2000*
Ingreso de fuerza sísmica en nivel 5 de la estructura.

Una vez definidas e ingresadas la carga sísmica en X se procede a ejecutar nuevamente el programa *SAP2000 v.14.0.0*.

Ejecutado el software, verificamos la deformación de la estructura debido al sismo en la dirección X. La Fig. 7.23 nos da un acercamiento visual de la deformación en la parte superior del edificio además de su rotación (nula en este caso).

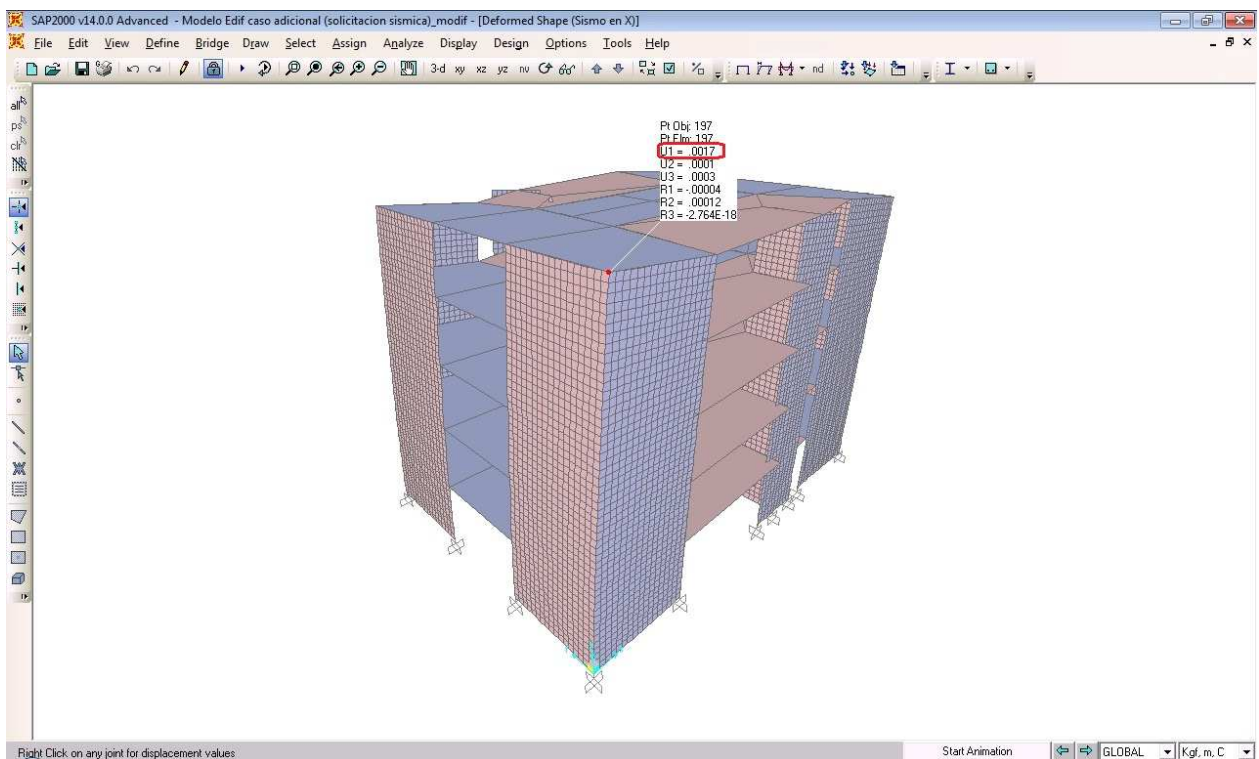


Figura 7.23
Deformación debido a carga sísmica en dirección X. *SAP2000*.

7.4.2.1.1 Datos de Salida

En la Tabla 7.6 se pueden apreciar los desplazamientos máximos en la dirección X (U1), los desplazamientos en la dirección Y (U2), que en este caso son despreciables, y finalmente el ángulo de rotación con respecto al eje Z (R3), que en este caso también es despreciable, ya que no existe excentricidad por el hecho de que el edificio es doblemente simétrico.

Tabla 7.6
Deformaciones máximas y rotación debido a carga sísmica en dirección X. (SAP2000)

TABLE: Joint Displacements				
Joint	OutputCase	U1	U2	R3
Text	Text	m	m	Radians
104	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
128	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
135	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
155	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
193	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
197	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
235	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
238	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
274	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
277	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
424	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
433	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
440	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
548	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
555	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18
559	Sismo en X	0,00165	0,000145	-2,764E-18

La Tabla 7.7 nos entrega la fuerza de corte global en X (primera columna); el momento de flexión global en X (cuarta columna); las coordenadas del centro geométrico (quinta y sexta columna) y las coordenadas del centro de corte (séptima y octava columna)

Puede notarse que las fuerzas de corte y momento de flexión global que están ortogonales a la dirección X son despreciables.

Tabla 7.7
Parámetros globales debido a cargas sísmicas en dirección X, coordenadas de centro geométrico y de corte. (SAP2000)

TABLE: Base Reactions										
OutputCase	GlobalFX	GlobalFY	GlobalMX	GlobalMY	GlobalX	GlobalY	XCentroidFX	YCentroidFX	XCentroidFY	YCentroidFY
Text	Kgf	Kgf	Kgf-m	Kgf-m	m	m	m	m	m	m
Sismo en X	-87635,47	7,64E-09	-5,944E-07	-985555,74	0	0	10	7,5		
Sismo en Y	-5,984E-09	87635,47	-985555,74	-7,921E-07	0	0			10	7,5

7.4.2.2 Sismo en Y

Las cargas horizontales sísmicas F_k calculadas en 7.4.2.1 (Tabla 7.5) deben ser ingresadas al programa de la misma manera que se indicó pero ahora en dirección Y.

Una vez definidas e ingresadas la carga sísmica en Y se procede a ejecutar el programa SAP2000 v.14.0.0.

Ejecutado el software, verificamos la deformación de la estructura debido al sismo en la dirección Y. La Fig. 7.24 nos da un acercamiento visual de la deformación en la parte superior del edificio además de su rotación (nula en este caso).

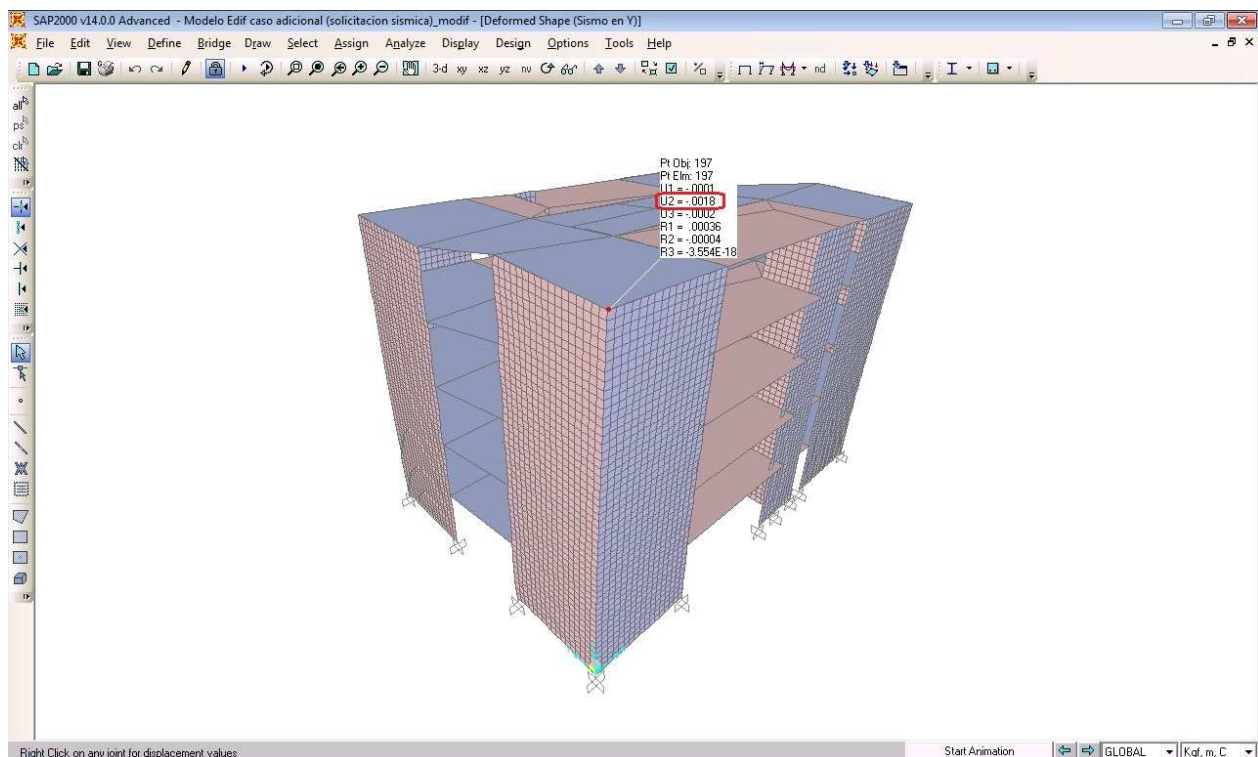


Figura 7.24
Deformación debido a carga sísmica en dirección Y. SAP2000

7.4.2.2.1 Datos de Salida

En la Tabla 7.8 se pueden apreciar los desplazamientos máximos en la dirección X (U1), que en este caso son despreciables, los desplazamientos en la dirección Y (U2), y finalmente el ángulo de rotación con respecto al eje Z (R3), que en este caso también es despreciable, ya que no existe excentricidad por el hecho de que el edificio es doblemente simétrico.

Tabla 7.8

Deformaciones máximas y rotación debido a carga sísmica en dirección Y. (SAP2000)

TABLE: Joint Displacements				
Joint	OutputCase	U1	U2	R3
Text	Text	m	m	Radians
104	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
128	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
135	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
155	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
193	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
197	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
235	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
238	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
274	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
277	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
424	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
433	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
440	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
548	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
555	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18
559	Sismo en Y	-0,00014	-0,001776	-3,554E-18

La Tabla 7.9 nos entrega la fuerza de corte global en Y (segunda columna); el momento de flexión global en Y (tercera columna); las coordenadas del centro geométrico (quinta y sexta columna) y las coordenadas del centro de corte (novena y décima columna)

Puede notarse que las fuerzas de corte y momento de flexión global que están ortogonales a la dirección Y son despreciables.

Tabla 7.9

Parámetros globales debido a cargas sísmicas en dirección Y, coordenadas de centro geométrico y de corte. (SAP2000)

TABLE: Base Reactions											
OutputCase	GlobalFX	GlobalFY	GlobalMX	GlobalMY	GlobalX	GlobalY	XCentroidFX	YCentroidFX	XCentroidFY	YCentroidFY	
Text	Kgf	Kgf	Kgf-m	Kgf-m	m	m	m	m	m	m	
Sismo en X	-87635,47	7,64E-09	-5,944E-07	-985555,74	0	0	10	7,5			
Sismo en Y	-5,984E-09	87635,47	-985555,74	-7,921E-07	0	0			10	7,5	

En resumen, podemos señalar que para la estructura sometida a cargas sísmicas tanto en X como en Y, se obtuvieron como parámetros globales, la frecuencia y periodo natural de los modos básicos, junto con el desplazamiento máximo en X e Y (en la parte superior de la estructura), el ángulo de rotación, las fuerzas de corte globales en X e Y y finalmente los momentos máximos de flexión globales en X e Y.

CAPITULO VIII

Presentación y Evaluación de Resultados

8.1 Introducción

El presente capítulo da a conocer y evalúa los resultados obtenidos en el capítulo sexto, con la aplicación del método analítico (aproximado), y el séptimo con el exacto.

Como dijimos al principio, el estudio se dividió en dos fases. En primer lugar, se aplicó el método aproximado a tres casos sometidos al mismo tipo de sollicitación (cargas de viento), con el fin de evaluar el comportamiento global de estas, a medida que se incorporaron o reubicaron algunos elementos resistentes (muros de corte, marcos empotrados y núcleos).

En segundo lugar, se estudiaron dos estructuras, sometidas a sollicitaciones de viento y sísmicas respectivamente y que fueron analizadas por ambos métodos (aproximado y exacto).

8.2 Análisis de Parámetros de la Columna Equivalente (caso 1 al 3)

En la Fig. 8.1 se muestra un cuadro comparativo de las características geométricas y de rigidez de la columna equivalente para cada caso. Los parámetros obtenidos son producto tanto de la reubicación e inclusión de elementos resistentes que proporcionan rigidez lateral y torsional a la estructura y que se detallaron en el sexto capítulo.

En primer lugar podemos observar que para cada caso se obtuvieron las coordenadas del centro de corte o rigidez (O), que es donde se ubica la columna equivalente, y es el punto donde se concentra la rigidez proporcionada por los elementos resistentes que componen la estructura. El cuadro también muestra las coordenadas del centro geométrico (C) de la planta del edificio para cada caso.

Un hecho interesante ocurre en el valor de t para el segundo caso, ya que se produce un incremento en la distancia entre el centro de corte y el centro geométrico con respecto al primer caso. Esto acarrea algunas consecuencias que serán comentadas más adelante. Por el contrario, en el caso tres, t es cero, ya que el sistema es doblemente simétrico.

Respecto a la inercia del sistema tanto en X como en Y , esta fue obtenida de la sumatoria de las inercias (en X e Y) de los elementos resistentes que conforman la estructura para cada caso. En la tabla de la Fig. 8.1 podemos ver un incremento sucesivo en la inercia con respecto a X del sistema, esto porque la inercia en X de los elementos resistentes del primer caso es muy pequeña comparada con la proporcionada por los elementos resistentes del caso dos. A su vez, la inclusión de otros elementos resistentes como marcos empotrados y núcleos en el caso tres, incrementó la inercia total de este sistema y por lo tanto su rigidez en esa dirección. Caso contrario ocurre con la inercia en Y de la estructura del caso dos, ya que los elementos resistentes proporcionan menor rigidez en esa dirección que los del caso uno. Luego, en el caso tres, se observa un incremento de

la rigidez en Y respecto del caso anterior, esto debido a la reubicación e inclusión de los elementos resistentes ya mencionados anteriormente.

Algo similar ocurre para la constante de torsión de Saint Venant, ya que se observa un decrecimiento en la resistencia a este tipo de torsión para el caso dos, respecto del primero. Esto se debe a que los muros de corte son menos resistentes a la torsión de Saint Venant que los núcleos contenidos en el caso uno.

En lo concerniente a la torsión de alabeo, se puede observar un incremento sucesivo en la resistencia a este tipo de torsión para cada caso. Esto se debe básicamente al aumento de la distancia entre los elementos resistentes del sistema y el centro de corte, como ocurre en el caso dos, además de la reubicación e incorporación de otros elementos resistentes en el caso tres, mejorando la eficiencia de este último considerablemente.

Finalmente tenemos el parámetro de torsión k . La tabla de la Fig.8.1 nos muestra un decrecimiento en el valor de este parámetro para cada caso, esto producto del fuerte incremento de la constante de torsión de alabeo, y de la leve variación de la constante de torsión de Saint Venant, lo que genera un valor menor a uno. Esto indica una gran resistencia a la torsión de alabeo, siendo la resistencia a la torsión de Saint Venant mucho menos significativa y por lo tanto la que determina la forma del modo de vibración torsional puro.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	parametros de la columna equivalente
	Asimet.	Monosimet.	Dob. Simet.	
\bar{x}_0 (m)	10,37	19,87	10,00	coordenada x de centro de corte
\bar{y}_0 (m)	3,10	7,50	7,50	coordenada y de centro de corte
$\Sigma I_{x,i}$ (m ⁴)	2,800	4,173	6,636	sumatoria de las inercias en X
$\Sigma I_{y,i}$ (m ⁴)	12,647	4,173	5,077	sumatoria de las inercias en Y
ΣJ_i (m ⁴)	0,081	0,053	0,085	cte.de torsion de Saint-Venant
$I\omega$ (m ⁶)	50,787	230,349	680,209	cte.de alabeo
t (m)	4,418	9,872	0,000	dist. entre centro de corte O y centro geom. C
i_p (m)	8,462	12,229	7,217	radio de giro
x_c (m)	-0,366	-9,872	0,000	coordenada x de centro geometrico del edif.
y_c (m)	4,402	0,000	0,000	coordenada y de centro geometrico del edif.
ΣI_{xy} (m ⁴)	1,073	0,000	0,000	sumatoria del producto de inercia
$\Sigma I_{x,i x^2}$ (m ⁶)	56,979	2,015	412,495	
$\Sigma I_{y,i y^2}$ (m ⁶)	11,820	228,333	267,712	
k	0,390	0,148	0,109	parametro de torsion

Figura 8.1

Cuadro comparativo de las características geométricas y de rigidez de la columna equivalente para cada caso.

En la Fig. 8.2 se muestra el porcentaje de incremento y disminución en los valores de los parámetros más relevantes analizados anteriormente.

Parametro	% caso 2 resp. a caso 1	% caso 3 resp. a caso 2
$\Sigma I_{x,i} (m^4)$	49,1	59,0
$\Sigma I_{y,i} (m^4)$	-67,0	21,7
$\Sigma J_i (m^4)$	-34,4	60,0
$I\omega (m^6)$	353,6	195,3
$t (m)$	123,5	-100,0
k	-62,0	-26,4

Figura 8.2
Porcentaje de incremento y disminución de parámetros para cada caso.

8.3 Parámetros Globales obtenidos por el Método Aproximado (caso 1 al 4)

En la Fig. 8.3 se muestra un cuadro comparativo entre los parámetros globales que mejor representan el desempeño y eficiencia de los edificios de los casos uno, dos, tres y cuatro. En la primera columna vemos la rotación. Podemos observar que para el caso uno existe rotación en ambas direcciones, puesto que como la estructura es asimétrica, existe una distancia perpendicular a la línea de acción de la sollicitación tanto en X como en Y . Como la estructura del caso dos es monosimétrica, existe una distancia perpendicular a la línea de acción de la sollicitación en la dirección Y . Dicha distancia (t) es mayor que la del caso uno, y teniendo en cuenta que para todos los casos la sollicitación en X e Y es similar, entonces la rotación es mayor que en el caso anterior. En el caso tres y cuatro, la rotación es nula puesto que la estructura es doblemente simétrica.

La segunda columna nos muestra el desplazamiento máximo para cada caso. En el primero podemos señalar que existen desplazamientos máximos (en la parte superior de la estructura) en ambas direcciones, producto de la acción de las cargas de viento tanto en X como en Y . Puesto que también existe rotación esto contribuye a desplazamientos adicionales que se suman a los anteriores y son mostrados en la Fig. 8.3. La segunda estructura manifiesta un desplazamiento en la dirección Y mucho mayor que en el caso uno, esto se debe por una parte a lo explicado en el párrafo anterior (mayor excentricidad) y también a la disminución de la inercia en la dirección Y , comentado en el punto 8.2.

La tercera columna nos muestra la razón de los desplazamientos máximos de cada caso respecto al desplazamiento máximo recomendado en la sección 5.2.2.1, podemos notar que en todos los casos, el cociente es menor que uno, lo que indica que los desplazamientos están dentro del rango recomendado.

En la cuarta columna podemos apreciar el incremento sucesivo de la frecuencia natural

del edificio para todos los casos, esto es lógico, considerando que al reubicar elementos y agregar otros, que contribuyan a incrementar la rigidez del sistema global, el periodo de oscilación de la estructura disminuirá, incrementando la frecuencia natural del sistema.

La quinta columna nos muestra el momento torsor de Saint Venant. En el caso uno, este parámetro alcanza su máximo valor en $z= 14,53$ m y depende básicamente del torque con respecto al centro de corte (m_{z_0}), y del parámetro de torsión k , visto anteriormente. Como puede apreciarse, el momento torsor de Saint Venant adquiere un valor distinto para cada solicitación, ya que este se ve afectado directamente por m_{z_0} , que disminuye notoriamente para las cargas de viento en dirección Y . En el caso dos podemos apreciar que sólo frente a la solicitación en Y existe el momento torsor de Saint Venant, esto producto de que m_{z_0} es distinto de cero. En los casos tres y cuatro el momento torsor de Saint Venant es cero, ya que m_{z_0} es cero.

El parámetro mostrado en la sexta columna es el momento torsor máximo de alabeo, este parámetro depende básicamente del torque con respecto al centro de corte (m_{z_0}) y de la altura total H de la estructura. Al igual que el momento torsor de Saint Venant, posee dos valores para cada solicitación en el caso uno y por la misma razón que este, su valor disminuye para las cargas de viento en dirección Y . En el caso dos podemos apreciar que sólo frente a la solicitación en Y existe el momento torsor de alabeo, esto producto de que m_{z_0} es distinto de cero. En los casos tres y cuatro el momento torsor de alabeo es cero, ya que el torque con respecto al centro de corte es cero.

El parámetro mostrado en la séptima columna es la carga crítica N_{cr} , que como lo dice su nombre, es el valor crítico que indica la carga límite que puede aplicarse a una columna sin producir deformaciones acentuadas que sobrepasen el límite elástico del material. Timoshenko *et al* (1970). Este parámetro sólo depende de las dimensiones de la columna y del módulo del material (E). Para el caso uno dicha carga crítica fue calculada en la sección 6.3.3, por la fórmula (4.27), ya que la estructura es asimétrica, es decir, existe acoplamiento de los modos básicos (Fig. 2.2/a). Para el caso dos la carga crítica fue calculada en la sección 6.4.3, por la fórmula (4.28), ya que la estructura es monosimétrica, es decir, pandeo de oscilación se desarrolla independientemente en el eje de simetría (X) y sólo el pandeo de oscilación perpendicular al eje de simetría y el pandeo torsional puro se combinan.(Fig. 2.2/b). Para el caso tres la carga crítica fue calculada en la sección 6.5.3, siendo esta la menor de las cargas definidas por la fórmula 4.16 ($N_{cr,X}$ y $N_{cr,Y}$) y la fórmula 4.18 ($N_{cr,\varphi}$), ya que la estructura es doblemente simétrica, es decir, no existe acoplamiento de los modos básicos. (Fig. 2.2/c). Esto último se puede verificar observando la Fig. 8.1 donde se aprecia que para el caso tres $\sum I_{X,i}$ es mayor que $\sum I_{Y,i}$, por lo tanto $N_{cr,X}$ es menor que $N_{cr,Y}$ y como el valor de I_{ω} es muy grande, luego $N_{cr,\varphi}$ es mayor que $N_{cr,X}$ y $N_{cr,Y}$, por lo tanto $N_{cr,X}$ es el valor de la carga crítica.

Finalmente en la octava columna se muestra el parámetro más importante y representativo, la razón de carga crítica (ν) definido por la fórmula (5.31), este parámetro tiene ventaja sobre todos los demás, ya que permite evaluar la seguridad y el desempeño del sistema resistente. (Zalka, 2000).

Podemos ver que el valor de ν disminuye sucesivamente para cada caso y cumple lo establecido en la sección 5.4. Una de sus ventajas frente a los demás parámetros es que es adimensional y no depende de la dirección de la carga horizontal y además considera automáticamente la situación más desfavorable puesto que toma en consideración si el sistema desarrolla deformaciones laterales, torsionales o la combinación de estas. También la razón de carga crítica es muy sensible a los cambios de dimensión, reubicación e incorporación de los elementos resistentes del sistema. Su importancia se subraya también por el hecho de tener un enlace directo con el factor de seguridad global del edificio (sección 5.4).

		Rotacion max. (°)	Desplaz. max. (mm)	Razon de desplaz. max.	Frecuencia natural (Hz)	M_t, max (Tonf m)	M_ω, max (Tonf m)	Carga critica N_{cr} (Tonf)	Razon de carga critica $\nu=N/N_{cr}$
Caso 1	Viento en X	0,0123	2,3075	0,0769	0,3388	1,736	73,339	5,40E+07	0,0143
	Viento en Y	0,0014	1,5377	0,0513		-0,193	-8,136		
Caso 2	Viento en X	0,0000	0,6284	0,0209	0,4329	0,000	0,000	8,66E+07	0,0082
	Viento en Y	0,0085	3,7905	0,1264		-0,795	-219,281		
Caso 3	Viento en X	0,0000	0,5165	0,0172	0,8836	0,000	0,000	3,60E+08	0,0028
	Viento en Y	0,0000	0,5269	0,0176		0,000	0,000		
Caso 4	Sismo en X	0,0000	1,8205	0,0607	1,1927	0,000	0,000	6,56E+08	0,0016
	Sismo en Y	0,0000	1,5596	0,0520		0,000	0,000		

Figura 8.3

Cuadro comparativo de parámetros globales entregados por método aproximado para cada caso.

8.4 Análisis de Parámetros de la Columna Equivalente (caso 3 y 4)

En la Fig. 8.4 se muestra un cuadro comparativo de las características geométricas y de rigidez de la columna equivalente para el caso tres y cuatro. Cabe señalar que el caso cuatro es un arreglo estructural del caso tres, donde se reemplazaron los marcos empotrados perimetrales (5 y 8 en caso tres) en dirección Y por muros de corte en esa misma dirección (2 y 3) y además se incorporaron muros de corte en dirección X (5 y 8 en caso cuatro).

En primer lugar podemos observar que para ambos casos la estructura es doblemente simétrica.

Respecto a la inercia del sistema, tanto en X como en Y , se observa un incremento considerable en el caso cuatro, respecto del tres. Esto debido al reemplazo de marcos empotrados perimetrales en dirección Y por muros de corte en la misma dirección y la incorporación de muros de corte en X .

Producto de lo anterior también se observa un incremento tanto en la constante de torsión de Saint Venant como en la constante de torsión de alabeo, para el caso cuatro, respecto del tres.

Finalmente tenemos el parámetro de torsión k . La tabla de la Fig.8.4 nos muestra una disminución en el valor de este parámetro para el caso cuatro, esto producto del fuerte incremento de la constante de torsión de alabeo, y de la de la constante de torsión de Saint Venant, lo que genera un valor menor a uno. Esto indica una gran resistencia a la torsión de alabeo, siendo la resistencia a la torsión de Saint Venant mucho menos significativa a pesar de su incremento y por lo tanto la que determina la forma del modo de vibración torsional puro.

	Caso 3	Caso 4	parametros de la columna equivalente
\bar{x}_0 (m)	10,00	10,00	coordenada x de centro de corte
\bar{y}_0 (m)	7,50	7,50	coordenada y de centro de corte
$\Sigma I_{x,i}$ (m ⁴)	6,636	10,798	sumatoria de las inercias en X
$\Sigma I_{y,i}$ (m ⁴)	5,077	9,251	sumatoria de las inercias en Y
ΣJ_i (m ⁴)	0,085	0,139	cte. de torsion de Saint-Venant
$I\omega$ (m ⁶)	680,209	1316,242	cte. de alabeo
t (m)	0,000	0,000	dist. entre centro de corte O y centro geom. C
i_p (m)	7,217	7,217	radio de giro
x_c (m)	0,000	0,000	coordenada x de centro geometrico del edif.
y_c (m)	0,000	0,000	coordenada y de centro geometrico del edif.
ΣI_{xy} (m ⁴)	0,000	0,000	sumatoria del producto de inercia
$\Sigma I_{x,i} x^2$ (m ⁶)	412,495	820,195	
$\Sigma I_{y,i} y^2$ (m ⁶)	267,712	496,045	
k	0,109	0,100	parametro de torsion

Figura 8.4

Cuadro comparativo de las características geométricas y de rigidez de la columna equivalente para cada caso.

En la Fig. 8.5 se muestra el porcentaje de incremento y disminución en los valores de los parámetros más relevantes analizados anteriormente.

Parametro	% caso 4 resp. a caso 3
$\Sigma I_{x,i}$ (m ⁴)	62,7
$\Sigma I_{y,i}$ (m ⁴)	82,2
ΣJ_i (m ⁴)	62,5
$I\omega$ (m ⁶)	93,5
k	-8,4

Figura 8.5

Porcentaje de incremento y disminución de parámetros para caso cuatro.

8.5 Análisis Comparativo entre ambos Métodos (caso 3 y 4)

En al Fig. 8.6 se puede apreciar un cuadro comparativo entre los datos de salida arrojados por ambos métodos para el caso tres y cuatro. Estos resultados dependen exclusivamente de la densidad del material, características geométricas y de rigidez, así como también de la ubicación en la planta de los elementos resistentes que conforman la estructura. Cabe señalar que son independientes de las solicitaciones, ya sean de viento o sísmicas.

	metodo	Centro de corte (m)		Centro geom. (m)		Peso total edificio (Tonf)
		\bar{x}_0	\bar{y}_0	x_c	y_c	
caso 3	Aprox.	10,000	7,500	0,0000	0,0000	1021,25
	SAP2000	10,001	7,499	0,0000	0,0000	1040,00
caso 4	Aprox.	10,00	7,50	0,0000	0,0000	1061,88
	SAP2000	10,00	7,50	0,0000	0,0000	1071,25

Figura 8.6

Cuadro comparativo para centro de corte, centro geométrico y peso total de la estructura para cada caso, entregados por planilla *Excel* y *SAP2000*.

En la Fig. 8.7 se muestra un cuadro comparativo entre los parámetros globales arrojados por el método aproximado para las cargas de viento en X e Y (calculados en la sección 6.5), y los entregados por el programa *SAP2000* (sección 7.3), para estas mismas solicitaciones.

En la primera columna vemos que la rotación en ambos métodos es nula, ya que la estructura es doblemente simétrica y por lo tanto, no existe excentricidad.

La segunda columna nos muestra el desplazamiento máximo arrojado por los dos métodos para las direcciones X e Y respectivamente. El desplazamiento máximo en dirección X calculado por el método aproximado experimenta una disminución del 1,43% respecto de lo calculado por el programa *SAP2000*. Por el contrario, para el desplazamiento en dirección Y muestra un incremento del 13% respecto al desplazamiento en la misma dirección calculado por el método exacto.

La tercera columna nos muestra la razón de los desplazamientos máximos en X e Y de cada método respecto al desplazamiento máximo recomendado en la sección 5.2.2.1, podemos notar que en ambos, el cociente es menor que uno, lo que indica que los desplazamientos están dentro del rango recomendado.

En la cuarta columna podemos apreciar una diferencia notable entre ambos resultados para la frecuencia natural del edificio, sin embargo, frente a los demás parámetros este juega un rol relativamente menor en el diseño estructural: el proyectista de un edificio ordinario raramente lo lleva a un análisis dinámico. (Zalka, 2000). Lo citado anteriormente es válido para estructuras menores como es el caso de estos ejemplos, donde la modelación (realizada en este caso en

SAP2000) está basada en métodos estáticos para el ingreso de solicitaciones de viento o sísmicas. Cabe señalar también que el cálculo de la frecuencia natural es independiente de los demás parámetros globales, por lo que no afecta a estos.

Con respecto a la fuerzas de corte global tanto en la dirección X como en Y , estas muestran un incremento del 11% respecto de lo entregado por el método exacto.

La sexta columna nos muestra los momentos de flexión global en la dirección X e Y . Dicho parámetro en dirección X muestra una disminución del 0,05% respecto del momento de flexión global en la misma dirección, y un 0,08% para el momento en la dirección ortogonal respecto de lo calculado por el método exacto.

Caso 3		Rotacion max. (°)	Desplaz. max. (mm)	Razon de desplaz. max.	Frecuencia natural (Hz)	Σ Fuerzas de corte (Tonf)	Σ Momento (Tonf m)
Aprox.	Viento en X	0,0000	0,5165	0,0172	0,8836	16,659	-124,943
	Viento en Y	0,0000	0,5269	0,0176		22,212	-166,590
SAP2000	Viento en X	0,0000	0,5240	0,0175	2,8413	14,998	-125,010
	Viento en Y	0,0000	0,4660	0,0155		20,005	-166,725

Figura 8.7

Cuadro comparativo de indicadores de desempeño (caso tres) entregados por planilla *Excel* y *SAP2000*.

Ahora pasamos a estudiar la estructura del caso cuatro, sometida a solicitaciones de sísmicas. En al Fig. 8.8 se puede apreciar un cuadro comparativo entre los datos de salida arrojados por la planilla *Excel* para las cargas sísmicas en X e Y (calculados en la sección 6.6), y los datos arrojados por el programa *SAP2000* (sección 7.4), para estas mismas solicitaciones.

En la primera columna vemos que la rotación en ambos métodos es nula, ya que al igual que el caso anterior, la estructura es doblemente simétrica y por lo tanto, no existe excentricidad.

La segunda columna nos muestra el desplazamiento máximo arrojado por los dos métodos para las direcciones X e Y respectivamente. El desplazamiento máximo en dirección X calculado por el método aproximado experimenta un incremento del 10% respecto de lo calculado por el programa *SAP2000*. Por el contrario, para el desplazamiento en dirección Y muestra una disminución del 12,3% respecto al desplazamiento en la misma dirección calculado por el método exacto.

Similar al cuadro de la Fig.8.7, la tercera columna nos muestra la razón de los desplazamientos máximos en X e Y de cada método respecto al desplazamiento máximo recomendado en la sección 5.2.2.1, podemos notar que en ambos, el cociente es menor que uno, lo que indica que los desplazamientos están dentro del rango recomendado.

Respecto a la frecuencia natural del sistema podemos observar que la diferencia entre los valores entregados por ambos métodos es notable al igual que en el caso tres. Como ya se dijo anteriormente, este parámetro no es tomado en cuenta para el análisis estático.

Con respecto a la fuerzas de corte global tanto en la dirección X como en Y , estas

muestran un incremento del 0,03% respecto de lo entregado por el método exacto.

La sexta columna nos muestra los momentos de flexión global en la dirección X e Y. Estos muestran una disminución del 22,8% respecto de lo entregado por el método exacto.

Caso 4		Rotacion max. (°)	Desplaz. max. (mm)	Razon de desplaz. max.	Frecuencia natural (Hz)	Σ Fuerzas de corte (Tonf)	Σ Momento (Tonf m)
Aprox.	Sismo en X	0,0000	1,8205	0,0607	1,1927	87,662	-760,972
	Sismo en Y	0,0000	1,5596	0,0520		87,662	-760,972
SAP2000	Sismo en X	0,0000	1,6540	0,0551	4,2737	87,635	-985,556
	Sismo en Y	0,0000	1,7790	0,0593		87,635	-985,556

Figura 8.8

Cuadro comparativo de indicadores de desempeño (caso cuatro) entregados por planilla *Excel* y *SAP2000*.

En lo concerniente a la sección 8.3 es preciso recalcar la importancia de la razón de carga crítica en la evaluación de estabilidad de una estructura. Como se comentó anteriormente este parámetro tiene muchas ventajas respecto de los demás parámetros globales que se presentaron en el estudio. El uso de la razón de carga crítica global ofrece además las siguientes ventajas adicionales:

- *Los niveles de seguridad pueden ser incrementados si es necesario, sin aumentar los costos de construcción.* Esto se puede lograr mejorando la eficiencia de la estructura, reduciendo la distancia perpendicular de la línea de acción de la carga horizontal (de viento o sísmica) y el centro de corte (alcanzar la doble simetría del sistema). Junto con lo anterior, la eficiencia del sistema puede incrementarse aumentando la resistencia a la torsión de alabeo. Esto se logra cuando la distancia perpendicular entre el centro de corte y el elemento resistente aumenta.

Lo señalado anteriormente se cumple eligiendo adecuadamente el tipo de elemento resistente y su ubicación en la planta del edificio, lo que incrementará la rigidez lateral y torsional del sistema. Esto último permite que la carga crítica del sistema aumente, disminuyendo así la razón de carga crítica. Parámetro que está íntimamente ligado al factor de seguridad global del edificio. (sección 5.4).

- *Los costos de construcción se pueden reducir al encontrar el sistema resistente más efectivo.* Este punto va de la mano con el primero, ya que la elección del tipo de elementos resistentes, así como sus dimensiones, sección y ubicación, permiten incorporar sólo aquellos elementos necesarios para el buen desempeño de la estructura frente a una sollicitación de viento o sísmica.

Con respecto a la sección 8.5 podemos señalar que en la confrontación del método aproximado con el método exacto para la estructura sometida a cargas de viento ($\mu = 0$), arrojó un porcentaje de error mínimo de 0,05% y un máximo de 13%.

En tanto para la estructura sometida a cargas sísmicas ($\mu = 1,79$), este arrojó un porcentaje de error mínimo de 0,03% y un máximo de 22,8%.

Gabriella Potzta en su Tesis “Approximate Analysis of Buildings Structures Subjected to Earthquakes” utilizó este método basado en la columna equivalente para verificar los parámetros globales de un edificio de 28 pisos, estructurado por marcos empotrados, muros de corte y muros de corte acoplados, conservando la distribución de estos en cada piso. La estructura, con una altura total de 83,2 m fue sometida a sollicitaciones sísmicas. Luego se comparó lo obtenido, con el método exacto (*ETABS*). La confrontación de ambos métodos arrojó un porcentaje de error mínimo de 4% y un máximo de 10% por parte del método aproximado respecto del método exacto.

Lo anterior y los resultados obtenidos en el estudio de esta tesis indican que el método aproximado mejora conforme aumenta la cantidad de pisos de la estructura, siempre y cuando se mantengan la regularidad en la distribución de los elementos resistentes en cada piso.

Esto es lógico, pensando en que si tenemos muchos pisos, las cargas puntuales horizontales (carga externa) en cada uno pasan prácticamente a formar una carga distribuida en función de la altura, ajustándose al modelo de carga horizontal externa que se muestra en la sección 5.2.

Los ejemplos numéricos fueron presentados para mostrar el uso práctico y utilidad de la viga de reemplazo (columna equivalente). (Potzta, 2002)

CAPITULO IX

Conclusiones

Es importante destacar la relevancia de la razón de carga crítica como indicador de desempeño en una estructura, siendo este el más representativo de los parámetros estudiados en relación al comportamiento global del edificio. Una de sus ventajas frente a los demás parámetros es que es adimensional y no depende de la dirección de la carga horizontal y además considera automáticamente la situación más desfavorable puesto que toma en consideración si el sistema desarrolla deformaciones laterales, torsionales o la combinación de estas. Los valores de la razón de carga crítica obtenidos para cada caso (1 al 4) fueron menores a valor admisible v_{\max} entregado en la sección 5.4. Su importancia se subraya también por el hecho de tener un enlace directo con el factor de seguridad global del edificio (sección 5.4).

Cabe destacar también, la importancia que tiene el hecho de poder visualizar previamente la distribución de los elementos resistentes que conforman la estructura, esto permite evaluar si es necesario un arreglo estructural (reubicación, reemplazo e incorporación de muros de corte, marcos empotrados y núcleos) para mejorar la eficiencia del edificio.

Se aplicó el método analítico a dos casos, donde cada edificio (de cinco pisos) con distintos arreglos estructurales fue sometido a cargas de viento (caso3), y sísmicas (caso 4) respectivamente, entregando el primero un error máximo del 13% y el segundo de un 22,8% respecto de lo obtenido por el método exacto (*SAP2000*) para cada caso. Por otro lado, la aplicación de este método, para un edificio de mayor cantidad de pisos (28) a los estudiados en la presente Tesis y sometido a cargas sísmicas, arrojó un error máximo del 10% respecto a lo entregado por el método exacto. Esto indica que el método analítico mejora su aproximación al aumentar el número de pisos, siempre y cuando la estructura sea regular (donde las características tanto geométricas como de rigidez no varían a lo largo de la altura del edificio). Lo anterior, permite concluir que el método analítico (aproximado) basado en el concepto de columna equivalente, sirve como herramienta de pre diseño para una estructura regular, de manera que se puede abordar un problema de forma rápida, acotando ciertos parámetros globales para compararlos posteriormente con los resultados arrojados por el método exacto.

El desempeño alcanzado por las estructuras estudiadas indica que la gran rigidez aportada principalmente por muros de corte y núcleos, incrementa la capacidad resistente frente a sollicitaciones en edificios, limitando adecuadamente los desplazamientos en la parte superior. Por otro lado, la buena distribución de los elementos resistentes (casos 3 y 4) contribuyó a anular la rotación y por lo tanto, eliminar los desplazamientos adicionales en la parte superior de la estructura.

En resumen, de acuerdo con los objetivos planteados, se concluye que:

1. Se logró una buena aproximación de los resultados obtenidos por el Método de Zalka, frente a los obtenidos por el método exacto (*SAP2000*).
2. Lo dicho en el punto anterior, avala el hecho de que los resultados obtenidos por el Método de Zalka permiten emplearlos para chequear los resultados arrojados por un método exacto.
3. Se observó que la razón de carga crítica toma en cuenta la situación más desfavorable de la estructura y que es el recíproco del factor de seguridad global del edificio (sección 5.4). De lo anterior radica la importancia de este parámetro global.

Bibliografía

ZALKA, K. A. 2000. Global Structural Analysis of Buildings. 2 ed. Taylor & Francis e- Library. 360 p.

IBAÑEZ, V. J. 1976. Apuntes sobre Cálculo Dinámico de edificios y suelos. 2ed. Santiago, Chile. 99p.

KOLLAR, L. 1999. Structural Stability in Engineering Practice. 1 ed. E & FN Spon. London. U.K. 454 p.

TIMOSHENKO, S. 1970. Resistencia de Materiales Primera Parte Teoría elemental y problemas. 2 ed. Madrid, España. 350 p.

POTZTA, G. 2002. Approximate Analysis of Building Structures Subjected to Earthquakes. Tesis Budapest, Budapest University of Technology and Economics, Fac. Arch. 83p.

INSTITUTO NACIONAL DE NORMALIZACION (Chile). 1986. Diseño estructural de edificios: Cargas permanentes y sobrecargas de uso. (NCh1537.Of86). Santiago, Chile. 21p.

INSTITUTO NACIONAL DE NORMALIZACION (Chile). 1994. Cálculo de la acción del viento sobre las construcciones. (NCh432.Of71). 2 ed. Santiago, Chile. 37p.

INSTITUTO NACIONAL DE NORMALIZACION (Chile). 1996. Diseño sísmico de edificios. (NCh433.Of96). Santiago, Chile. 42p.

KOLLBRUNER, C.F.; K. BASLER. 1969. Torsion in structures, an engineering approach. Springer.

(Disponible en [http://www.wapedia.mobi/es/Torsion_\(ingeniería\)](http://www.wapedia.mobi/es/Torsion_(ingeniería)). Consultado el: 12 de enero de 2010).

PRANDTL, L. 1903. Zur torsion von prismatischen stäben.

(Disponible en [http://www.wapedia.mobi/es/Torsion_\(ingeniería\)](http://www.wapedia.mobi/es/Torsion_(ingeniería)). Consultado el: 12 de enero de 2010).

ANEXO A

Características de secciones para elementos resistentes

Muro de corte

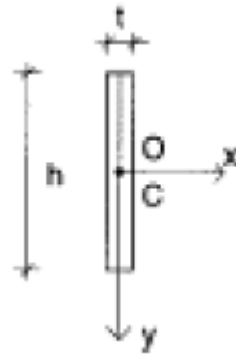


Figura A.1
Sección de muro de corte (Zalka, 2000).

$$A = ht, \quad I_x = \frac{th^3}{12}, \quad I_y = \frac{ht^3}{12}, \quad I_{xy} = 0$$

$$J = \frac{ht^3}{3}, \quad I_{\omega} = 0$$

Núcleo "Z"

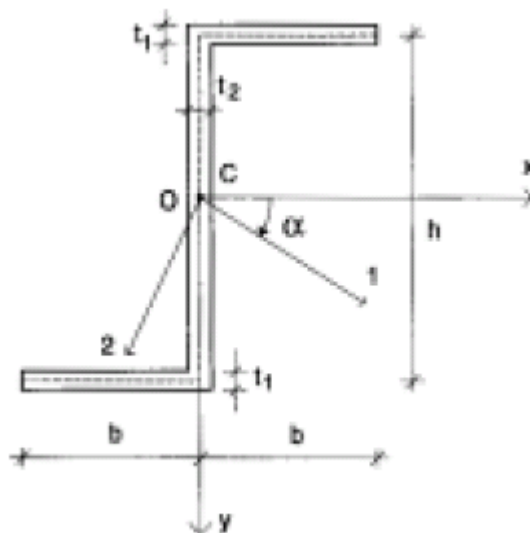


Figura A.2
Sección de núcleo "Z" (Zalka, 2000).

$$A = t_1(2b - t_2) + t_2(h + t_1),$$

$$I_x = \frac{t_2(h + t_1)^3}{12} + (2b - t_2)t_1^3 + (2b - t_2)t_1 \frac{h^2}{4},$$

$$I_y = \frac{(h + t_1)t_2^3}{12} + \frac{t_1}{6} \left(b - \frac{t_2}{2} \right)^3 + t_1(2b - t_2) \left(\frac{b}{2} + \frac{t_2}{4} \right)^2,$$

$$I_{xy} = -\frac{ht_1}{8} + (4b^2 - t_2^2),$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x},$$

$$J = \frac{1}{3} (2bt_1^3 + t_2^3h),$$

$$I_\omega = \frac{b^3h^2t_1}{12} \times \frac{bt_1 + 2ht_2}{2bt_1 + ht_2},$$

Núcleo "T"

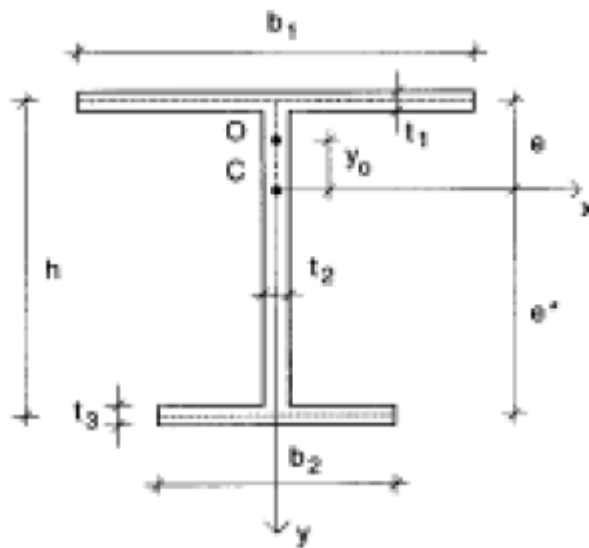


Figura A.3
Sección de núcleo "T" (Zalka, 2000).

$$A = A_f + A_g + A_a,$$

$$A_f = t_1 b_1, \quad A_a = t_3 b_2, \quad A_g = t_2 \left(h - \frac{t_1}{2} - \frac{t_3}{2} \right),$$

$$e = \frac{A_a}{A} h + \frac{A_g}{A} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_3}{4} + \frac{t_1}{4} \right), \quad e^* = h - e,$$

$$y_0 = \frac{A_a b_2^2 h}{12 I_y} - e,$$

$$I_x = \frac{1}{12} \left(A_f t_1^2 + A_a t_3^2 + A_g \left(h - \frac{t_1}{2} - \frac{t_3}{2} \right)^2 \right) + A_f e^2 + A_a e^{*2} + A_g \left(\frac{h}{2} - \frac{t_3}{4} + \frac{t_1}{4} - e \right)^2,$$

$$I_y = \frac{1}{12} (A_f b_1^2 + A_a b_2^2 + A_g t_2^2), \quad I_{xy} = 0,$$

$$J = \frac{1}{3} (A_f t_1^2 + A_a t_3^2 + A_g t_2^2), \quad I_\omega = \frac{A_f b_1^2 A_a b_2^2 h^2}{144 I_y},$$

Núcleo “U”

La fórmula dada para núcleos rectangulares puede ser aplicada a núcleos “U”. El parámetro t^* es el espesor para la sección de muros con una abertura.

$$t^* = \frac{h}{b-t} \times \frac{1}{\frac{h_1}{2} \left(\frac{Gh_1^2}{12EI_g} + \frac{1}{A_g} \right) + l_1 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(\frac{Gl_1^2}{12EI_r} + \frac{1}{A_r} \right)},$$

donde

Si $a > c$, entonces $l_1 = w + c$ y $h_1 = h$,

Si $a < c$, entonces $l_1 = l$ y $h_1 = h - c + a$,

$$A_g = ta, \quad I_g = \frac{ta^3}{12}, \quad A_r = tc, \quad I_r = \frac{tc^3}{12},$$

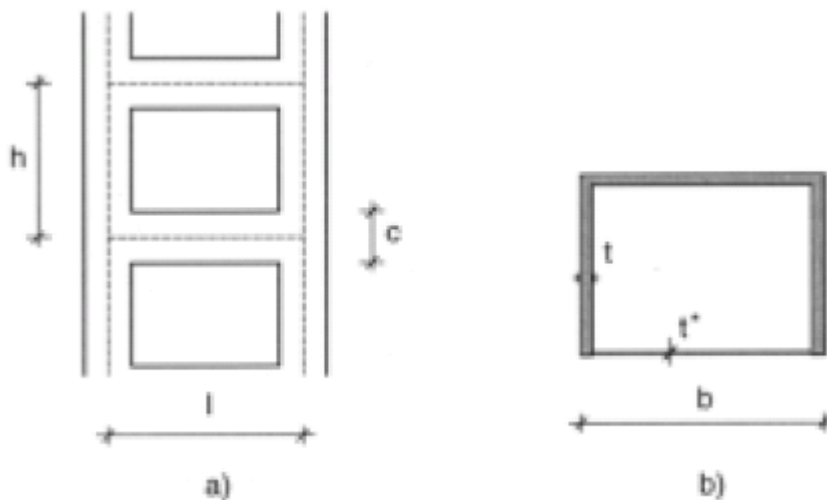


Figura A.4

a) Elevación de núcleo “U” b) Sección de núcleo “U”. (Zalka, 2000).

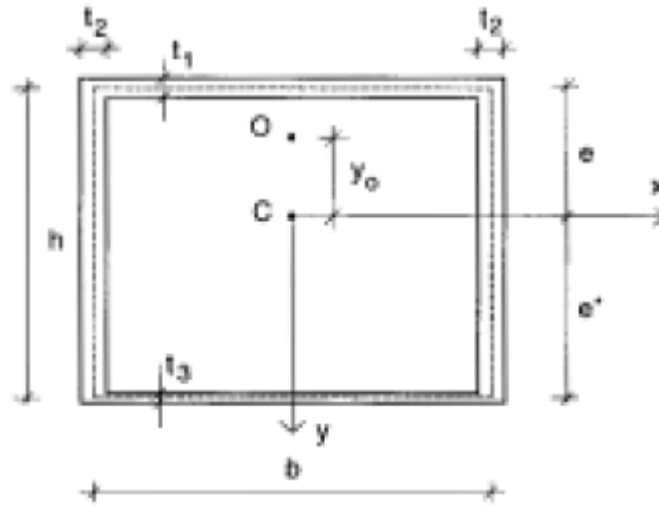


Figura A.5
Sección de núcleo rectangular. (Zalka, 2000).

$$A = A_f + 2A_g + A_a,$$

$$A_f = t_1(b + t_2), \quad A_a = t_3(b + t_2), \quad A_g = t_2 \left(h - \frac{t_1}{2} - \frac{t_3}{2} \right),$$

$$e = \frac{1}{A} \left(A_a h + A_g \left(h - \frac{t_3}{2} + \frac{t_1}{2} \right) \right), \quad e^* = h - e,$$

$$I_x = \frac{1}{12} \left(A_f t_1^2 + A_a t_3^2 + 2A_g \left(h - \frac{t_1}{2} - \frac{t_3}{2} \right)^2 \right) + A_f e^2 + A_a e^{*2} + 2A_g \left(\frac{h}{2} - \frac{t_3}{4} + \frac{t_1}{4} - e \right)^2,$$

$$I_y = \frac{1}{12} \left((A_f + A_a)(b + t_2)^2 + 2A_g t_2^2 \right) + A_g \frac{b^2}{2}, \quad I_{xy} = 0,$$

$$J = 2A_a \psi = \frac{4h^2 b^2}{\frac{b}{t_1} + \frac{b}{t_3} + \frac{2h}{t_2}}, \quad \psi = \frac{2bh}{\frac{b}{t_1} + \frac{b}{t_3} + \frac{2h}{t_2}}$$

$$I_\omega = \frac{2}{3} \left[ht_2 (\Omega_1^2 + \Omega_1 \Omega_2 + \Omega_2^2) + 0.5b (\Omega_1^2 t_1 + \Omega_2^2 t_3) \right],$$

donde

$$\Omega_1 = -\frac{bI_{\omega x}}{2I_y} + \omega_1, \quad \Omega_2 = -\frac{bI_{\omega x}}{2I_y} + \omega_2,$$

$$I_{\omega x} = \frac{b^2}{6}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_3) + \frac{bht_2}{2}(\omega_1 + \omega_2),$$

$$\omega_1 = -\psi \frac{b}{2t_1}, \quad \omega_2 = \frac{bh}{2} - \psi \left(\frac{b}{2t_1} + \frac{h}{t_2} \right),$$

ANEXO B

Tablas (Obtención de parámetros A. estabilidad y frecuencia)

Tabla 4.1

Factor de reducción r_s (Zalka, 2000).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_s	0.315	0.528	0.654	0.716	0.759	0.791	0.815	0.834	0.850	0.863	0.874
n	12	13	14	15	16	18	20	25	30	50	>50
r_s	0.883	0.891	0.898	0.904	0.910	0.919	0.926	0.940	0.950	0.969	$n/(n+1.6)$

Tabla 4.2

Parámetro de carga crítica α para marcos en apoyos empotrados. (Zalka, 2000).

β	α	β	α	β	α	β	α
0.0000	1.0000	0.05	1.1487	2	5.624	80	106.44
0.0005	1.0015	0.06	1.1782	3	7.427	90	118.38
0.001	1.0030	0.07	1.2075	4	9.100	100	130.25
0.002	1.0060	0.08	1.2367	5	10.697	200	246.24
0.003	1.0090	0.09	1.2659	6	12.241	300	359.51
0.004	1.0120	0.10	1.2949	7	13.749	400	471.29
0.005	1.0150	0.20	1.5798	8	15.227	500	582.06
0.006	1.0180	0.30	1.8556	9	16.682	1000	1127.5
0.007	1.0210	0.40	2.1226	10	18.118	2000	2199.1
0.008	1.0240	0.50	2.3817	20	31.820	5000	5360.5
0.009	1.0270	0.60	2.6333	30	44.862	10000	10567
0.010	1.0300	0.70	2.8780	40	57.545	100000	102579
0.020	1.0598	0.80	3.1163	50	69.991	1000000	1011864
0.030	1.0896	0.90	3.3488	60	82.265	2000000	2018802
0.040	1.1192	1.00	3.5758	70	94.405	>2000000	$\beta+1$

Tabla 4.3

Parámetro α_s de carga crítica para columnas sandwich. (Zalka, 2000).

β_s	α_s	β_s	α_s	β_s	α_s	β_s	α_s
0.0	1.0000	2.0	0.4005	4.0	0.2230	20	0.04884
0.1	1.0000	2.1	0.3852	4.1	0.2181	25	0.03926
0.2	1.0000	2.2	0.3711	4.2	0.2135	30	0.03282
0.3	1.0000	2.3	0.3579	4.3	0.2090	35	0.02819
0.4	0.9972	2.4	0.3457	4.4	0.2047	40	0.02471
0.5	0.9325	2.5	0.3342	4.5	0.2006	45	0.02199
0.6	0.8663	2.6	0.3235	5.0	0.1824	50	0.01981
0.7	0.8051	2.7	0.3134	5.5	0.1672	55	0.01803
0.8	0.7501	2.8	0.3039	6.0	0.1543	60	0.01654
0.9	0.7011	2.9	0.2950	6.5	0.1433	65	0.01527
1.0	0.6575	3.0	0.2866	7.0	0.1337	70	0.01419
1.1	0.6186	3.1	0.2787	7.5	0.1253	80	0.01243
1.2	0.5838	3.2	0.2711	8.0	0.1179	90	0.01105
1.3	0.5526	3.3	0.2640	8.5	0.1114	100	0.00995
1.4	0.5243	3.4	0.2572	9.0	0.1055	200	0.00499
1.5	0.4988	3.5	0.2508	10	0.09544	300	0.00333
1.6	0.4755	3.6	0.2447	12	0.08015	400	0.00250
1.7	0.4543	3.7	0.2389	14	0.06908	500	0.00200
1.8	0.4349	3.8	0.2333	16	0.06069	1000	0.00100
1.9	0.4170	3.9	0.2280	18	0.05413	>1000	$1/(1+\beta_s)$

Tabla. 4.4
Parámetro de carga crítica (Zalka, 2000).

k_1	α	k_2	α	k_3	α	k_4	α	k_5	α
0.00	7.837	4.5	52.48	9.2	150.9	13.9	297.4	18.6	491.6
0.01	7.838	4.6	54.10	9.3	153.5	14.0	301.0	18.7	496.2
0.05	7.845	4.7	55.73	9.4	156.1	14.1	304.7	18.8	500.9
0.10	7.867	4.8	57.39	9.5	158.8	14.2	308.4	18.9	505.6
0.20	7.957	4.9	59.06	9.6	161.5	14.3	312.1	19.0	510.3
0.30	8.107	5.0	60.75	9.7	164.2	14.4	315.8	19.1	515.0
0.40	8.316	5.1	62.47	9.8	166.9	14.5	319.5	19.2	519.8
0.50	8.583	5.2	64.20	9.9	169.7	14.6	323.3	19.3	524.6
0.60	8.909	5.3	65.96	10.0	172.4	14.7	327.1	19.4	529.4
0.70	9.291	5.4	67.73	10.1	175.2	14.8	330.9	19.5	534.2
0.80	9.730	5.5	69.52	10.2	178.0	14.9	334.7	19.6	539.0
0.90	10.22	5.6	71.34	10.3	180.9	15.0	338.6	19.7	543.9
1.0	10.77	5.7	73.17	10.4	183.7	15.1	342.5	19.8	548.8
1.1	11.37	5.8	75.03	10.5	186.6	15.2	346.4	19.9	553.7
1.2	12.02	5.9	76.90	10.6	189.5	15.3	350.3	20	558.6
1.3	12.72	6.0	78.80	10.7	192.4	15.4	354.2	21	609.0
1.4	13.47	6.1	80.72	10.8	195.4	15.5	358.2	22	661.5
1.5	14.27	6.2	82.66	10.9	198.3	15.6	362.2	23	716.2
1.6	15.11	6.3	84.62	11.0	201.3	15.7	366.2	24	772.9
1.7	15.99	6.4	86.60	11.1	204.3	15.8	370.2	25	831.8
1.8	16.91	6.5	88.60	11.2	207.3	15.9	374.2	26	892.8
1.9	17.87	6.6	90.63	11.3	210.4	16.0	378.3	27	955.9
2.0	18.87	6.7	92.68	11.4	213.5	16.1	382.4	28	1021.1
2.1	19.91	6.8	94.74	11.5	216.6	16.2	386.5	29	1088.4
2.2	20.98	6.9	96.83	11.6	219.7	16.3	390.6	30	1157.8
2.3	22.08	7.0	98.94	11.7	222.8	16.4	394.8	35	1536.3
2.4	23.21	7.1	101.1	11.8	226.0	16.5	399.0	40	1967.1
2.5	24.38	7.2	103.2	11.9	229.2	16.6	403.2	50	2984.7
2.6	25.57	7.3	105.4	12.0	232.4	16.7	407.4	60	4209.3
2.7	26.79	7.4	107.6	12.1	235.6	16.8	411.6	70	5640.9
2.8	28.03	7.5	109.8	12.2	238.8	16.9	415.9	80	7278.1
2.9	29.30	7.6	112.1	12.3	242.1	17.0	420.2	90	9120.7
3.0	30.59	7.7	114.3	12.4	245.4	17.1	424.5	100	11168
3.1	31.91	7.8	116.6	12.5	248.7	17.2	428.8	150	24471
3.2	33.25	7.9	118.9	12.6	252.1	17.3	433.1	200	42864
3.3	34.61	8.0	121.2	12.7	255.4	17.4	437.5	300	94863
3.4	35.99	8.1	123.6	12.8	258.8	17.5	441.9	400	167093
3.5	37.39	8.2	126.0	12.9	262.2	17.6	446.3	500	259498
3.6	38.81	8.3	128.4	13.0	265.6	17.7	450.7	700	504824
3.7	40.25	8.4	130.8	13.1	269.1	17.8	455.2	1000	1023750
3.8	41.71	8.5	133.2	13.2	272.5	17.9	459.7	1500	2290629
3.9	43.19	8.6	135.7	13.3	276.0	18.0	464.2	2000	4059499
4.0	44.69	8.7	138.2	13.4	279.5	18.1	468.7	2500	6330008
4.1	46.21	8.8	140.7	13.5	283.0	18.2	473.2	3000	9101926
4.2	47.75	8.9	143.2	13.6	286.6	18.3	477.8	3500	12375092
4.3	49.31	9.0	145.7	13.7	290.2	18.4	482.4	4000	16149383
4.4	50.89	9.1	148.3	13.8	293.8	18.5	487.0	>4000	$k_1^2 + 8$

Tabla. 4.5

Parámetro ε de modo acoplado para el caso monosimétrico. (Zalka, 2000).

r_2	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$\tau_x=0.0$	0.8000	0.9000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\tau_x=0.1$	0.7736	0.8513	0.9091	0.9613	0.9774	0.9843	0.9880	0.9903
$\tau_x=0.2$	0.7240	0.7852	0.8333	0.8950	0.9273	0.9454	0.9566	0.9641
$\tau_x=0.3$	0.6743	0.7264	0.7692	0.8313	0.8710	0.8970	0.9149	0.9278
$\tau_x=0.4$	0.6292	0.6753	0.7143	0.7745	0.8169	0.8474	0.8698	0.8869
$\tau_x=0.5$	0.5890	0.6307	0.6667	0.7243	0.7673	0.8000	0.8253	0.8453
$\tau_x=0.6$	0.5533	0.5916	0.6250	0.6800	0.7226	0.7561	0.7830	0.8049
$\tau_x=0.7$	0.5215	0.5569	0.5882	0.6406	0.6822	0.7159	0.7436	0.7666
$\tau_x=0.8$	0.4931	0.5261	0.5556	0.6054	0.6459	0.6793	0.7072	0.7307
$\tau_x=0.9$	0.4675	0.4985	0.5263	0.5739	0.6131	0.6459	0.6737	0.6975
$\tau_x=1.0$	0.4444	0.4737	0.5000	0.5455	0.5833	0.6154	0.6429	0.6667
r_2	3.0	4.0	5.0	10.0	20.0	30.0	50.0	100.0
$\tau_x=0.0$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\tau_x=0.1$	0.9951	0.9967	0.9975	0.9989	0.9995	0.9997	0.9998	0.9999
$\tau_x=0.2$	0.9809	0.9871	0.9902	0.9956	0.9979	0.9986	0.9992	0.9996
$\tau_x=0.3$	0.9594	0.9719	0.9786	0.9902	0.9953	0.9969	0.9982	0.9991
$\tau_x=0.4$	0.9327	0.9524	0.9632	0.9829	0.9917	0.9945	0.9968	0.9984
$\tau_x=0.5$	0.9028	0.9296	0.9449	0.9737	0.9872	0.9915	0.9949	0.9975
$\tau_x=0.6$	0.8715	0.9048	0.9245	0.9631	0.9818	0.9879	0.9928	0.9964
$\tau_x=0.7$	0.8400	0.8788	0.9026	0.9510	0.9755	0.9837	0.9902	0.9951
$\tau_x=0.8$	0.8089	0.8523	0.8798	0.9379	0.9685	0.9789	0.9873	0.9936
$\tau_x=0.9$	0.7788	0.8259	0.8566	0.9238	0.9607	0.9736	0.9840	0.9920
$\tau_x=1.0$	0.7500	0.8000	0.8333	0.9091	0.9524	0.9677	0.9804	0.9901
r_2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\tau_x=0.0$	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000
$\tau_x=0.1$	0.0000	0.0999	0.1995	0.2987	0.3974	0.4951	0.5914	0.6851
$\tau_x=0.2$	0.0000	0.0996	0.1980	0.2951	0.3900	0.4821	0.5698	0.6513
$\tau_x=0.3$	0.0000	0.0990	0.1957	0.2894	0.3792	0.4639	0.5422	0.6127
$\tau_x=0.4$	0.0000	0.0983	0.1926	0.2822	0.3662	0.4435	0.5134	0.5753
$\tau_x=0.5$	0.0000	0.0974	0.1890	0.2741	0.3521	0.4226	0.4855	0.5408
$\tau_x=0.6$	0.0000	0.0963	0.1849	0.2655	0.3379	0.4024	0.4594	0.5095
$\tau_x=0.7$	0.0000	0.0951	0.1805	0.2566	0.3239	0.3833	0.4354	0.4812
$\tau_x=0.8$	0.0000	0.0938	0.1760	0.2478	0.3105	0.3654	0.4135	0.4557
$\tau_x=0.9$	0.0000	0.0924	0.1713	0.2391	0.2977	0.3487	0.3934	0.4327
$\tau_x=1.0$	0.0000	0.0909	0.1667	0.2308	0.2857	0.3333	0.3750	0.4118

Tabla. 4.6

Factores para las primeras tres frecuencias naturales. (Zalka, 2000).

i	1	2	3
l_i	3.5160	22.0345	61.6972
$l_i/2\pi$	0.5596	3.5069	9.8194
$2\pi/l_i$	1.7870	0.2852	0.1018

Tabla. 4.7Factor de reducción r_f . (Zalka, 2000).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_f	0.493	0.653	0.770	0.812	0.842	0.863	0.879	0.892	0.902	0.911	0.918
n	12	13	14	15	16	18	20	25	30	50	>50
r_f	0.924	0.929	0.934	0.938	0.941	0.947	0.952	0.961	0.967	0.980	$\sqrt{n/(n+2.06)}$

Tabla. 4.8
Parámetro de frecuencia η . (Zalka, 2000).

k	η	k	η	k	η	k	η	k	η
0.00	0.5596	4.5	1.465	9.2	2.607	13.9	3.764	18.6	4.930
0.01	0.5596	4.6	1.489	9.3	2.631	14.0	3.789	18.7	4.955
0.05	0.5599	4.7	1.513	9.4	2.656	14.1	3.814	18.8	4.979
0.10	0.5606	4.8	1.537	9.5	2.680	14.2	3.838	18.9	5.004
0.20	0.5638	4.9	1.561	9.6	2.705	14.3	3.863	19.0	5.029
0.30	0.5690	5.0	1.586	9.7	2.729	14.4	3.888	19.1	5.054
0.40	0.5761	5.1	1.610	9.8	2.754	14.5	3.913	19.2	5.079
0.50	0.5851	5.2	1.634	9.9	2.778	14.6	3.937	19.3	5.104
0.60	0.5959	5.3	1.658	10.0	2.803	14.7	3.962	19.4	5.128
0.70	0.6084	5.4	1.682	10.1	2.827	14.8	3.987	19.5	5.153
0.80	0.6223	5.5	1.706	10.2	2.852	14.9	4.012	19.6	5.178
0.90	0.6376	5.6	1.731	10.3	2.876	15.0	4.036	19.7	5.203
1.0	0.6542	5.7	1.755	10.4	2.901	15.1	4.061	19.8	5.228
1.1	0.6718	5.8	1.779	10.5	2.926	15.2	4.086	19.9	5.253
1.2	0.6905	5.9	1.803	10.6	2.950	15.3	4.111	20	5.278
1.3	0.7100	6.0	1.827	10.7	2.975	15.4	4.136	21	5.526
1.4	0.7302	6.1	1.852	10.8	2.999	15.5	4.160	22	5.775
1.5	0.7511	6.2	1.876	10.9	3.024	15.6	4.185	23	6.024
1.6	0.7726	6.3	1.900	11.0	3.049	15.7	4.210	24	6.273
1.7	0.7946	6.4	1.924	11.1	3.073	15.8	4.235	25	6.522
1.8	0.8170	6.5	1.949	11.2	3.098	15.9	4.259	26	6.771
1.9	0.8397	6.6	1.973	11.3	3.122	16.0	4.284	27	7.021
2.0	0.8628	6.7	1.997	11.4	3.147	16.1	4.309	28	7.270
2.1	0.8860	6.8	2.021	11.5	3.172	16.2	4.334	29	7.519
2.2	0.9095	6.9	2.046	11.6	3.196	16.3	4.359	30	7.769
2.3	0.9332	7.0	2.070	11.7	3.221	16.4	4.383	31	8.018
2.4	0.9570	7.1	2.094	11.8	3.246	16.5	4.408	32	8.267
2.5	0.9809	7.2	2.119	11.9	3.270	16.6	4.433	33	8.517
2.6	1.0049	7.3	2.143	12.0	3.295	16.7	4.458	34	8.766
2.7	1.0290	7.4	2.167	12.1	3.320	16.8	4.483	35	9.016
2.8	1.0531	7.5	2.192	12.2	3.344	16.9	4.507	36	9.265
2.9	1.0772	7.6	2.216	12.3	3.369	17.0	4.532	37	9.515
3.0	1.1014	7.7	2.240	12.4	3.394	17.1	4.557	38	9.765
3.1	1.1257	7.8	2.265	12.5	3.418	17.2	4.582	39	10.01
3.2	1.1499	7.9	2.289	12.6	3.443	17.3	4.607	40	10.26
3.3	1.1741	8.0	2.313	12.7	3.468	17.4	4.632	50	12.76
3.4	1.1984	8.1	2.338	12.8	3.492	17.5	4.656	60	15.26
3.5	1.2226	8.2	2.362	12.9	3.517	17.6	4.681	70	17.76
3.6	1.2468	8.3	2.387	13.0	3.542	17.7	4.706	80	20.26
3.7	1.2711	8.4	2.411	13.1	3.566	17.8	4.731	90	22.76
3.8	1.2953	8.5	2.435	13.2	3.591	17.9	4.756	100	25.26
3.9	1.3195	8.6	2.460	13.3	3.616	18.0	4.781	200	50.25
4.0	1.3437	8.7	2.484	13.4	3.641	18.1	4.805	300	75.25
4.1	1.3679	8.8	2.509	13.5	3.665	18.2	4.830	400	100.25
4.2	1.3921	8.9	2.533	13.6	3.690	18.3	4.855	500	125.25
4.3	1.4163	9.0	2.558	13.7	3.715	18.4	4.880	1000	250.25
4.4	1.4405	9.1	2.582	13.8	3.739	18.5	4.905	>1000	k/4

Tabla. 4.9

Segundo parámetro de frecuencia natural η_2 . (Zalka, 2000)

k	η_2	k	η_2	k	η_2	k	η_2	k	η_2
0.00	3.507	4.5	5.290	9.2	8.435	13.9	11.76	18.6	15.15
0.01	3.507	4.6	5.352	9.3	8.504	14.0	11.83	18.7	15.23
0.05	3.507	4.7	5.415	9.4	8.574	14.1	11.90	18.8	15.30
0.10	3.508	4.8	5.478	9.5	8.643	14.2	11.97	18.9	15.37
0.20	3.512	4.9	5.542	9.6	8.713	14.3	12.04	19.0	15.45
0.30	3.517	5.0	5.606	9.7	8.783	14.4	12.11	19.1	15.52
0.40	3.526	5.1	5.670	9.8	8.853	14.5	12.19	19.2	15.59
0.50	3.536	5.2	5.734	9.9	8.922	14.6	12.26	19.3	15.66
0.60	3.549	5.3	5.799	10.0	8.992	14.7	12.33	19.4	15.74
0.70	3.564	5.4	5.864	10.1	9.062	14.8	12.40	19.5	15.81
0.80	3.581	5.5	5.929	10.2	9.132	14.9	12.47	19.6	15.88
0.90	3.600	5.6	5.994	10.3	9.202	15.0	12.55	19.7	15.96
1.0	3.622	5.7	6.060	10.4	9.272	15.1	12.62	19.8	16.03
1.1	3.645	5.8	6.125	10.5	9.342	15.2	12.69	19.9	16.10
1.2	3.671	5.9	6.191	10.6	9.413	15.3	12.76	20	16.18
1.3	3.699	6.0	6.257	10.7	9.483	15.4	12.83	21	16.91
1.4	3.728	6.1	6.323	10.8	9.553	15.5	12.91	22	17.64
1.5	3.760	6.2	6.390	10.9	9.624	15.6	12.98	23	18.38
1.6	3.793	6.3	6.457	11.0	9.694	15.7	13.05	24	19.11
1.7	3.828	6.4	6.523	11.1	9.764	15.8	13.12	25	19.85
1.8	3.865	6.5	6.590	11.2	9.835	15.9	13.19	26	20.59
1.9	3.903	6.6	6.657	11.3	9.905	16.0	13.27	27	21.32
2.0	3.943	6.7	6.724	11.4	9.976	16.1	13.34	28	22.06
2.1	3.985	6.8	6.792	11.5	10.05	16.2	13.41	29	22.80
2.2	4.028	6.9	6.859	11.6	10.12	16.3	13.48	30	23.54
2.3	4.072	7.0	6.926	11.7	10.19	16.4	13.56	31	24.28
2.4	4.118	7.1	6.994	11.8	10.26	16.5	13.63	32	25.03
2.5	4.165	7.2	7.062	11.9	10.33	16.6	13.70	33	25.77
2.6	4.213	7.3	7.130	12.0	10.40	16.7	13.77	34	26.51
2.7	4.262	7.4	7.198	12.1	10.47	16.8	13.85	35	27.25
2.8	4.312	7.5	7.266	12.2	10.54	16.9	13.92	36	28.00
2.9	4.364	7.6	7.334	12.3	10.61	17.0	13.99	37	28.74
3.0	4.416	7.7	7.402	12.4	10.69	17.1	14.06	38	29.48
3.1	4.470	7.8	7.470	12.5	10.76	17.2	14.14	39	30.23
3.2	4.524	7.9	7.539	12.6	10.83	17.3	14.21	40	30.97
3.3	4.579	8.0	7.607	12.7	10.90	17.4	14.28	50	38.43
3.4	4.635	8.1	7.676	12.8	10.97	17.5	14.35	60	45.90
3.5	4.691	8.2	7.744	12.9	11.04	17.6	14.43	70	53.38
3.6	4.749	8.3	7.813	13.0	11.11	17.7	14.50	80	60.86
3.7	4.807	8.4	7.882	13.1	11.18	17.8	14.57	90	68.35
3.8	4.865	8.5	7.951	13.2	11.25	17.9	14.64	100	75.84
3.9	4.924	8.6	8.020	13.3	11.33	18.0	14.72	200	150.80
4.0	4.984	8.7	8.089	13.4	11.40	18.1	14.79	300	225.78
4.1	5.044	8.8	8.158	13.5	11.47	18.2	14.86	400	300.78
4.2	5.105	8.9	8.227	13.6	11.54	18.3	14.94	500	375.77
4.3	5.166	9.0	8.296	13.7	11.61	18.4	15.01	1000	750.76
4.4	5.228	9.1	8.366	13.8	11.68	18.5	15.08	>1000	3k/4

Tabla. 4.10

Tercer parámetro de frecuencia natural η_3 . (Zalka, 2000).

k	η_3	k	η_3	k	η_3	k	η_3	k	η_3
0.00	9.819	4.5	11.65	9.2	15.96	13.9	21.04	18.6	26.42
0.01	9.819	4.6	11.73	9.3	16.06	14.0	21.15	18.7	26.54
0.05	9.820	4.7	11.80	9.4	16.17	14.1	21.27	18.8	26.65
0.10	9.820	4.8	11.88	9.5	16.27	14.2	21.38	18.9	26.77
0.20	9.823	4.9	11.96	9.6	16.37	14.3	21.49	19.0	26.89
0.30	9.828	5.0	12.04	9.7	16.48	14.4	21.60	19.1	27.00
0.40	9.835	5.1	12.12	9.8	16.58	14.5	21.72	19.2	27.12
0.50	9.844	5.2	12.20	9.9	16.69	14.6	21.83	19.3	27.24
0.60	9.855	5.3	12.28	10.0	16.79	14.7	21.94	19.4	27.36
0.70	9.868	5.4	12.36	10.1	16.90	14.8	22.06	19.5	27.47
0.80	9.883	5.5	12.44	10.2	17.00	14.9	22.17	19.6	27.59
0.90	9.900	5.6	12.53	10.3	17.11	15.0	22.28	19.7	27.71
1.0	9.919	5.7	12.61	10.4	17.21	15.1	22.39	19.8	27.82
1.1	9.939	5.8	12.70	10.5	17.32	15.2	22.51	19.9	27.94
1.2	9.962	5.9	12.79	10.6	17.43	15.3	22.62	20	28.06
1.3	9.987	6.0	12.87	10.7	17.53	15.4	22.74	21	29.24
1.4	10.01	6.1	12.96	10.8	17.64	15.5	22.85	22	30.42
1.5	10.04	6.2	13.05	10.9	17.75	15.6	22.96	23	31.60
1.6	10.07	6.3	13.14	11.0	17.85	15.7	23.08	24	32.79
1.7	10.10	6.4	13.23	11.1	17.96	15.8	23.19	25	33.99
1.8	10.14	6.5	13.32	11.2	18.07	15.9	23.31	26	35.19
1.9	10.17	6.6	13.41	11.3	18.18	16.0	23.42	27	36.39
2.0	10.21	6.7	13.50	11.4	18.29	16.1	23.53	28	37.60
2.1	10.25	6.8	13.60	11.5	18.39	16.2	23.65	29	38.80
2.2	10.29	6.9	13.69	11.6	18.50	16.3	23.76	30	40.01
2.3	10.33	7.0	13.78	11.7	18.61	16.4	23.88	31	41.23
2.4	10.38	7.1	13.88	11.8	18.72	16.5	23.99	32	42.44
2.5	10.42	7.2	13.97	11.9	18.83	16.6	24.11	33	43.66
2.6	10.47	7.3	14.07	12.0	18.94	16.7	24.22	34	44.87
2.7	10.52	7.4	14.16	12.1	19.05	16.8	24.34	35	46.09
2.8	10.57	7.5	14.26	12.2	19.16	16.9	24.45	36	47.32
2.9	10.62	7.6	14.36	12.3	19.27	17.0	24.57	37	48.54
3.0	10.68	7.7	14.45	12.4	19.38	17.1	24.68	38	49.76
3.1	10.73	7.8	14.55	12.5	19.49	17.2	24.80	39	50.99
3.2	10.79	7.9	14.65	12.6	19.60	17.3	24.91	40	52.21
3.3	10.85	8.0	14.75	12.7	19.71	17.4	25.03	50	64.53
3.4	10.91	8.1	14.85	12.8	19.82	17.5	25.15	60	76.90
3.5	10.97	8.2	14.95	12.9	19.93	17.6	25.26	70	89.31
3.6	11.03	8.3	15.05	13.0	20.04	17.7	25.38	80	101.74
3.7	11.10	8.4	15.15	13.1	20.15	17.8	25.49	90	114.19
3.8	11.16	8.5	15.25	13.2	20.26	17.9	25.61	100	126.65
3.9	11.23	8.6	15.35	13.3	20.37	18.0	25.72	200	251.45
4.0	11.30	8.7	15.45	13.4	20.48	18.1	25.84	300	376.38
4.1	11.36	8.8	15.55	13.5	20.59	18.2	25.96	400	501.35
4.2	11.44	8.9	15.65	13.6	20.71	18.3	26.07	500	626.33
4.3	11.51	9.0	15.75	13.7	20.82	18.4	26.19	1000	1251.3
4.4	11.58	9.1	15.86	13.8	20.93	18.5	26.30	>1000	5k/4

Tabla 5.1

Factor de fuerza de corte máximo $\eta_{T_{\max}}$. (Zalka, 2000).

k	$\eta_{T_{\max}}$						
	$\mu=0.0$	$\mu=0.2$	$\mu=0.4$	$\mu=0.6$	$\mu=0.8$	$\mu=1.0$	$\mu=2.0$
0.0	1.000	1.100	1.200	1.300	1.400	1.500	2.000
0.2	1.007	1.108	1.209	1.309	1.410	1.511	2.016
0.4	1.025	1.129	1.232	1.336	1.440	1.544	2.062
0.6	1.052	1.159	1.267	1.375	1.483	1.590	2.129
0.8	1.082	1.195	1.307	1.420	1.532	1.644	2.206
1.0	1.114	1.231	1.348	1.465	1.582	1.699	2.285
1.2	1.142	1.264	1.385	1.507	1.629	1.750	2.358
1.4	1.167	1.293	1.418	1.544	1.669	1.794	2.421
1.6	1.188	1.317	1.445	1.574	1.702	1.831	2.474
1.8	1.204	1.335	1.467	1.598	1.729	1.860	2.516
2.0	1.216	1.349	1.482	1.616	1.749	1.882	2.547
2.2	1.225	1.359	1.494	1.628	1.763	1.897	2.570
2.4	1.230	1.365	1.501	1.636	1.772	1.907	2.585
2.6	1.233	1.369	1.505	1.641	1.777	1.913	2.594
2.8	1.233	1.370	1.506	1.642	1.779	1.915	2.597
3.0	1.232	1.369	1.505	1.642	1.778	1.914	2.596
3.5	1.225	1.361	1.496	1.632	1.768	1.903	2.581
4.0	1.213	1.347	1.482	1.616	1.750	1.885	2.556
4.5	1.200	1.333	1.465	1.598	1.730	1.863	2.526
5.0	1.187	1.317	1.448	1.579	1.710	1.840	2.494
6.0	1.162	1.289	1.416	1.544	1.671	1.798	2.435
7.0	1.141	1.265	1.390	1.514	1.638	1.763	2.384
8.0	1.124	1.246	1.368	1.490	1.612	1.733	2.342
9.0	1.111	1.231	1.350	1.470	1.590	1.710	2.308
10	1.100	1.218	1.336	1.454	1.572	1.690	2.280
15	1.067	1.179	1.292	1.404	1.516	1.629	2.191
20	1.050	1.160	1.269	1.379	1.488	1.598	2.145
30	1.033	1.140	1.246	1.353	1.459	1.566	2.098
40	1.025	1.130	1.235	1.340	1.445	1.549	2.074
50	1.020	1.124	1.228	1.332	1.436	1.540	2.059
100	1.010	1.112	1.214	1.316	1.418	1.520	2.030
>100	1.000	1.100	1.200	1.300	1.400	1.500	2.000

Tabla 5.2

Factor de momento flector máximo $\eta_{M_{\max}}$. (Zalka, 2000).

k	$\eta_{M_{\max}}$						
	$\mu=0.0$	$\mu=0.2$	$\mu=0.4$	$\mu=0.6$	$\mu=0.8$	$\mu=1.0$	$\mu=2.0$
0.0	1.000	1.133	1.267	1.400	1.533	1.667	2.333
0.5	1.018	1.154	1.290	1.427	1.563	1.699	2.380
1.0	1.046	1.188	1.329	1.470	1.611	1.752	2.458
1.5	1.053	1.196	1.339	1.482	1.625	1.768	2.484
2.0	1.029	1.170	1.311	1.452	1.593	1.734	2.439
2.2	1.013	1.153	1.292	1.431	1.570	1.710	2.406
2.4	0.995	1.132	1.269	1.406	1.543	1.680	2.365
2.6	0.974	1.108	1.243	1.377	1.512	1.646	2.319
2.8	0.952	1.083	1.215	1.347	1.478	1.610	2.269
3.0	0.928	1.057	1.185	1.314	1.443	1.572	2.216
3.5	0.867	0.988	1.109	1.230	1.351	1.472	2.077
4.0	0.806	0.919	1.032	1.145	1.258	1.371	1.937
4.5	0.748	0.853	0.959	1.064	1.170	1.276	1.804
5.0	0.694	0.793	0.891	0.990	1.088	1.187	1.679
5.5	0.645	0.737	0.829	0.921	1.013	1.106	1.566
6.0	0.601	0.688	0.774	0.860	0.946	1.032	1.463
6.5	0.562	0.643	0.724	0.805	0.886	0.966	1.371
7.0	0.527	0.603	0.679	0.755	0.831	0.907	1.288
8.0	0.467	0.535	0.603	0.671	0.739	0.807	1.146
9.0	0.419	0.480	0.542	0.603	0.664	0.725	1.031
10	0.380	0.435	0.491	0.547	0.602	0.658	0.936
12	0.319	0.366	0.413	0.460	0.507	0.554	0.789
14	0.276	0.316	0.357	0.398	0.438	0.479	0.682
16	0.242	0.278	0.314	0.350	0.386	0.421	0.601
18	0.216	0.248	0.280	0.312	0.344	0.376	0.536
20	0.195	0.224	0.253	0.282	0.311	0.340	0.485
30	0.131	0.151	0.170	0.190	0.209	0.229	0.327
40	0.099	0.113	0.128	0.143	0.158	0.172	0.246
50	0.079	0.091	0.103	0.115	0.127	0.138	0.198
100	0.040	0.046	0.052	0.058	0.064	0.070	0.099
150	0.027	0.031	0.035	0.039	0.043	0.046	0.066
200	0.020	0.023	0.026	0.029	0.032	0.035	0.050
300	0.013	0.015	0.017	0.019	0.021	0.023	0.033
500	0.008	0.009	0.010	0.012	0.013	0.014	0.020
>500	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.3

Ubicación del momento torsional máximo de Saint-Venant $M_{t,\max}$ sobre la altura. (Zalka, 2000).

k	z/H						
	$\mu=0.0$	$\mu=0.2$	$\mu=0.4$	$\mu=0.6$	$\mu=0.8$	$\mu=1.0$	$\mu=2.0$
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
0.10	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
0.20	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
0.30	0.971	0.972	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976
0.40	0.950	0.952	0.953	0.954	0.955	0.956	0.958
0.50	0.925	0.928	0.930	0.931	0.933	0.934	0.936
0.60	0.897	0.901	0.903	0.905	0.907	0.908	0.912
0.70	0.867	0.871	0.875	0.877	0.879	0.881	0.886
0.80	0.835	0.840	0.844	0.848	0.850	0.852	0.858
0.90	0.803	0.809	0.814	0.817	0.820	0.822	0.829
1.0	0.772	0.779	0.784	0.787	0.791	0.793	0.801
1.2	0.712	0.720	0.726	0.730	0.733	0.736	0.745
1.4	0.659	0.667	0.673	0.677	0.681	0.684	0.694
1.6	0.612	0.620	0.626	0.631	0.635	0.638	0.649
1.8	0.572	0.580	0.586	0.591	0.595	0.598	0.609
2.0	0.537	0.545	0.551	0.556	0.560	0.563	0.574
2.5	0.471	0.479	0.484	0.489	0.493	0.496	0.507
3.0	0.426	0.432	0.438	0.442	0.446	0.449	0.459
4.0	0.367	0.373	0.378	0.382	0.385	0.388	0.398
5.0	0.329	0.335	0.340	0.343	0.347	0.350	0.359
6.0	0.301	0.307	0.311	0.315	0.318	0.321	0.331
7.0	0.279	0.284	0.289	0.292	0.296	0.298	0.308
8.0	0.260	0.265	0.270	0.273	0.277	0.279	0.289
9.0	0.244	0.249	0.253	0.257	0.260	0.263	0.272
10	0.230	0.235	0.239	0.243	0.246	0.248	0.257
20	0.150	0.153	0.156	0.158	0.161	0.162	0.170
30	0.113	0.116	0.118	0.120	0.122	0.123	0.129
40	0.092	0.094	0.096	0.097	0.099	0.100	0.105
50	0.078	0.080	0.081	0.083	0.084	0.085	0.089
60	0.068	0.070	0.071	0.072	0.073	0.074	0.077
70	0.061	0.062	0.063	0.064	0.065	0.066	0.069
80	0.055	0.056	0.057	0.058	0.058	0.059	0.062
90	0.050	0.051	0.052	0.053	0.053	0.054	0.057
100	0.046	0.047	0.048	0.048	0.049	0.050	0.052

ANEXO C

Parámetro modo acoplado K Tabla C1 parámetro de modo acoplado K $\tau_x=0,0$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	π_1	
0,	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0	
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1	
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2	
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3	
	0.2,	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.4,	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.6,	1.000	0.925	0.850	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.8,	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9	
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	
1.5	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0	
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1	
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2	
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3	
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4	
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5	
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6	
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7	
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8	
	0.667	0.667	0.667	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9	
	0.667	0.667	0.667	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	
2	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9	
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	

Tabla C1 parámetro de modo acoplado K $\tau_x=0,0$ (continuación).

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
3	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
4	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.207	0.171	0.092	0.9
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
5	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.100	0.0
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.100	0.1
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.198	0.100	0.2
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.196	0.099	0.3
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.193	0.098	0.4
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.189	0.097	0.5
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.185	0.096	0.6
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.181	0.095	0.7
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.176	0.094	0.8
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.171	0.092	0.9
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.167	0.091	1.0
10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.0
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.1
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.2
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.099	0.3
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.098	0.4
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.097	0.5
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.096	0.6
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.095	0.7
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.094	0.8
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.092	0.9
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.091	1.0

Tabla C2 parámetro de modo acoplado K $\tau_x = 0,1$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0,2$	$r_1=0,4$	$r_1=0,6$	$r_1=0,8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	1.000	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	1.000	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.995	0.991	0.983	0.965	0.908	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.988	0.973	0.948	0.904	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.976	0.946	0.902	0.842	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.961	0.914	0.854	0.786	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.943	0.879	0.808	0.736	0.666	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.923	0.844	0.765	0.691	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.901	0.809	0.725	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.878	0.775	0.689	0.616	0.555	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.855	0.744	0.655	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.832	0.714	0.625	0.555	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.993	0.991	0.987	0.980	0.962	0.907	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.993	0.984	0.969	0.945	0.902	0.832	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.993	0.973	0.943	0.900	0.841	0.768	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.993	0.958	0.911	0.853	0.785	0.713	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.993	0.940	0.877	0.807	0.735	0.666	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.993	0.920	0.842	0.764	0.691	0.624	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.993	0.899	0.807	0.724	0.651	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.993	0.876	0.774	0.688	0.616	0.555	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.993	0.853	0.743	0.655	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	0.993	0.831	0.713	0.624	0.555	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.6	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.986	0.983	0.980	0.973	0.956	0.904	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.986	0.977	0.963	0.939	0.898	0.830	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.986	0.966	0.937	0.896	0.838	0.767	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.986	0.952	0.907	0.850	0.783	0.712	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.986	0.934	0.873	0.805	0.734	0.665	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.986	0.915	0.839	0.762	0.690	0.624	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.986	0.894	0.805	0.723	0.650	0.587	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.986	0.872	0.772	0.687	0.615	0.555	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.986	0.850	0.741	0.654	0.583	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	0.986	0.828	0.712	0.624	0.555	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0

Tabla C2 parámetro de modo acoplado K $\tau_x=0,1$ (continuación).

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0.8	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.967	0.965	0.962	0.956	0.942	0.898	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.967	0.959	0.947	0.927	0.890	0.827	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.967	0.950	0.925	0.887	0.833	0.765	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.967	0.937	0.897	0.844	0.780	0.711	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.967	0.922	0.866	0.801	0.732	0.664	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.967	0.904	0.833	0.759	0.688	0.623	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.967	0.885	0.801	0.721	0.649	0.587	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.967	0.865	0.769	0.685	0.614	0.554	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.967	0.844	0.739	0.653	0.583	0.525	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
0.967	0.822	0.710	0.623	0.554	0.499	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	
1	0.909	0.909	0.909	0.909	0.909	0.909	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.909	0.908	0.907	0.904	0.898	0.876	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.909	0.905	0.899	0.889	0.866	0.817	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.909	0.901	0.887	0.863	0.821	0.760	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.909	0.894	0.869	0.829	0.773	0.708	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.909	0.885	0.846	0.791	0.727	0.662	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.909	0.873	0.819	0.753	0.686	0.622	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.909	0.860	0.791	0.717	0.647	0.586	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.909	0.844	0.762	0.683	0.613	0.554	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.909	0.827	0.733	0.651	0.582	0.525	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
0.909	0.809	0.706	0.621	0.553	0.499	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	
1.5	0.654	0.654	0.654	0.654	0.654	0.654	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.654	0.654	0.654	0.654	0.654	0.654	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.654	0.654	0.654	0.654	0.653	0.652	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.654	0.654	0.654	0.653	0.652	0.649	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.654	0.654	0.653	0.652	0.649	0.643	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.654	0.653	0.652	0.650	0.644	0.629	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.654	0.653	0.651	0.646	0.635	0.606	0.402	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.654	0.653	0.649	0.641	0.620	0.577	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.654	0.652	0.647	0.633	0.598	0.548	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.654	0.651	0.643	0.620	0.573	0.521	0.348	0.260	0.206	0.171	0.092	0.9
0.654	0.650	0.638	0.602	0.548	0.496	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	
2	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.495	0.495	0.495	0.495	0.495	0.494	0.441	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.495	0.495	0.495	0.495	0.494	0.494	0.421	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.495	0.495	0.495	0.494	0.494	0.493	0.401	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.495	0.495	0.495	0.494	0.493	0.491	0.382	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.495	0.495	0.494	0.494	0.492	0.489	0.364	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.495	0.495	0.494	0.493	0.491	0.484	0.348	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
0.495	0.495	0.493	0.492	0.488	0.476	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	

Tabla C2 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,1$ (continuación).

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
3	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.330	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.331	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.331	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.331	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.330	0.279	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332	0.331	0.329	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.331	0.331	0.327	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.332	0.332	0.332	0.332	0.331	0.331	0.322	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
4	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.200	0.100	0.0
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.248	0.200	0.100	0.1
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.242	0.196	0.099	0.3
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.237	0.193	0.098	0.4
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.247	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.249	0.244	0.200	0.167	0.091	1.0
5	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.100	0.0
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.100	0.1
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.198	0.100	0.2
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.195	0.099	0.3
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.192	0.098	0.4
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.189	0.097	0.5
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.199	0.185	0.096	0.6
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.199	0.180	0.095	0.7
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.199	0.199	0.176	0.094	0.8
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.199	0.198	0.171	0.092	0.9
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.199	0.196	0.166	0.091	1.0
10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.0
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.1
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.2
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.3
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.099	0.4
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.098	0.5
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.097	0.6
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.096	0.7
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.095	0.8
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.094	0.9
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.092	1.0

Tabla C3 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,2$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.990	0.988	0.984	0.977	0.959	0.905	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.990	0.981	0.966	0.942	0.900	0.831	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.990	0.970	0.940	0.898	0.839	0.767	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.990	0.955	0.909	0.851	0.784	0.713	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.990	0.937	0.875	0.806	0.734	0.665	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.990	0.918	0.840	0.763	0.690	0.624	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.990	0.896	0.806	0.723	0.650	0.587	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.990	0.874	0.773	0.687	0.615	0.555	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.990	0.852	0.742	0.654	0.583	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	0.990	0.829	0.712	0.624	0.555	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.975	0.973	0.969	0.963	0.947	0.899	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.975	0.966	0.953	0.931	0.892	0.826	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.975	0.956	0.929	0.889	0.833	0.764	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.975	0.942	0.899	0.844	0.779	0.710	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.975	0.926	0.867	0.800	0.731	0.663	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.975	0.907	0.833	0.759	0.687	0.622	0.402	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.975	0.887	0.800	0.720	0.648	0.586	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.975	0.866	0.768	0.684	0.614	0.554	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.975	0.844	0.738	0.652	0.582	0.525	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	0.975	0.822	0.709	0.622	0.554	0.499	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.6	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.950	0.950	0.945	0.939	0.927	0.889	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.950	0.942	0.931	0.912	0.878	0.820	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.950	0.933	0.910	0.875	0.824	0.759	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.950	0.921	0.883	0.833	0.773	0.707	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.950	0.907	0.854	0.792	0.726	0.661	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.950	0.890	0.823	0.752	0.684	0.620	0.402	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.950	0.872	0.792	0.715	0.646	0.585	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.950	0.852	0.761	0.681	0.611	0.553	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.950	0.832	0.732	0.649	0.580	0.524	0.348	0.260	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.950	0.812	0.704	0.619	0.552	0.498	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0

Tabla C3 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,2$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0,2$	$r_1=0,4$	$r_1=0,6$	$r_1=0,8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
0.8	0.905	0.905	0.905	0.905	0.905	0.905	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.905	0.904	0.902	0.898	0.890	0.866	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.905	0.900	0.892	0.878	0.853	0.807	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.905	0.893	0.876	0.849	0.808	0.751	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.905	0.884	0.855	0.815	0.762	0.701	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.905	0.873	0.831	0.778	0.718	0.657	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.905	0.860	0.805	0.742	0.678	0.617	0.402	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.905	0.845	0.777	0.707	0.642	0.582	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.905	0.829	0.750	0.675	0.608	0.551	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.905	0.812	0.723	0.644	0.578	0.522	0.348	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.905	0.795	0.696	0.616	0.550	0.497	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
1	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.833	0.833	0.832	0.830	0.827	0.817	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.833	0.831	0.826	0.820	0.807	0.780	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.833	0.827	0.818	0.803	0.777	0.735	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.833	0.822	0.805	0.780	0.742	0.691	0.442	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.833	0.816	0.790	0.753	0.705	0.650	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.833	0.808	0.772	0.724	0.669	0.613	0.401	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.833	0.799	0.751	0.694	0.635	0.579	0.382	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.833	0.788	0.729	0.665	0.603	0.548	0.365	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.833	0.777	0.707	0.637	0.574	0.520	0.348	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.833	0.764	0.684	0.610	0.547	0.495	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
1.5	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.625	0.625	0.625	0.625	0.624	0.624	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.625	0.625	0.624	0.624	0.623	0.621	0.480	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.625	0.624	0.623	0.622	0.620	0.616	0.461	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.625	0.624	0.622	0.619	0.615	0.606	0.441	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.625	0.623	0.620	0.615	0.607	0.593	0.420	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.625	0.622	0.617	0.610	0.597	0.575	0.400	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.625	0.621	0.614	0.603	0.584	0.554	0.381	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.625	0.619	0.610	0.594	0.568	0.531	0.364	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.625	0.618	0.605	0.583	0.549	0.509	0.347	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.625	0.616	0.599	0.570	0.529	0.487	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
2	0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.478	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.467	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.482	0.482	0.482	0.482	0.481	0.481	0.452	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.482	0.482	0.482	0.481	0.480	0.480	0.434	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.482	0.482	0.481	0.480	0.479	0.478	0.415	0.300	0.232	0.190	0.097	0.5
	0.482	0.482	0.481	0.480	0.478	0.476	0.396	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.482	0.481	0.480	0.479	0.476	0.472	0.378	0.279	0.220	0.180	0.095	0.7
	0.482	0.481	0.480	0.477	0.474	0.468	0.361	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.482	0.481	0.479	0.476	0.470	0.461	0.345	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.482	0.480	0.478	0.474	0.466	0.453	0.330	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0

Tabla C3 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,2$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_r	
3	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.250	0.200	0.100	0.0	
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.321	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.315	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.306	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.325	0.297	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.324	0.287	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.326	0.323	0.277	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.326	0.320	0.267	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.326	0.326	0.317	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.326	0.325	0.311	0.248	0.200	0.167	0.091	1.0	
4	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.200	0.100	0.0	
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.246	0.200	0.100	0.1
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.244	0.198	0.100	0.2
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.240	0.196	0.099	0.3
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.246	0.236	0.192	0.098	0.4
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.246	0.230	0.189	0.097	0.5
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.246	0.245	0.224	0.185	0.096	0.6
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.246	0.244	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.246	0.243	0.211	0.176	0.094	0.8
	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.246	0.241	0.205	0.171	0.092	0.9
0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.246	0.245	0.237	0.199	0.166	0.091	1.0	
5	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.100	0.0
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.100	0.1
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.196	0.100	0.2
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.194	0.099	0.3
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.191	0.098	0.4
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.188	0.097	0.5
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.197	0.184	0.096	0.6
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.197	0.179	0.095	0.7
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.196	0.175	0.094	0.8
	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.197	0.194	0.170	0.092	0.9
0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.198	0.197	0.192	0.166	0.091	1.0	
10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.0
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.1
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.099	0.2
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.099	0.3
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.098	0.4
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.097	0.5
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.096	0.6
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.095	0.7
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.093	0.8
	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.092	0.9
0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.091	1.0	

Tabla C4 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,3$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	1.000	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.979	0.976	0.973	0.966	0.950	0.901	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.979	0.970	0.956	0.933	0.893	0.827	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.979	0.959	0.931	0.891	0.834	0.764	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.979	0.945	0.901	0.845	0.780	0.711	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.979	0.928	0.868	0.801	0.731	0.664	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.979	0.909	0.835	0.759	0.688	0.623	0.402	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.979	0.889	0.801	0.720	0.649	0.586	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.979	0.867	0.769	0.685	0.614	0.554	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.979	0.845	0.738	0.652	0.582	0.525	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	0.979	0.823	0.709	0.622	0.554	0.499	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.948	0.948	0.948	0.948	0.948	0.948	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.948	0.946	0.943	0.937	0.925	0.887	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.948	0.940	0.929	0.910	0.876	0.818	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.948	0.931	0.907	0.872	0.822	0.758	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.948	0.919	0.880	0.831	0.771	0.705	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.948	0.904	0.851	0.790	0.724	0.660	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.948	0.887	0.820	0.750	0.682	0.619	0.402	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.948	0.869	0.789	0.713	0.644	0.584	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.948	0.849	0.759	0.679	0.610	0.552	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.948	0.829	0.730	0.647	0.579	0.523	0.348	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.948	0.809	0.702	0.618	0.551	0.497	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.6	0.904	0.904	0.904	0.904	0.904	0.904	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.904	0.902	0.900	0.896	0.887	0.863	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.904	0.898	0.889	0.875	0.849	0.803	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.904	0.891	0.872	0.844	0.803	0.747	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.904	0.881	0.850	0.809	0.757	0.698	0.442	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.904	0.869	0.825	0.773	0.714	0.654	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.904	0.855	0.799	0.737	0.674	0.615	0.401	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.904	0.840	0.772	0.703	0.638	0.580	0.382	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.904	0.824	0.744	0.671	0.605	0.549	0.364	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.904	0.806	0.717	0.640	0.575	0.521	0.348	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.904	0.789	0.692	0.612	0.548	0.495	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0

Tabla C4 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,3$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_V
0.8	0.843	0.843	0.843	0.843	0.843	0.843	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.843	0.842	0.841	0.838	0.833	0.821	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.843	0.839	0.833	0.824	0.808	0.777	0.481	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.843	0.834	0.822	0.803	0.774	0.730	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.843	0.828	0.807	0.777	0.736	0.686	0.442	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.843	0.820	0.788	0.748	0.699	0.645	0.421	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.843	0.810	0.768	0.718	0.663	0.608	0.401	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.843	0.799	0.746	0.688	0.630	0.575	0.382	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.843	0.786	0.723	0.659	0.599	0.545	0.364	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.843	0.773	0.700	0.631	0.570	0.518	0.347	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
0.843	0.759	0.677	0.605	0.544	0.493	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	
1	0.769	0.769	0.769	0.769	0.769	0.769	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.769	0.769	0.767	0.767	0.765	0.760	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.769	0.767	0.764	0.759	0.751	0.735	0.481	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.769	0.764	0.758	0.747	0.730	0.702	0.462	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.769	0.761	0.748	0.731	0.704	0.667	0.441	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.769	0.756	0.737	0.711	0.675	0.632	0.420	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.769	0.750	0.724	0.689	0.646	0.599	0.400	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.769	0.743	0.708	0.665	0.617	0.568	0.381	0.280	0.220	0.180	0.095	0.7
	0.769	0.735	0.691	0.641	0.589	0.539	0.363	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.769	0.726	0.674	0.617	0.562	0.513	0.347	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
0.769	0.717	0.655	0.594	0.538	0.489	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0	
1.5	0.590	0.590	0.590	0.590	0.590	0.590	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.590	0.590	0.590	0.590	0.590	0.589	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.590	0.590	0.589	0.589	0.587	0.586	0.478	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.590	0.589	0.588	0.586	0.584	0.580	0.458	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.590	0.589	0.586	0.583	0.579	0.571	0.437	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.590	0.588	0.584	0.579	0.571	0.560	0.417	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.590	0.586	0.581	0.574	0.562	0.545	0.397	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.590	0.585	0.578	0.567	0.551	0.528	0.378	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.590	0.583	0.573	0.559	0.538	0.510	0.361	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.590	0.581	0.568	0.549	0.523	0.491	0.345	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
0.590	0.579	0.563	0.539	0.508	0.473	0.330	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0	
2	0.464	0.464	0.464	0.464	0.464	0.464	0.464	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.464	0.464	0.464	0.464	0.464	0.464	0.461	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.464	0.464	0.464	0.464	0.463	0.463	0.452	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.464	0.464	0.463	0.463	0.463	0.462	0.438	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.464	0.464	0.463	0.462	0.461	0.460	0.423	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.464	0.463	0.462	0.461	0.460	0.458	0.406	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.464	0.463	0.462	0.460	0.458	0.455	0.389	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.464	0.463	0.461	0.459	0.455	0.451	0.372	0.278	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.464	0.462	0.460	0.457	0.453	0.445	0.356	0.268	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.464	0.462	0.459	0.454	0.448	0.439	0.341	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
0.464	0.461	0.457	0.452	0.443	0.431	0.327	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0	

Tabla C4 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,3$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
3	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.319	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.319	0.315	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.319	0.309	0.242	0.196	0.099	0.3
	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320	0.319	0.318	0.301	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.320	0.320	0.320	0.320	0.319	0.319	0.317	0.292	0.231	0.189	0.097	0.5
	0.320	0.320	0.320	0.319	0.319	0.319	0.315	0.283	0.225	0.185	0.096	0.6
	0.320	0.320	0.319	0.319	0.319	0.318	0.313	0.274	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.320	0.320	0.319	0.319	0.318	0.318	0.310	0.264	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.320	0.320	0.319	0.319	0.318	0.317	0.306	0.255	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.320	0.319	0.319	0.318	0.318	0.317	0.301	0.246	0.199	0.166	0.091	1.0
4	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.200	0.100	0.0
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.200	0.100	0.1
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.240	0.198	0.100	0.2
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.237	0.195	0.099	0.3
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.232	0.192	0.098	0.4
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.241	0.227	0.188	0.097	0.5
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.240	0.222	0.184	0.096	0.6
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.239	0.216	0.180	0.095	0.7
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.237	0.210	0.175	0.094	0.8
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.241	0.234	0.203	0.171	0.092	0.9
	0.243	0.243	0.243	0.243	0.242	0.242	0.240	0.231	0.197	0.166	0.091	1.0
5	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.100	0.0
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.100	0.1
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.194	0.100	0.2
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.192	0.099	0.3
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.189	0.098	0.4
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.195	0.186	0.097	0.5
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.194	0.182	0.096	0.6
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.195	0.193	0.178	0.095	0.7
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.195	0.192	0.173	0.094	0.8
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.194	0.190	0.169	0.092	0.9
	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.196	0.195	0.194	0.187	0.165	0.091	1.0
10	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.0
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.1
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.2
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.098	0.3
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.097	0.4
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.097	0.5
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.096	0.6
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.094	0.7
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.093	0.8
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.092	0.9
	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.090	1.0

Tabla C5 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,4$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.963	0.961	0.958	0.952	0.937	0.894	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.963	0.955	0.942	0.921	0.884	0.822	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.963	0.945	0.919	0.881	0.828	0.761	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.963	0.932	0.890	0.838	0.775	0.708	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.963	0.916	0.859	0.795	0.727	0.661	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.963	0.898	0.827	0.754	0.684	0.621	0.402	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.963	0.878	0.795	0.716	0.646	0.585	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.963	0.858	0.763	0.681	0.612	0.553	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.963	0.837	0.733	0.649	0.580	0.524	0.348	0.260	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.963	0.816	0.705	0.620	0.552	0.498	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.915	0.915	0.915	0.915	0.915	0.915	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.915	0.914	0.911	0.907	0.897	0.869	0.495	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.915	0.909	0.899	0.883	0.855	0.805	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.915	0.901	0.880	0.850	0.807	0.748	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.915	0.890	0.857	0.813	0.759	0.698	0.442	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.915	0.877	0.831	0.776	0.715	0.654	0.421	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.915	0.863	0.803	0.739	0.675	0.615	0.401	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.915	0.846	0.774	0.704	0.638	0.580	0.382	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.915	0.829	0.746	0.671	0.605	0.549	0.364	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.915	0.811	0.719	0.641	0.575	0.521	0.348	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.915	0.792	0.692	0.612	0.548	0.495	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.6	0.856	0.856	0.856	0.856	0.856	0.856	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.856	0.854	0.853	0.850	0.844	0.829	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.856	0.851	0.844	0.833	0.815	0.780	0.481	0.327	0.248	0.198	0.100	0.2
	0.856	0.845	0.831	0.809	0.777	0.731	0.462	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.856	0.838	0.813	0.780	0.737	0.685	0.442	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.856	0.828	0.793	0.749	0.698	0.644	0.421	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.856	0.817	0.771	0.718	0.662	0.607	0.400	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.856	0.804	0.747	0.687	0.628	0.574	0.381	0.280	0.220	0.180	0.095	0.7
	0.856	0.791	0.723	0.657	0.597	0.544	0.364	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.856	0.776	0.699	0.630	0.569	0.516	0.347	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.856	0.761	0.676	0.603	0.542	0.492	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0

Tabla C5 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,4$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_Y
0.8	0.787	0.787	0.787	0.787	0.787	0.787	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.787	0.786	0.785	0.783	0.780	0.773	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.787	0.784	0.779	0.773	0.762	0.742	0.480	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.787	0.780	0.771	0.757	0.736	0.704	0.461	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.787	0.775	0.759	0.737	0.706	0.666	0.440	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.787	0.769	0.745	0.714	0.675	0.630	0.420	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.787	0.761	0.729	0.689	0.644	0.596	0.399	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.787	0.753	0.711	0.664	0.614	0.565	0.380	0.279	0.220	0.180	0.095	0.7
	0.787	0.743	0.693	0.639	0.586	0.537	0.363	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.787	0.732	0.673	0.614	0.560	0.511	0.344	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.787	0.721	0.654	0.591	0.535	0.487	0.331	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0
1	0.714	0.714	0.714	0.714	0.714	0.714	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.714	0.714	0.713	0.712	0.711	0.708	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.714	0.713	0.710	0.707	0.701	0.691	0.480	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.714	0.711	0.705	0.698	0.686	0.667	0.460	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.714	0.708	0.698	0.685	0.666	0.639	0.439	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.714	0.704	0.690	0.670	0.644	0.610	0.418	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.714	0.699	0.679	0.653	0.620	0.581	0.398	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.714	0.694	0.667	0.634	0.595	0.554	0.379	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.714	0.688	0.654	0.614	0.571	0.528	0.362	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.714	0.681	0.640	0.594	0.548	0.504	0.345	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.714	0.673	0.625	0.574	0.526	0.482	0.330	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0
1.5	0.556	0.556	0.556	0.556	0.556	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.556	0.556	0.555	0.555	0.555	0.555	0.492	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.556	0.555	0.555	0.554	0.553	0.551	0.474	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.556	0.555	0.553	0.552	0.549	0.546	0.453	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.556	0.554	0.552	0.549	0.545	0.538	0.432	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.556	0.553	0.549	0.545	0.538	0.529	0.412	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.556	0.552	0.547	0.540	0.530	0.517	0.393	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.556	0.550	0.543	0.534	0.521	0.503	0.375	0.278	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.556	0.549	0.539	0.527	0.510	0.488	0.358	0.268	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.556	0.547	0.535	0.519	0.498	0.473	0.342	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.556	0.545	0.530	0.510	0.485	0.457	0.328	0.249	0.199	0.166	0.091	1.0
2	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.444	0.443	0.443	0.443	0.443	0.443	0.441	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.444	0.443	0.443	0.443	0.443	0.442	0.434	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.444	0.443	0.443	0.442	0.442	0.441	0.423	0.318	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.444	0.443	0.442	0.442	0.440	0.439	0.409	0.309	0.238	0.192	0.098	0.4
	0.444	0.443	0.442	0.440	0.439	0.436	0.395	0.298	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.444	0.442	0.441	0.439	0.436	0.433	0.379	0.288	0.225	0.184	0.096	0.6
	0.444	0.442	0.440	0.437	0.434	0.429	0.364	0.277	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.444	0.441	0.439	0.435	0.430	0.424	0.350	0.267	0.212	0.175	0.094	0.8
	0.444	0.441	0.437	0.433	0.426	0.418	0.336	0.260	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.444	0.440	0.436	0.430	0.422	0.411	0.322	0.248	0.199	0.166	0.091	1.0

Tabla C5 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,4$ (continuación).

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T	
3	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.250	0.200	0.100	0.0	
	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.310	0.249	0.200	0.100	0.1	
	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.310	0.306	0.246	0.198	0.100	0.2	
	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311	0.310	0.301	0.242	0.196	0.099	0.3	
	0.311	0.311	0.311	0.311	0.310	0.310	0.310	0.309	0.237	0.192	0.098	0.4	
	0.311	0.311	0.311	0.310	0.310	0.310	0.310	0.307	0.286	0.231	0.189	0.097	0.5
	0.311	0.311	0.310	0.310	0.310	0.310	0.309	0.305	0.278	0.224	0.184	0.096	0.6
	0.311	0.311	0.310	0.310	0.309	0.309	0.309	0.302	0.269	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.311	0.311	0.310	0.310	0.309	0.308	0.308	0.299	0.260	0.211	0.175	0.094	0.8
	0.311	0.310	0.310	0.309	0.308	0.307	0.307	0.295	0.251	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.311	0.310	0.310	0.309	0.308	0.306	0.306	0.290	0.243	0.198	0.166	0.091	1.0
4	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.200	0.100	0.0	
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.237	0.199	0.100	0.1	
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.236	0.198	0.100	0.2	
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.237	0.232	0.195	0.099	0.3	
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.237	0.228	0.192	0.098	0.4	
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.237	0.236	0.224	0.188	0.097	0.5
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.237	0.234	0.218	0.184	0.096	0.6
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.236	0.233	0.213	0.179	0.095	0.7
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.237	0.236	0.231	0.207	0.174	0.094	0.8
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.238	0.237	0.237	0.235	0.228	0.201	0.170	0.092	0.9
	0.238	0.238	0.238	0.238	0.237	0.237	0.237	0.234	0.224	0.195	0.165	0.091	1.0
5	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.100	0.0	
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.100	0.1	
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.191	0.100	0.2	
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.192	0.189	0.099	0.3	
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.192	0.186	0.098	0.4	
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.192	0.191	0.183	0.097	0.5
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.192	0.190	0.180	0.096	0.6
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.191	0.189	0.176	0.095	0.7
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.192	0.191	0.188	0.172	0.172	0.094	0.8
	0.193	0.193	0.193	0.193	0.192	0.192	0.192	0.190	0.186	0.167	0.167	0.092	0.9
	0.193	0.193	0.193	0.192	0.192	0.192	0.192	0.190	0.183	0.163	0.163	0.091	1.0
10	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.0	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.1	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.2	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.3	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.4	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.5	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.6	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.7	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.8	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.9	
	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	1.0	

Tabla C6 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,5$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.945	0.945	0.945	0.945	0.945	0.945	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.945	0.943	0.940	0.934	0.932	0.885	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.945	0.937	0.926	0.907	0.873	0.816	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.945	0.928	0.904	0.869	0.820	0.756	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.945	0.916	0.877	0.828	0.769	0.704	0.443	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.945	0.901	0.848	0.787	0.722	0.658	0.422	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.945	0.884	0.817	0.748	0.681	0.618	0.402	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.945	0.866	0.786	0.711	0.643	0.583	0.382	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.945	0.847	0.756	0.677	0.609	0.551	0.365	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.945	0.827	0.727	0.646	0.578	0.522	0.348	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.945	0.806	0.700	0.617	0.550	0.497	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.880	0.879	0.877	0.873	0.866	0.846	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.880	0.875	0.867	0.854	0.831	0.790	0.481	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.880	0.868	0.851	0.825	0.788	0.737	0.462	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.880	0.859	0.831	0.793	0.745	0.690	0.442	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.880	0.848	0.807	0.759	0.704	0.647	0.421	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.880	0.835	0.783	0.725	0.666	0.609	0.401	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.880	0.821	0.757	0.693	0.631	0.575	0.381	0.280	0.220	0.180	0.095	0.7
	0.880	0.805	0.731	0.662	0.599	0.545	0.364	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.880	0.789	0.706	0.633	0.570	0.517	0.347	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.880	0.773	0.681	0.606	0.544	0.492	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.6	0.809	0.809	0.809	0.809	0.809	0.809	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.809	0.808	0.807	0.805	0.801	0.791	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.809	0.806	0.800	0.792	0.778	0.753	0.480	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.809	0.801	0.790	0.773	0.748	0.711	0.461	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.809	0.795	0.776	0.749	0.714	0.670	0.440	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.809	0.787	0.759	0.723	0.680	0.632	0.419	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.809	0.778	0.740	0.696	0.647	0.597	0.399	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.809	0.768	0.720	0.687	0.616	0.566	0.380	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.809	0.757	0.700	0.642	0.587	0.537	0.363	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.809	0.744	0.679	0.616	0.560	0.511	0.346	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.809	0.732	0.658	0.592	0.535	0.487	0.331	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0

Tabla C6 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,5$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0.8	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.736	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.736	0.736	0.735	0.734	0.732	0.727	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.736	0.734	0.731	0.726	0.718	0.705	0.479	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.736	0.731	0.724	0.714	0.699	0.675	0.460	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.736	0.727	0.715	0.698	0.675	0.644	0.439	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.736	0.722	0.704	0.680	0.649	0.612	0.418	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.736	0.716	0.691	0.660	0.623	0.582	0.398	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.736	0.710	0.677	0.639	0.597	0.554	0.379	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.736	0.702	0.662	0.617	0.572	0.527	0.361	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.736	0.694	0.646	0.596	0.548	0.503	0.345	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.736	0.684	0.629	0.575	0.525	0.481	0.330	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0
1	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.667	0.666	0.666	0.665	0.664	0.662	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.667	0.665	0.663	0.661	0.657	0.650	0.478	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.667	0.664	0.660	0.654	0.645	0.632	0.458	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.667	0.661	0.654	0.644	0.630	0.610	0.436	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.667	0.658	0.647	0.632	0.612	0.586	0.416	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.667	0.655	0.639	0.618	0.593	0.562	0.396	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.667	0.650	0.629	0.603	0.572	0.538	0.377	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.667	0.645	0.619	0.587	0.552	0.515	0.360	0.268	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.667	0.640	0.607	0.570	0.531	0.493	0.344	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.667	0.634	0.595	0.553	0.512	0.472	0.329	0.249	0.200	0.166	0.091	1.0
1.5	0.523	0.523	0.523	0.523	0.523	0.523	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.523	0.523	0.523	0.523	0.523	0.522	0.487	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.523	0.523	0.522	0.522	0.521	0.519	0.467	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.523	0.522	0.521	0.520	0.518	0.515	0.446	0.318	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.523	0.522	0.520	0.517	0.513	0.508	0.425	0.309	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.523	0.521	0.518	0.513	0.508	0.500	0.406	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.523	0.520	0.515	0.509	0.501	0.490	0.387	0.288	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.523	0.518	0.512	0.504	0.493	0.479	0.370	0.277	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.523	0.517	0.508	0.498	0.484	0.467	0.354	0.267	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.523	0.515	0.505	0.491	0.474	0.454	0.338	0.257	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.523	0.513	0.500	0.484	0.463	0.440	0.324	0.248	0.199	0.166	0.091	1.0
2	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.422	0.421	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.423	0.423	0.422	0.422	0.422	0.422	0.415	0.325	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.423	0.422	0.422	0.422	0.421	0.420	0.406	0.317	0.242	0.196	0.099	0.3
	0.423	0.422	0.421	0.421	0.420	0.418	0.395	0.307	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.423	0.422	0.421	0.419	0.418	0.416	0.382	0.296	0.231	0.189	0.097	0.5
	0.423	0.421	0.420	0.418	0.415	0.412	0.369	0.286	0.225	0.185	0.096	0.6
	0.423	0.421	0.419	0.416	0.413	0.408	0.355	0.275	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.423	0.420	0.418	0.414	0.410	0.404	0.342	0.265	0.212	0.175	0.094	0.8
	0.423	0.420	0.416	0.412	0.406	0.398	0.329	0.255	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.423	0.419	0.415	0.409	0.401	0.392	0.317	0.246	0.199	0.166	0.091	1.0

Tabla C6 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,5$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
3	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.300	0.250	0.200	0.100	0.1
	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.300	0.297	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.299	0.292	0.241	0.195	0.099	0.3
	0.301	0.301	0.301	0.301	0.300	0.300	0.298	0.286	0.236	0.192	0.098	0.4
	0.301	0.301	0.301	0.300	0.300	0.300	0.296	0.279	0.230	0.188	0.097	0.5
	0.301	0.301	0.300	0.300	0.300	0.299	0.294	0.272	0.223	0.184	0.096	0.6
	0.301	0.301	0.300	0.300	0.299	0.299	0.292	0.264	0.216	0.180	0.095	0.7
	0.301	0.301	0.300	0.299	0.299	0.298	0.288	0.255	0.210	0.175	0.094	0.8
	0.301	0.300	0.300	0.299	0.298	0.297	0.284	0.247	0.203	0.170	0.092	0.9
	0.301	0.300	0.299	0.298	0.297	0.296	0.280	0.239	0.197	0.166	0.091	1.0
4	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.200	0.100	0.0
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.199	0.100	0.1
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.230	0.198	0.100	0.2
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.231	0.227	0.195	0.099	0.3
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.231	0.224	0.191	0.098	0.4
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.231	0.230	0.219	0.187	0.097	0.5
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.231	0.228	0.214	0.183	0.096	0.6
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.230	0.226	0.209	0.178	0.095	0.7
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.230	0.224	0.204	0.174	0.094	0.8
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.232	0.231	0.229	0.221	0.198	0.169	0.092	0.9
	0.232	0.232	0.232	0.232	0.231	0.231	0.228	0.218	0.193	0.164	0.091	1.0
5	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.100	0.0
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.100	0.1
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.100	0.2
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.186	0.099	0.3
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.183	0.098	0.4
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.187	0.180	0.097	0.5
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.186	0.177	0.096	0.6
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.188	0.185	0.173	0.095	0.7
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.187	0.183	0.169	0.094	0.8
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.186	0.181	0.165	0.092	0.9
	0.189	0.189	0.189	0.189	0.189	0.188	0.188	0.185	0.179	0.161	0.091	1.0
10	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.0
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.1
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.2
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.3
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.096	0.4
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.095	0.5
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.094	0.6
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.093	0.7
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.092	0.8
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.091	0.9
	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.089	1.0

Tabla C7 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,6$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.925	0.925	0.925	0.925	0.925	0.925	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.925	0.923	0.920	0.915	0.904	0.873	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.925	0.918	0.907	0.890	0.860	0.808	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.925	0.909	0.887	0.855	0.810	0.750	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.925	0.898	0.863	0.817	0.761	0.699	0.442	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.925	0.884	0.835	0.778	0.716	0.655	0.421	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.925	0.869	0.806	0.741	0.676	0.615	0.401	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.925	0.852	0.777	0.705	0.639	0.580	0.382	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.925	0.833	0.748	0.672	0.606	0.549	0.364	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.925	0.815	0.720	0.641	0.575	0.521	0.348	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.925	0.795	0.694	0.613	0.548	0.495	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.845	0.845	0.845	0.845	0.845	0.845	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.845	0.844	0.842	0.839	0.833	0.819	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.845	0.840	0.833	0.823	0.805	0.772	0.481	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.845	0.835	0.820	0.799	0.768	0.724	0.462	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.845	0.827	0.803	0.771	0.729	0.679	0.441	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.845	0.817	0.783	0.740	0.691	0.639	0.420	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.845	0.806	0.761	0.710	0.656	0.603	0.400	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.845	0.794	0.738	0.680	0.623	0.570	0.381	0.279	0.220	0.180	0.095	0.7
	0.845	0.780	0.714	0.651	0.592	0.540	0.363	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.845	0.766	0.691	0.624	0.564	0.513	0.347	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.845	0.751	0.668	0.598	0.539	0.489	0.331	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0
0.6	0.766	0.766	0.766	0.766	0.766	0.766	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.766	0.765	0.764	0.762	0.759	0.753	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.766	0.763	0.759	0.752	0.742	0.724	0.480	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.766	0.759	0.750	0.737	0.718	0.689	0.460	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.766	0.754	0.739	0.718	0.689	0.653	0.439	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.766	0.748	0.725	0.696	0.660	0.618	0.418	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.766	0.741	0.710	0.673	0.631	0.586	0.398	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.766	0.732	0.693	0.649	0.603	0.557	0.379	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.766	0.723	0.675	0.625	0.576	0.530	0.361	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.766	0.713	0.657	0.602	0.551	0.505	0.345	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.766	0.702	0.638	0.580	0.527	0.482	0.330	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0

Tabla C7 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,6$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0.8	0.692	0.692	0.692	0.692	0.692	0.692	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.692	0.691	0.691	0.690	0.688	0.686	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.692	0.690	0.687	0.684	0.678	0.669	0.478	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.692	0.688	0.682	0.674	0.663	0.646	0.458	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.692	0.684	0.675	0.662	0.644	0.620	0.436	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.692	0.681	0.666	0.647	0.623	0.593	0.415	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.692	0.676	0.656	0.631	0.600	0.566	0.396	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.692	0.670	0.644	0.613	0.578	0.540	0.377	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.692	0.664	0.631	0.595	0.556	0.516	0.359	0.268	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.692	0.657	0.618	0.576	0.534	0.494	0.343	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.692	0.650	0.604	0.558	0.513	0.473	0.329	0.249	0.200	0.166	0.091	1.0
1	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.625	0.625	0.624	0.624	0.623	0.622	0.493	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.625	0.624	0.622	0.620	0.617	0.613	0.476	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.625	0.623	0.619	0.615	0.608	0.599	0.455	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.625	0.621	0.615	0.607	0.596	0.581	0.433	0.309	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.625	0.618	0.609	0.597	0.582	0.562	0.412	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.625	0.615	0.603	0.586	0.566	0.541	0.393	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.625	0.612	0.595	0.574	0.549	0.520	0.374	0.278	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.625	0.608	0.586	0.561	0.531	0.500	0.357	0.268	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.625	0.603	0.577	0.547	0.514	0.480	0.341	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.625	0.598	0.567	0.532	0.497	0.462	0.327	0.248	0.200	0.166	0.091	1.0
1.5	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.494	0.493	0.493	0.493	0.493	0.493	0.476	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.494	0.493	0.493	0.493	0.491	0.490	0.456	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.494	0.493	0.492	0.490	0.489	0.486	0.436	0.318	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.494	0.492	0.490	0.488	0.485	0.481	0.417	0.308	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.494	0.491	0.488	0.485	0.480	0.474	0.398	0.297	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.494	0.490	0.486	0.481	0.474	0.466	0.381	0.287	0.225	0.185	0.096	0.6
	0.494	0.489	0.484	0.477	0.468	0.456	0.364	0.276	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.494	0.488	0.481	0.471	0.460	0.446	0.349	0.266	0.212	0.175	0.094	0.8
	0.494	0.486	0.477	0.466	0.452	0.435	0.334	0.256	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.494	0.484	0.473	0.459	0.443	0.424	0.321	0.247	0.199	0.166	0.091	1.0
2	0.402	0.402	0.402	0.402	0.402	0.402	0.402	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.402	0.402	0.402	0.402	0.402	0.402	0.401	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.402	0.402	0.402	0.402	0.402	0.401	0.396	0.324	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.402	0.402	0.402	0.401	0.401	0.400	0.389	0.315	0.242	0.196	0.099	0.3
	0.402	0.402	0.401	0.400	0.399	0.398	0.379	0.305	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.402	0.402	0.401	0.399	0.398	0.396	0.369	0.294	0.231	0.189	0.097	0.5
	0.402	0.401	0.400	0.398	0.396	0.393	0.357	0.284	0.224	0.184	0.096	0.6
	0.402	0.401	0.399	0.396	0.393	0.389	0.345	0.273	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.402	0.400	0.397	0.394	0.390	0.385	0.333	0.263	0.211	0.175	0.094	0.8
	0.402	0.400	0.396	0.392	0.386	0.380	0.322	0.254	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.402	0.399	0.395	0.389	0.383	0.374	0.310	0.244	0.198	0.166	0.091	1.0

Tabla C7 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,6$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
3	0.291	0.291	0.291	0.291	0.291	0.291	0.291	0.291	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.291	0.291	0.291	0.291	0.291	0.291	0.290	0.290	0.249	0.199	0.100	0.1
	0.291	0.291	0.290	0.290	0.290	0.290	0.290	0.287	0.245	0.198	0.100	0.2
	0.291	0.290	0.290	0.290	0.290	0.290	0.289	0.283	0.240	0.195	0.099	0.3
	0.291	0.290	0.290	0.290	0.290	0.290	0.288	0.278	0.234	0.192	0.098	0.4
	0.291	0.290	0.290	0.290	0.290	0.289	0.286	0.272	0.228	0.188	0.097	0.5
	0.291	0.290	0.290	0.290	0.289	0.289	0.284	0.265	0.222	0.184	0.096	0.6
	0.291	0.290	0.290	0.289	0.289	0.288	0.281	0.258	0.215	0.179	0.095	0.7
	0.291	0.290	0.289	0.289	0.288	0.287	0.278	0.250	0.208	0.174	0.094	0.8
	0.291	0.290	0.289	0.288	0.287	0.286	0.274	0.243	0.202	0.170	0.092	0.9
	0.291	0.290	0.289	0.288	0.286	0.285	0.270	0.235	0.196	0.165	0.091	1.0
4	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.200	0.100	0.0
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.199	0.100	0.1
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.224	0.197	0.100	0.2
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.225	0.222	0.194	0.099	0.3
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.225	0.224	0.218	0.190	0.098	0.4
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.225	0.223	0.214	0.186	0.097	0.5
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.224	0.222	0.210	0.182	0.096	0.6
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.226	0.225	0.224	0.220	0.205	0.177	0.095	0.7
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.225	0.225	0.223	0.217	0.200	0.172	0.094	0.8
	0.226	0.226	0.226	0.226	0.225	0.225	0.222	0.215	0.195	0.168	0.092	0.9
	0.226	0.226	0.226	0.225	0.225	0.225	0.221	0.212	0.190	0.163	0.091	1.0
5	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.100	0.0
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.100	0.1
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.100	0.2
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.182	0.099	0.3
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.184	0.180	0.098	0.4
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.183	0.177	0.097	0.5
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.184	0.182	0.174	0.096	0.6
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.183	0.180	0.170	0.095	0.7
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.182	0.179	0.167	0.094	0.8
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.183	0.182	0.177	0.163	0.092	0.9
	0.185	0.185	0.185	0.185	0.184	0.184	0.183	0.181	0.174	0.159	0.091	1.0
10	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.0
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.1
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.2
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.3
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.095	0.4
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.094	0.5
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.093	0.6
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.092	0.7
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.091	0.8
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.090	0.9
	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.088	1.0

Tabla C8 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,7$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.903	0.901	0.899	0.894	0.885	0.860	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.903	0.896	0.887	0.872	0.845	0.799	0.481	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.903	0.889	0.869	0.840	0.799	0.743	0.463	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.903	0.878	0.846	0.804	0.753	0.694	0.442	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.903	0.866	0.821	0.768	0.710	0.650	0.421	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.903	0.852	0.794	0.732	0.670	0.612	0.401	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.903	0.836	0.766	0.698	0.634	0.577	0.382	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	0.903	0.819	0.739	0.666	0.602	0.546	0.364	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.903	0.801	0.712	0.636	0.572	0.519	0.347	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.903	0.783	0.687	0.609	0.545	0.493	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.810	0.810	0.810	0.810	0.810	0.810	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.810	0.809	0.807	0.805	0.801	0.791	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.810	0.806	0.800	0.792	0.777	0.751	0.480	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.810	0.801	0.789	0.772	0.746	0.708	0.461	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.810	0.795	0.774	0.747	0.711	0.667	0.440	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.810	0.786	0.757	0.720	0.677	0.629	0.419	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.810	0.777	0.738	0.693	0.644	0.595	0.399	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.810	0.766	0.717	0.665	0.613	0.563	0.380	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.810	0.754	0.696	0.639	0.584	0.535	0.362	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.810	0.742	0.675	0.613	0.558	0.509	0.346	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.810	0.729	0.654	0.589	0.533	0.485	0.331	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0
0.6	0.726	0.726	0.726	0.726	0.726	0.726	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.726	0.725	0.724	0.723	0.791	0.717	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.726	0.723	0.720	0.715	0.707	0.694	0.479	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.726	0.720	0.713	0.703	0.688	0.665	0.459	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.726	0.716	0.704	0.687	0.664	0.634	0.437	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.726	0.711	0.693	0.669	0.639	0.603	0.416	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.726	0.705	0.680	0.649	0.613	0.574	0.396	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.726	0.698	0.665	0.628	0.588	0.547	0.377	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.726	0.690	0.650	0.607	0.563	0.521	0.360	0.268	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.726	0.682	0.634	0.586	0.540	0.497	0.344	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.726	0.673	0.618	0.566	0.518	0.476	0.329	0.249	0.200	0.166	0.091	1.0

Tabla C8 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,7$ (continuación).

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
0.8	0.652	0.652	0.652	0.652	0.652	0.652	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.652	0.652	0.651	0.650	0.649	0.647	0.493	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.652	0.650	0.648	0.646	0.642	0.635	0.476	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.652	0.649	0.644	0.638	0.630	0.617	0.455	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.652	0.646	0.638	0.628	0.614	0.595	0.434	0.309	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.652	0.643	0.631	0.616	0.597	0.572	0.413	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.652	0.639	0.623	0.603	0.578	0.549	0.393	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.652	0.634	0.613	0.588	0.558	0.526	0.374	0.278	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.652	0.629	0.603	0.572	0.539	0.504	0.357	0.268	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.652	0.624	0.591	0.556	0.520	0.484	0.342	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
0.652	0.618	0.580	0.540	0.501	0.464	0.327	0.248	0.199	0.166	0.091	1.0	
1	0.588	0.588	0.588	0.588	0.588	0.588	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.588	0.588	0.588	0.587	0.587	0.586	0.491	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.588	0.587	0.586	0.585	0.582	0.579	0.472	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.588	0.586	0.584	0.580	0.575	0.568	0.451	0.318	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.588	0.585	0.580	0.574	0.565	0.554	0.429	0.309	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.588	0.583	0.575	0.566	0.554	0.538	0.408	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.588	0.580	0.570	0.557	0.540	0.520	0.389	0.288	0.225	0.185	0.096	0.6
	0.588	0.577	0.563	0.547	0.526	0.503	0.371	0.277	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.588	0.574	0.556	0.535	0.511	0.485	0.354	0.267	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.588	0.570	0.549	0.524	0.496	0.467	0.339	0.257	0.206	0.171	0.092	0.9
0.588	0.566	0.540	0.511	0.481	0.450	0.324	0.247	0.199	0.166	0.091	1.0	
1.5	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.467	0.467	0.466	0.466	0.466	0.466	0.458	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.467	0.466	0.466	0.465	0.465	0.464	0.442	0.325	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.467	0.466	0.465	0.464	0.462	0.461	0.424	0.317	0.242	0.196	0.099	0.3
	0.467	0.465	0.464	0.462	0.459	0.456	0.406	0.307	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.467	0.465	0.462	0.459	0.455	0.450	0.389	0.296	0.231	0.189	0.097	0.5
	0.467	0.464	0.460	0.456	0.450	0.443	0.373	0.285	0.225	0.184	0.096	0.6
	0.467	0.463	0.458	0.452	0.444	0.435	0.358	0.275	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.467	0.462	0.455	0.447	0.438	0.426	0.343	0.265	0.211	0.175	0.094	0.8
	0.467	0.460	0.452	0.443	0.431	0.417	0.329	0.255	0.205	0.171	0.092	0.9
0.467	0.459	0.449	0.437	0.423	0.407	0.316	0.245	0.198	0.166	0.091	1.0	
2	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	0.382	0.330	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	0.382	0.378	0.323	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.383	0.383	0.383	0.382	0.382	0.381	0.372	0.313	0.242	0.195	0.099	0.3
	0.383	0.383	0.382	0.381	0.380	0.379	0.364	0.302	0.236	0.192	0.098	0.4
	0.383	0.382	0.381	0.380	0.379	0.377	0.355	0.292	0.230	0.188	0.097	0.5
	0.383	0.382	0.380	0.379	0.377	0.374	0.345	0.281	0.224	0.184	0.096	0.6
	0.383	0.382	0.380	0.377	0.374	0.371	0.335	0.271	0.217	0.180	0.095	0.7
	0.383	0.381	0.379	0.376	0.372	0.367	0.324	0.261	0.210	0.175	0.094	0.8
	0.383	0.381	0.377	0.373	0.369	0.363	0.314	0.251	0.204	0.170	0.092	0.9
0.383	0.380	0.376	0.371	0.365	0.358	0.303	0.242	0.197	0.166	0.091	1.0	

Tabla C8 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,7$ (continuación).

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
3	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.279	0.248	0.199	0.100	0.1
	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.279	0.277	0.244	0.198	0.100	0.2
	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.280	0.278	0.274	0.239	0.195	0.099	0.3
	0.280	0.280	0.280	0.280	0.279	0.279	0.277	0.269	0.233	0.191	0.098	0.4
	0.280	0.280	0.280	0.279	0.279	0.279	0.275	0.264	0.226	0.187	0.097	0.5
	0.280	0.280	0.279	0.279	0.279	0.278	0.273	0.258	0.220	0.183	0.096	0.6
	0.280	0.280	0.279	0.279	0.278	0.277	0.271	0.251	0.213	0.178	0.095	0.7
	0.280	0.279	0.279	0.278	0.277	0.276	0.268	0.244	0.207	0.174	0.094	0.8
	0.280	0.279	0.279	0.278	0.277	0.275	0.264	0.237	0.200	0.169	0.092	0.9
	0.280	0.279	0.278	0.277	0.276	0.274	0.261	0.231	0.194	0.164	0.091	1.0
4	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.200	0.100	0.0
	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.219	0.199	0.100	0.1
	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.219	0.218	0.197	0.100	0.2
	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.219	0.219	0.216	0.193	0.099	0.3
	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.219	0.219	0.218	0.213	0.189	0.098	0.4
	0.220	0.220	0.220	0.219	0.219	0.219	0.218	0.216	0.209	0.185	0.097	0.5
	0.220	0.220	0.220	0.219	0.219	0.219	0.218	0.215	0.205	0.180	0.096	0.6
	0.220	0.220	0.219	0.219	0.219	0.219	0.217	0.213	0.201	0.176	0.095	0.7
	0.220	0.220	0.219	0.219	0.219	0.219	0.216	0.211	0.196	0.171	0.094	0.8
	0.220	0.219	0.219	0.219	0.219	0.218	0.215	0.208	0.191	0.167	0.092	0.9
	0.220	0.219	0.219	0.219	0.218	0.218	0.214	0.206	0.186	0.162	0.091	1.0
5	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.100	0.0
	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.180	0.180	0.100	0.1
	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.179	0.100	0.2
	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.178	0.099	0.3
	0.181	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.179	0.176	0.098	0.4
	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.178	0.173	0.097	0.5
	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.179	0.177	0.170	0.096	0.6
	0.181	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.178	0.176	0.167	0.095	0.7
	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.179	0.178	0.174	0.164	0.094	0.8
	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.179	0.177	0.172	0.160	0.092	0.9
	0.181	0.180	0.180	0.180	0.180	0.180	0.178	0.176	0.170	0.157	0.091	1.0
10	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.0
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.1
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.2
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.094	0.3
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.094	0.4
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.093	0.5
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.092	0.6
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.091	0.7
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.090	0.8
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.089	0.9
	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.088	1.0

Tabla C9 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,8$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.880	0.878	0.876	0.872	0.865	0.844	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.880	0.874	0.866	0.852	0.829	0.788	0.481	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.880	0.867	0.849	0.824	0.786	0.735	0.462	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.880	0.858	0.830	0.791	0.743	0.688	0.441	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.880	0.847	0.805	0.757	0.702	0.645	0.420	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.880	0.833	0.780	0.723	0.664	0.608	0.400	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.880	0.819	0.754	0.690	0.629	0.574	0.381	0.279	0.220	0.180	0.095	0.7
	0.880	0.803	0.729	0.660	0.598	0.544	0.363	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.880	0.787	0.703	0.631	0.569	0.516	0.347	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.880	0.770	0.679	0.604	0.542	0.491	0.332	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.776	0.776	0.776	0.776	0.776	0.776	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.776	0.775	0.774	0.772	0.769	0.762	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.776	0.773	0.768	0.761	0.750	0.729	0.480	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.776	0.769	0.759	0.744	0.723	0.691	0.460	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.776	0.763	0.746	0.723	0.693	0.654	0.439	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.776	0.756	0.731	0.700	0.662	0.619	0.418	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.776	0.748	0.714	0.675	0.631	0.586	0.397	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.776	0.739	0.696	0.650	0.603	0.556	0.379	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.776	0.729	0.678	0.626	0.576	0.529	0.361	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.776	0.718	0.659	0.602	0.550	0.504	0.345	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.776	0.706	0.640	0.579	0.527	0.481	0.330	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0
0.6	0.689	0.689	0.689	0.689	0.689	0.689	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.689	0.689	0.688	0.687	0.685	0.683	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.689	0.687	0.684	0.681	0.675	0.665	0.477	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.689	0.685	0.679	0.671	0.659	0.641	0.457	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.689	0.681	0.671	0.657	0.639	0.614	0.435	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.689	0.677	0.662	0.642	0.617	0.587	0.414	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.689	0.672	0.651	0.625	0.595	0.561	0.394	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.689	0.666	0.639	0.607	0.572	0.535	0.376	0.278	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.689	0.660	0.626	0.589	0.550	0.512	0.358	0.268	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.689	0.652	0.612	0.570	0.529	0.490	0.342	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.689	0.645	0.598	0.552	0.509	0.469	0.327	0.248	0.199	0.166	0.091	1.0

Tabla C9 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,8$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
0.8	0.616	0.616	0.616	0.616	0.616	0.616	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.616	0.616	0.616	0.615	0.614	0.613	0.492	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.616	0.615	0.614	0.611	0.608	0.603	0.474	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.616	0.614	0.610	0.605	0.599	0.589	0.452	0.315	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.616	0.612	0.605	0.597	0.586	0.571	0.430	0.309	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.616	0.609	0.599	0.587	0.572	0.552	0.410	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.616	0.606	0.592	0.576	0.556	0.531	0.390	0.288	0.225	0.185	0.096	0.6
	0.616	0.602	0.584	0.563	0.539	0.511	0.372	0.277	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.616	0.598	0.576	0.550	0.522	0.492	0.355	0.267	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.616	0.593	0.566	0.536	0.505	0.473	0.339	0.257	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.616	0.588	0.556	0.522	0.488	0.455	0.325	0.248	0.199	0.166	0.091	1.0
1	0.556	0.556	0.556	0.556	0.556	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.556	0.555	0.555	0.555	0.554	0.554	0.489	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.556	0.555	0.554	0.553	0.551	0.548	0.468	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.556	0.554	0.552	0.549	0.545	0.539	0.445	0.318	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.556	0.553	0.549	0.544	0.537	0.528	0.424	0.308	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.556	0.551	0.545	0.537	0.527	0.515	0.404	0.298	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.556	0.549	0.540	0.530	0.516	0.500	0.385	0.287	0.225	0.185	0.096	0.6
	0.556	0.546	0.535	0.521	0.504	0.485	0.367	0.276	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.556	0.544	0.529	0.512	0.492	0.469	0.351	0.266	0.212	0.175	0.094	0.8
	0.556	0.540	0.522	0.502	0.479	0.454	0.336	0.256	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.556	0.537	0.515	0.491	0.465	0.439	0.322	0.247	0.199	0.166	0.091	1.0
1.5	0.442	0.442	0.442	0.442	0.442	0.442	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.442	0.442	0.442	0.442	0.442	0.442	0.437	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.442	0.442	0.442	0.441	0.441	0.440	0.425	0.325	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.442	0.442	0.441	0.440	0.439	0.437	0.410	0.316	0.242	0.195	0.099	0.3
	0.442	0.441	0.440	0.438	0.436	0.433	0.395	0.305	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.442	0.441	0.438	0.436	0.432	0.428	0.380	0.294	0.231	0.188	0.097	0.5
	0.442	0.440	0.437	0.433	0.428	0.422	0.365	0.284	0.224	0.184	0.096	0.6
	0.442	0.439	0.435	0.429	0.423	0.416	0.350	0.273	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.442	0.438	0.432	0.426	0.418	0.408	0.337	0.263	0.211	0.175	0.094	0.8
	0.442	0.437	0.430	0.421	0.412	0.400	0.324	0.253	0.204	0.170	0.092	0.9
	0.442	0.435	0.427	0.417	0.405	0.392	0.311	0.244	0.198	0.166	0.091	1.0
2	0.365	0.365	0.365	0.365	0.365	0.365	0.365	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.365	0.365	0.365	0.365	0.365	0.365	0.364	0.329	0.249	0.199	0.100	0.1
	0.365	0.365	0.365	0.365	0.365	0.365	0.361	0.320	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.365	0.365	0.365	0.364	0.364	0.363	0.356	0.310	0.242	0.195	0.099	0.3
	0.365	0.365	0.364	0.364	0.363	0.362	0.350	0.299	0.236	0.192	0.098	0.4
	0.365	0.365	0.364	0.363	0.361	0.360	0.342	0.288	0.230	0.188	0.097	0.5
	0.365	0.364	0.363	0.361	0.359	0.357	0.333	0.278	0.223	0.184	0.096	0.6
	0.365	0.364	0.362	0.360	0.357	0.354	0.324	0.268	0.216	0.179	0.095	0.7
	0.365	0.363	0.361	0.358	0.355	0.351	0.315	0.258	0.210	0.175	0.094	0.8
	0.365	0.363	0.360	0.356	0.352	0.347	0.305	0.249	0.203	0.170	0.092	0.9
	0.365	0.362	0.359	0.354	0.349	0.343	0.296	0.240	0.197	0.165	0.091	1.0

Tabla C9 parámetro de modo acoplado $K\tau_x=0,8$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
3	0.270	0.270	0.270	0.270	0.270	0.270	0.270	0.270	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.270	0.270	0.270	0.270	0.270	0.270	0.270	0.269	0.248	0.199	0.100	0.1
	0.270	0.270	0.270	0.270	0.270	0.269	0.269	0.267	0.243	0.198	0.100	0.2
	0.270	0.270	0.270	0.269	0.269	0.269	0.268	0.264	0.237	0.195	0.099	0.3
	0.270	0.270	0.270	0.269	0.269	0.269	0.267	0.260	0.231	0.191	0.098	0.4
	0.270	0.269	0.269	0.269	0.269	0.268	0.265	0.255	0.224	0.187	0.097	0.5
	0.270	0.269	0.269	0.269	0.268	0.268	0.263	0.250	0.217	0.182	0.096	0.6
	0.270	0.269	0.269	0.268	0.268	0.267	0.261	0.244	0.211	0.178	0.095	0.7
	0.270	0.269	0.269	0.268	0.267	0.266	0.258	0.238	0.205	0.173	0.094	0.8
	0.270	0.269	0.269	0.267	0.266	0.265	0.255	0.232	0.198	0.168	0.092	0.9
	0.270	0.269	0.269	0.267	0.265	0.264	0.251	0.226	0.192	0.164	0.091	1.0
4	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.200	0.100	0.0
	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.199	0.100	0.1
	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.211	0.196	0.100	0.2
	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.212	0.210	0.192	0.099	0.3
	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.212	0.211	0.207	0.188	0.098	0.4
	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.212	0.210	0.204	0.183	0.097	0.5
	0.213	0.213	0.213	0.213	0.213	0.212	0.211	0.208	0.200	0.179	0.096	0.6
	0.213	0.213	0.213	0.213	0.212	0.212	0.210	0.207	0.196	0.174	0.095	0.7
	0.213	0.213	0.213	0.212	0.212	0.212	0.210	0.205	0.192	0.170	0.094	0.8
	0.213	0.213	0.213	0.212	0.212	0.212	0.209	0.202	0.187	0.165	0.092	0.9
	0.213	0.213	0.212	0.212	0.212	0.211	0.207	0.199	0.183	0.161	0.091	1.0
5	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.100	0.0
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.100	0.1
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.100	0.2
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.173	0.099	0.3
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.174	0.172	0.098	0.4
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.175	0.174	0.169	0.097	0.5
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.174	0.172	0.167	0.096	0.6
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.174	0.171	0.164	0.095	0.7
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.175	0.173	0.170	0.161	0.094	0.8
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.175	0.174	0.172	0.168	0.157	0.092	0.9
	0.176	0.176	0.176	0.176	0.175	0.175	0.174	0.171	0.166	0.154	0.091	1.0
10	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.0
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.1
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.093	0.2
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.093	0.3
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.093	0.4
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.092	0.5
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.091	0.6
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.090	0.7
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.089	0.8
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.093	0.088	0.9
	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.093	0.093	0.087	1.0

Tabla C10 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,9$

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.857	0.855	0.853	0.850	0.844	0.827	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.857	0.852	0.844	0.832	0.812	0.777	0.481	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.857	0.845	0.829	0.806	0.773	0.726	0.462	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.857	0.837	0.811	0.776	0.732	0.681	0.441	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.857	0.827	0.789	0.744	0.694	0.640	0.420	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.857	0.815	0.766	0.713	0.657	0.603	0.400	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.857	0.801	0.742	0.682	0.624	0.570	0.381	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.857	0.787	0.718	0.652	0.593	0.540	0.363	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.857	0.772	0.694	0.625	0.565	0.514	0.346	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.857	0.756	0.670	0.599	0.539	0.489	0.331	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.744	0.744	0.744	0.744	0.744	0.744	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.744	0.744	0.743	0.741	0.739	0.733	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.744	0.742	0.738	0.732	0.723	0.707	0.479	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.744	0.738	0.730	0.717	0.700	0.674	0.459	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.744	0.733	0.719	0.699	0.673	0.640	0.437	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.744	0.727	0.706	0.679	0.646	0.607	0.416	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.744	0.720	0.691	0.657	0.618	0.577	0.396	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.744	0.712	0.675	0.634	0.591	0.549	0.377	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.744	0.703	0.659	0.612	0.566	0.522	0.360	0.268	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.744	0.694	0.641	0.590	0.542	0.498	0.344	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.744	0.684	0.624	0.569	0.520	0.476	0.329	0.249	0.199	0.166	0.091	1.0
0.6	0.656	0.656	0.656	0.656	0.656	0.656	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.656	0.655	0.655	0.654	0.653	0.651	0.493	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.656	0.654	0.652	0.649	0.644	0.637	0.476	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.656	0.652	0.647	0.640	0.631	0.617	0.454	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.656	0.649	0.641	0.630	0.614	0.594	0.433	0.309	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.656	0.646	0.633	0.616	0.596	0.570	0.412	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.656	0.641	0.624	0.602	0.576	0.547	0.392	0.288	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.656	0.636	0.613	0.586	0.556	0.524	0.373	0.278	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.656	0.631	0.602	0.570	0.536	0.502	0.356	0.267	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.656	0.625	0.590	0.554	0.517	0.481	0.341	0.257	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.656	0.618	0.578	0.537	0.498	0.462	0.326	0.248	0.199	0.166	0.091	1.0

Tabla C10 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,9$ (continuación).

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0.8	0.584	0.584	0.584	0.584	0.584	0.584	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.584	0.584	0.584	0.583	0.583	0.582	0.491	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.584	0.583	0.582	0.580	0.578	0.574	0.470	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.584	0.582	0.579	0.575	0.570	0.562	0.448	0.318	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.584	0.580	0.575	0.569	0.560	0.548	0.426	0.308	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.584	0.578	0.570	0.560	0.548	0.531	0.406	0.298	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.584	0.575	0.564	0.551	0.534	0.514	0.386	0.287	0.225	0.185	0.096	0.6
	0.584	0.572	0.558	0.540	0.520	0.496	0.369	0.277	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.584	0.569	0.550	0.529	0.505	0.479	0.352	0.266	0.212	0.175	0.094	0.8
	0.584	0.565	0.542	0.517	0.490	0.461	0.337	0.256	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.584	0.560	0.534	0.505	0.475	0.445	0.323	0.247	0.199	0.166	0.091	1.0
1	0.526	0.526	0.526	0.526	0.526	0.526	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.526	0.526	0.526	0.526	0.525	0.525	0.484	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.526	0.526	0.525	0.524	0.522	0.520	0.461	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.526	0.525	0.523	0.521	0.518	0.513	0.439	0.317	0.242	0.196	0.099	0.3
	0.526	0.524	0.521	0.516	0.511	0.504	0.418	0.307	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.526	0.522	0.517	0.511	0.503	0.493	0.398	0.297	0.231	0.189	0.097	0.5
	0.526	0.521	0.513	0.505	0.494	0.480	0.380	0.286	0.225	0.184	0.096	0.6
	0.526	0.519	0.509	0.497	0.484	0.467	0.363	0.275	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.526	0.516	0.504	0.490	0.473	0.454	0.347	0.265	0.212	0.175	0.094	0.8
	0.526	0.614	0.498	0.481	0.461	0.440	0.332	0.255	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.526	0.511	0.492	0.472	0.450	0.426	0.319	0.246	0.198	0.166	0.091	1.0
1.5	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.417	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.420	0.420	0.420	0.419	0.419	0.418	0.408	0.324	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.420	0.420	0.419	0.418	0.417	0.416	0.396	0.314	0.242	0.195	0.099	0.3
	0.420	0.419	0.418	0.416	0.415	0.412	0.383	0.303	0.236	0.192	0.098	0.4
	0.420	0.419	0.417	0.414	0.412	0.408	0.369	0.292	0.230	0.188	0.097	0.5
	0.420	0.418	0.415	0.412	0.408	0.403	0.356	0.282	0.224	0.184	0.096	0.6
	0.420	0.417	0.413	0.409	0.404	0.397	0.342	0.271	0.217	0.179	0.095	0.7
	0.420	0.416	0.411	0.406	0.399	0.391	0.330	0.261	0.210	0.175	0.094	0.8
	0.420	0.415	0.409	0.402	0.394	0.384	0.318	0.251	0.204	0.170	0.092	0.9
	0.420	0.414	0.407	0.398	0.388	0.377	0.306	0.242	0.197	0.165	0.091	1.0
2	0.349	0.349	0.349	0.349	0.349	0.349	0.349	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.349	0.349	0.349	0.349	0.349	0.349	0.348	0.327	0.249	0.199	0.100	0.1
	0.349	0.349	0.349	0.348	0.348	0.348	0.345	0.317	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.349	0.349	0.348	0.348	0.347	0.347	0.341	0.306	0.241	0.195	0.099	0.3
	0.349	0.348	0.348	0.347	0.346	0.345	0.336	0.295	0.235	0.192	0.098	0.4
	0.349	0.348	0.347	0.346	0.345	0.344	0.329	0.284	0.229	0.188	0.097	0.5
	0.349	0.348	0.347	0.345	0.343	0.341	0.322	0.274	0.222	0.183	0.096	0.6
	0.349	0.347	0.346	0.344	0.342	0.339	0.314	0.264	0.215	0.179	0.095	0.7
	0.349	0.347	0.345	0.342	0.339	0.336	0.305	0.255	0.209	0.174	0.094	0.8
	0.349	0.346	0.344	0.341	0.337	0.332	0.297	0.246	0.202	0.169	0.092	0.9
	0.349	0.346	0.343	0.339	0.334	0.329	0.288	0.238	0.196	0.165	0.091	1.0

Tabla C10 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 0,9$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_T
3	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.259	0.259	0.247	0.199	0.100	0.1
	0.260	0.260	0.260	0.260	0.259	0.259	0.259	0.258	0.241	0.197	0.100	0.2
	0.260	0.260	0.259	0.259	0.259	0.259	0.258	0.255	0.234	0.194	0.099	0.3
	0.260	0.260	0.259	0.259	0.259	0.259	0.257	0.251	0.228	0.190	0.098	0.4
	0.260	0.259	0.259	0.259	0.259	0.258	0.255	0.247	0.221	0.186	0.097	0.5
	0.260	0.259	0.259	0.259	0.258	0.258	0.254	0.243	0.215	0.182	0.096	0.6
	0.260	0.259	0.259	0.258	0.258	0.257	0.251	0.237	0.208	0.177	0.095	0.7
	0.260	0.259	0.258	0.258	0.257	0.256	0.249	0.232	0.202	0.172	0.094	0.8
	0.260	0.259	0.258	0.257	0.256	0.255	0.246	0.226	0.196	0.167	0.092	0.9
0.260	0.259	0.258	0.257	0.256	0.254	0.243	0.221	0.190	0.163	0.091	1.0	
4	0.207	0.207	0.207	0.207	0.207	0.207	0.207	0.207	0.207	0.200	0.100	0.0
	0.207	0.207	0.207	0.207	0.207	0.207	0.206	0.206	0.206	0.198	0.100	0.1
	0.207	0.207	0.207	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.205	0.194	0.100	0.2
	0.207	0.207	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.205	0.203	0.190	0.099	0.3
	0.207	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.205	0.201	0.186	0.098	0.4
	0.207	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.205	0.203	0.198	0.181	0.097	0.5
	0.207	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.205	0.202	0.195	0.177	0.096	0.6
	0.207	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206	0.204	0.200	0.191	0.172	0.095	0.7
	0.207	0.206	0.206	0.206	0.206	0.205	0.203	0.198	0.187	0.168	0.094	0.8
	0.207	0.206	0.206	0.206	0.205	0.205	0.202	0.196	0.183	0.163	0.092	0.9
0.207	0.206	0.206	0.205	0.205	0.204	0.201	0.194	0.179	0.159	0.091	1.0	
5	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.100	0.0
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.100	0.1
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.170	0.100	0.2
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.169	0.099	0.3
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.170	0.167	0.098	0.4
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.170	0.169	0.165	0.097	0.5
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.170	0.168	0.163	0.096	0.6
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.170	0.169	0.167	0.160	0.095	0.7
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.170	0.168	0.165	0.157	0.093	0.8
	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.169	0.167	0.163	0.154	0.092	0.9
0.171	0.171	0.171	0.171	0.171	0.170	0.169	0.166	0.161	0.151	0.090	1.0	
10	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.0
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.1
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.2
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.3
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.091	0.4
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.091	0.5
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.090	0.6
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.089	0.7
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.088	0.8
	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.087	0.9
0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.092	0.086	1.0	

Tabla C11 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 1,0$.

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	1.000	0.998	0.993	0.986	0.967	0.909	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	1.000	0.990	0.975	0.950	0.905	0.833	0.482	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	1.000	0.979	0.948	0.904	0.843	0.769	0.464	0.320	0.243	0.196	0.099	0.3
	1.000	0.963	0.915	0.856	0.787	0.714	0.444	0.311	0.238	0.193	0.098	0.4
	1.000	0.945	0.880	0.809	0.736	0.667	0.423	0.301	0.232	0.189	0.097	0.5
	1.000	0.925	0.845	0.766	0.692	0.625	0.402	0.291	0.226	0.185	0.096	0.6
	1.000	0.903	0.810	0.726	0.652	0.588	0.383	0.280	0.220	0.181	0.095	0.7
	1.000	0.880	0.776	0.689	0.616	0.556	0.365	0.270	0.213	0.176	0.094	0.8
	1.000	0.857	0.744	0.656	0.584	0.526	0.349	0.260	0.207	0.171	0.092	0.9
	1.000	0.833	0.714	0.625	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.091	1.0
0.2	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.833	0.832	0.831	0.828	0.822	0.809	0.495	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.833	0.829	0.822	0.812	0.795	0.764	0.480	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.833	0.823	0.809	0.789	0.759	0.717	0.461	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.833	0.816	0.792	0.761	0.721	0.673	0.440	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.833	0.806	0.773	0.732	0.684	0.634	0.419	0.300	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.833	0.795	0.751	0.702	0.650	0.598	0.399	0.290	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.833	0.783	0.729	0.673	0.618	0.566	0.380	0.279	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.833	0.770	0.706	0.645	0.588	0.537	0.362	0.269	0.213	0.176	0.094	0.8
	0.833	0.756	0.684	0.618	0.560	0.511	0.346	0.259	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.833	0.742	0.661	0.593	0.535	0.487	0.331	0.249	0.200	0.167	0.091	1.0
0.4	0.714	0.714	0.714	0.714	0.714	0.714	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.714	0.714	0.713	0.712	0.710	0.706	0.494	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.714	0.712	0.709	0.704	0.696	0.684	0.478	0.327	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.714	0.709	0.702	0.692	0.677	0.655	0.457	0.319	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.714	0.705	0.692	0.676	0.654	0.625	0.436	0.310	0.238	0.193	0.098	0.4
	0.714	0.700	0.681	0.658	0.629	0.595	0.415	0.299	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.714	0.694	0.668	0.638	0.604	0.567	0.395	0.289	0.226	0.185	0.096	0.6
	0.714	0.687	0.654	0.618	0.580	0.540	0.376	0.278	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.714	0.679	0.640	0.598	0.556	0.515	0.359	0.268	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.714	0.670	0.624	0.578	0.534	0.492	0.343	0.258	0.206	0.171	0.092	0.9
	0.714	0.661	0.609	0.558	0.512	0.471	0.328	0.248	0.199	0.166	0.091	1.0
0.6	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.625	0.625	0.624	0.624	0.623	0.621	0.492	0.332	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.625	0.624	0.622	0.619	0.616	0.610	0.474	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.625	0.622	0.618	0.612	0.605	0.594	0.452	0.318	0.243	0.196	0.099	0.3
	0.625	0.620	0.612	0.603	0.591	0.574	0.430	0.309	0.238	0.192	0.098	0.4
	0.625	0.617	0.606	0.592	0.575	0.553	0.409	0.298	0.232	0.189	0.097	0.5
	0.625	0.613	0.598	0.580	0.558	0.532	0.389	0.288	0.225	0.185	0.096	0.6
	0.625	0.609	0.589	0.566	0.540	0.511	0.371	0.277	0.219	0.180	0.095	0.7
	0.625	0.604	0.579	0.552	0.522	0.491	0.354	0.267	0.212	0.176	0.094	0.8
	0.625	0.599	0.569	0.537	0.505	0.472	0.339	0.257	0.205	0.171	0.092	0.9
	0.625	0.593	0.558	0.523	0.487	0.454	0.324	0.247	0.199	0.166	0.091	1.0

Tabla C11 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 1,0$ (continuación)

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_p
0.8	0.556	0.556	0.556	0.556	0.556	0.556	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.556	0.555	0.555	0.555	0.554	0.553	0.488	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.556	0.555	0.554	0.552	0.550	0.547	0.466	0.326	0.247	0.198	0.100	0.2
	0.556	0.554	0.551	0.548	0.544	0.538	0.443	0.318	0.242	0.196	0.099	0.3
	0.556	0.552	0.548	0.542	0.535	0.526	0.422	0.308	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.556	0.550	0.544	0.535	0.525	0.512	0.401	0.297	0.231	0.189	0.097	0.5
	0.556	0.548	0.539	0.527	0.513	0.497	0.383	0.286	0.225	0.184	0.096	0.6
	0.556	0.545	0.533	0.518	0.501	0.481	0.365	0.276	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.556	0.542	0.527	0.509	0.488	0.465	0.349	0.265	0.212	0.175	0.094	0.8
	0.556	0.539	0.520	0.498	0.475	0.450	0.334	0.256	0.205	0.171	0.092	0.9
0.556	0.535	0.512	0.487	0.461	0.435	0.320	0.246	0.199	0.166	0.091	1.0	
1	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.500	0.500	0.500	0.500	0.499	0.499	0.476	0.331	0.249	0.200	0.100	0.1
	0.500	0.499	0.499	0.498	0.497	0.495	0.453	0.325	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.500	0.499	0.497	0.495	0.493	0.489	0.431	0.317	0.242	0.196	0.099	0.3
	0.500	0.498	0.495	0.492	0.487	0.482	0.411	0.306	0.237	0.192	0.098	0.4
	0.500	0.497	0.492	0.487	0.481	0.472	0.392	0.296	0.231	0.188	0.097	0.5
	0.500	0.495	0.489	0.482	0.473	0.462	0.374	0.285	0.225	0.184	0.096	0.6
	0.500	0.493	0.485	0.476	0.464	0.450	0.358	0.274	0.218	0.180	0.095	0.7
	0.500	0.491	0.481	0.469	0.455	0.439	0.343	0.264	0.211	0.175	0.094	0.8
	0.500	0.489	0.476	0.462	0.445	0.426	0.329	0.254	0.204	0.170	0.092	0.9
0.500	0.487	0.471	0.454	0.435	0.414	0.316	0.245	0.198	0.166	0.091	1.0	
1.5	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.398	0.330	0.249	0.199	0.100	0.1
	0.400	0.400	0.400	0.399	0.399	0.398	0.391	0.322	0.246	0.198	0.100	0.2
	0.400	0.400	0.399	0.398	0.397	0.396	0.381	0.312	0.242	0.195	0.099	0.3
	0.400	0.399	0.398	0.397	0.395	0.393	0.370	0.301	0.236	0.192	0.098	0.4
	0.400	0.399	0.397	0.395	0.393	0.390	0.358	0.290	0.230	0.188	0.097	0.5
	0.400	0.398	0.396	0.393	0.389	0.385	0.346	0.279	0.223	0.184	0.096	0.6
	0.400	0.397	0.394	0.390	0.386	0.380	0.334	0.269	0.216	0.179	0.095	0.7
	0.400	0.397	0.392	0.387	0.382	0.375	0.323	0.259	0.210	0.175	0.094	0.8
	0.400	0.396	0.390	0.384	0.377	0.369	0.311	0.250	0.203	0.170	0.092	0.9
0.400	0.395	0.388	0.381	0.372	0.362	0.301	0.241	0.197	0.165	0.091	1.0	
2	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.322	0.249	0.199	0.100	0.1
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.330	0.311	0.245	0.198	0.100	0.2
	0.333	0.333	0.333	0.333	0.332	0.332	0.327	0.301	0.240	0.195	0.099	0.3
	0.333	0.333	0.332	0.332	0.331	0.330	0.322	0.290	0.234	0.192	0.098	0.4
	0.333	0.333	0.332	0.331	0.330	0.329	0.317	0.280	0.228	0.188	0.097	0.5
	0.333	0.332	0.331	0.330	0.329	0.327	0.310	0.270	0.221	0.183	0.096	0.6
	0.333	0.332	0.331	0.329	0.327	0.324	0.303	0.261	0.214	0.178	0.095	0.7
	0.333	0.332	0.330	0.327	0.325	0.322	0.296	0.251	0.207	0.174	0.094	0.8
	0.333	0.331	0.329	0.326	0.323	0.319	0.288	0.243	0.201	0.169	0.092	0.9
0.333	0.331	0.328	0.324	0.320	0.315	0.281	0.235	0.195	0.164	0.091	1.0	

Tabla C11 parámetro de modo acoplado $K \tau_x = 1,0$ (continuación).

r_2	$r_1=0$	$r_1=0.2$	$r_1=0.4$	$r_1=0.6$	$r_1=0.8$	$r_1=1$	$r_1=2$	$r_1=3$	$r_1=4$	$r_1=5$	$r_1=10$	τ_y
3	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.200	0.100	0.0
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.244	0.199	0.100	0.1
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.249	0.248	0.237	0.197	0.100	0.2
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.249	0.246	0.231	0.194	0.099	0.3
	0.250	0.250	0.250	0.250	0.249	0.249	0.248	0.243	0.224	0.190	0.098	0.4
	0.250	0.250	0.250	0.249	0.249	0.249	0.246	0.239	0.218	0.185	0.097	0.5
	0.250	0.250	0.249	0.249	0.249	0.248	0.244	0.235	0.212	0.181	0.096	0.6
	0.250	0.250	0.249	0.249	0.248	0.247	0.242	0.231	0.206	0.176	0.095	0.7
	0.250	0.250	0.249	0.248	0.248	0.247	0.240	0.226	0.199	0.171	0.094	0.8
	0.250	0.249	0.249	0.248	0.247	0.246	0.238	0.221	0.194	0.166	0.092	0.9
	0.250	0.249	0.248	0.247	0.246	0.245	0.235	0.215	0.188	0.162	0.091	1.0
4	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.100	0.0
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.196	0.100	0.1
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.192	0.100	0.2
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.197	0.187	0.099	0.3
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.198	0.195	0.183	0.098	0.4
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.197	0.193	0.179	0.097	0.5
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.199	0.198	0.196	0.190	0.174	0.096	0.6
	0.200	0.200	0.200	0.200	0.199	0.199	0.197	0.194	0.186	0.170	0.095	0.7
	0.200	0.200	0.200	0.199	0.199	0.199	0.197	0.192	0.183	0.166	0.093	0.8
	0.200	0.200	0.199	0.199	0.199	0.198	0.196	0.190	0.179	0.161	0.092	0.9
	0.200	0.200	0.199	0.199	0.199	0.198	0.195	0.188	0.175	0.157	0.091	1.0
5	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.100	0.0
	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.166	0.100	0.1
	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.166	0.166	0.100	0.2
	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.166	0.166	0.165	0.099	0.3
	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.166	0.166	0.165	0.163	0.098	0.4
	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.166	0.166	0.166	0.164	0.161	0.097	0.5
	0.167	0.167	0.167	0.167	0.166	0.166	0.166	0.165	0.163	0.159	0.096	0.6
	0.167	0.167	0.167	0.166	0.166	0.166	0.166	0.164	0.162	0.157	0.095	0.7
	0.167	0.167	0.167	0.166	0.166	0.166	0.165	0.164	0.161	0.154	0.093	0.8
	0.167	0.167	0.166	0.166	0.166	0.166	0.165	0.163	0.159	0.151	0.092	0.9
	0.167	0.167	0.166	0.166	0.166	0.166	0.164	0.162	0.157	0.148	0.090	1.0
10	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.0
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.1
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.2
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.090	0.3
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.090	0.4
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.089	0.5
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.088	0.6
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.088	0.7
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.087	0.8
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.090	0.086	0.9
	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.090	0.084	1.0

ANEXO D

The Dunkerley theorem

In the theory of stability the classical theorem of DUNKERLEY [1894] is the following: The reciprocal of the least critical load parameter of an elastic structure subjected to a complex load system is not greater than the sum of the reciprocals of the least critical load parameters of the same structure subjected to subsystems of the load. In this theorem mathematically it is supposed that all the operators are positive definite or positive, that is, where all the eigenvalues (critical load parameters) are positive. The theorem, however, can be generalized for cases where there are both positive and negative eigenvalues. Now we formulate the *Dunkerley* theorem mathematically for this generalized case.

Theorem 2-2: Let A and B be symmetric linear operators in a *Hilbert* space H such that A is positive, and there exists a constant c such that

$$|(Bu, u)| \leq c(Au, u), \quad u \in D_A \subset D_B \subset H. \quad (2-15)$$

Suppose that the quadratic functional (Bu, u) is completely continuous with respect to (Au, u) . Let $B = \sum_{i=1}^n B_i$ where the operators B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) have the same properties as B , and let there exist constants c_i associated to B_i to satisfy (2-15). If λ_0 and λ_i denote the least positive eigenvalues of the eigenvalue problem

$$(A - \lambda B)u = 0 \quad (2-16)$$

and

$$(A - \lambda B_i)u = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2-17)$$

respectively, then we have

$$\frac{1}{\lambda_0} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}. \quad (2-18)$$

Remark: If for some i , $(A - \lambda B_i)u = 0$ has no positive eigenvalues then

$$\sup_{u \in D_A} \frac{(B_i u, u)}{(A u, u)} = 0,$$

and in (2-18), $1/\lambda_i$ should be replaced by 0.

In the following, some examples of the application of the *Dunkerley* theorem will be presented for lateral buckling of beam-columns. As shown in Chapter 9, equilibrium of thin-walled bars with symmetric open cross section subjected to both axial and transverse forces in a buckled state can be described by the differential equations below if the normal force N is constant:

$$EI_y u_T'''' + (M_x \Phi)'' + N (u_T'' + y_0 \Phi'') = 0, \quad (2-19)$$

$$EI_\omega \Phi'''' - GI_t \Phi'' + M_x u_T'' + t M_x'' \Phi - \beta_1 (M_x \Phi')' + N (y_0 u_T'' + i_p^2 \Phi'') = 0. \quad (2-20)$$

Here u_T is the lateral displacement of the shear centre of the cross section, t is the distance to the point of application of the transverse load q from the shear centre, and β_1, y_0, i_p^2 are cross sectional constants. Suppose we have a one-parameter load system. Let λ denote the load parameter, M_{x1}, N_1, q_1 the reference values of the functions M_x, N, q . So,

$$M_x = \lambda M_{x1}, \quad N = \lambda N_1, \quad q = \lambda q_1.$$

Introduce the following notation:

$$A_{11}u_T = EI_y u_T'''' \tag{2-21a}$$

$$A_{22}\Phi = EI_\omega \Phi'''' - GI_t \Phi'' \tag{2-21b}$$

$$B_{11}u_T = -N_1 u_T'' \tag{2-21c}$$

$$B_{12}^{(1)}\Phi = -\gamma_0 N_1 \Phi'' \tag{2-21d}$$

$$B_{12}^{(2)}\Phi = -(M_{x1}\Phi)'' \tag{2-21e}$$

$$B_{21}^{(1)}u_T = -\gamma_0 N_1 u_T'' \tag{2-21f}$$

$$B_{21}^{(2)}u_T = -M_{x1} u_T'' \tag{2-21g}$$

$$B_{22}^{(1)}\Phi = -i_{pT}^2 N_1 \Phi'' \tag{2-21h}$$

$$B_{22}^{(2)}\Phi = \beta_1 (M_{x1}\Phi)' \tag{2-21i}$$

$$B_{22}^{(3)}\Phi = -t M_{x1}'' \Phi \tag{2-21j}$$

$$B_{12} = B_{12}^{(1)} + B_{12}^{(2)} \tag{2-22a}$$

$$B_{21} = B_{21}^{(1)} + B_{21}^{(2)} \tag{2-22b}$$

$$B_{22} = B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)} + B_{22}^{(3)} \tag{2-22c}$$

Differential expressions (2-21a to j) with given homogeneous boundary conditions denote differential operators. In this way equations (2-19 and 20) with given boundary conditions can be written in the form

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_T \\ \Phi \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_T \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-23}$$

or in a shorter form $(A - \lambda B)w = 0$ by introducing notation

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} u_T \\ \Phi \end{bmatrix} \tag{2-24}$$

In most practical cases the boundary conditions result in operators A and B satisfying the conditions of Theorem 2-2.

Example 2-4: Let operator B be of the form

$$B = B_1 + B_2 \tag{2-25}$$

where

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12}^{(1)} \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{12}^{(2)} \\ B_{21}^{(2)} & B_{22}^{(2)} + B_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{2-26}$$

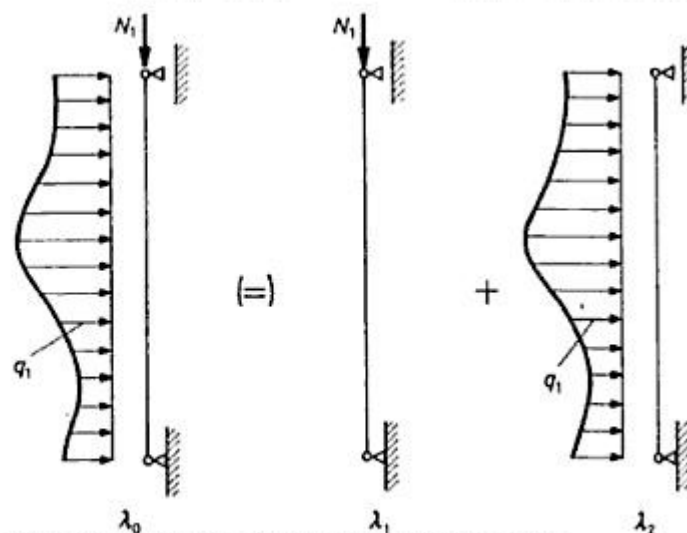


Fig. 2-3 Subdivision of the load into axial and transverse components

This means that the system of external forces is divided into two parts: (a) axial and (b) transverse loads (Fig. 2-3). Due to Theorem 2-2 a lower bound can be given to the least positive critical load parameter by the least critical load parameter for torsional buckling

and the least positive critical load parameter for lateral buckling. This is a traditional way of applying the *Dunkerley* theorem.

Example 2-5: Consider the problem of lateral buckling of the bar without axial forces ($N_1 = 0$):

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_T \\ \Phi \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & B_{12}^{(2)} \\ B_{21}^{(2)} & B_{22}^{(2)} + B_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_T \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2-27)$$

Let us subdivide operator B_2 in (2-26) into two parts:

$$B_2 = B_2^{(1)} + B_2^{(2)} \quad (2-28)$$

such that

$$B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & B_{12}^{(2)} \\ B_{21}^{(2)} & B_{22}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (2-29)$$

Let operator $B_{22}^{(3)}$ in (2-21j) be positive, that is, let the point of application of the load be above the shear centre. In this case the conditions of Theorem 2-2 are satisfied by the operators A , B_2 , $B_2^{(1)}$, $B_2^{(2)}$ defined by (2-24), (2-28), (2-29), and to the least positive critical load parameter we can give an approximate value in the following way (Fig. 2-4).

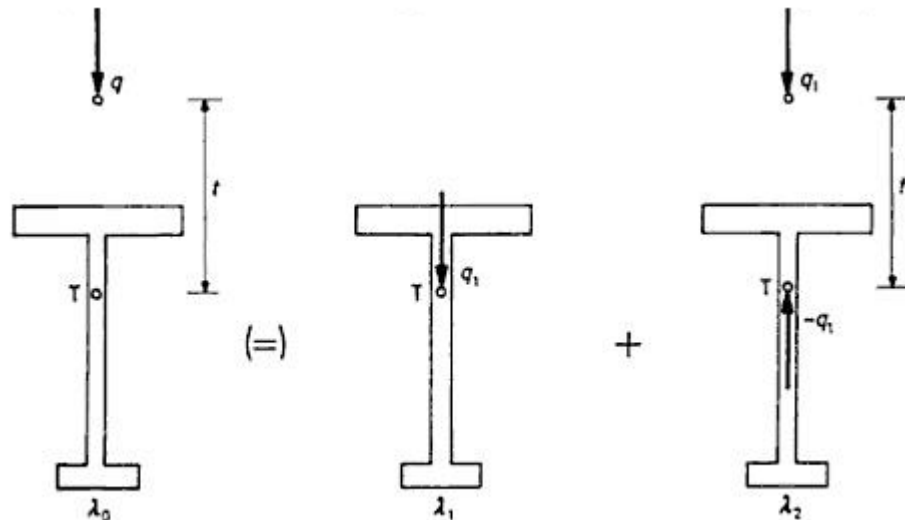


Fig. 2-4 Grouping of loads

First we determine the least positive critical load parameter for the case where the point of application of the load is the shear centre ($B_2^{(2)} = 0$). This is λ_1 . Then we determine the critical load of the structure for the case where additionally to the original load with original point of application, another load is applied whose intensity is the same as that of the original, but its direction is the opposite, and its point of application is the shear centre ($B_2^{(1)} = 0$). This is equivalent to the case where the bar is simply supported along an axis passing through the shear centre. This support allows the cross sections to rotate. The critical load parameter in this case is λ_2 . The theorem yields the inequality

$$\frac{1}{\lambda_0} \leq \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

are increased up to infinity except the i th one which is kept unchanged. Let the least critical load parameter of the structure obtained in this way be denoted by λ_i . Let this procedure be done for $i = 1, 2, \dots, n$. If λ_0 denotes the least critical load parameter of the original structure, then for its reciprocal a good approximation is given by the reciprocals of the least critical load parameters of the imaginary rigidized structures:

$$\frac{1}{\lambda_0} \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}. \quad (2-37)$$

However, it is not clear whether or not the approximation is conservative. In the following we will give conditions under which formula (2-37) results in approximation on the safe side.

Definition: Let A be a symmetric linear operator in Hilbert space H . We say that elements u and v ($u, v \in D_A$) are A -orthogonal, if $(Au, v) = 0$. Let X and Y be subspaces in D_A . We say that X and Y are A -orthogonal, if for every $u \in X$ and $v \in Y$ we have $(Au, v) = 0$. Let Z be a subspace in D_A . We say that Z is A -orthogonal direct sum of X and Y , denoted by $Z = X \oplus Y$, if every $w \in Z$ can be written in the form $w = u + v$ such that $u \in X$, $v \in Y$ and $(Au, v) = 0$.

Theorem 2-3: Let A and B be symmetric linear operators in Hilbert space H such that A is positive definite, B is positive and $D_A \subset D_B \subset H$. Let the quadratic functional (Bu, u) be completely continuous with respect to (Au, u) . Let D_1, D_2, \dots, D_n be pairwise A -orthogonal subspaces in D_A such that $D_A = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n$. If λ_0 and λ_i denotes the least eigenvalue of the eigenvalue problem

$$(A - \lambda B)u = 0, \quad u \in D_A \quad (2-38)$$

and

$$(A - \lambda B)u = 0, \quad u \in D_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2-39)$$

respectively, then we have

$$\frac{1}{\lambda_0} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}. \quad (2-40)$$

Remarks: In Theorem 2-3 it is important that B is positive. Conservative approximation is therefore guaranteed only for problems having positive eigenvalues. In the Theorem it is not required that (Bu, u) is completely continuous with respect to (Au, u) in every subproblem ($u \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$). Thus, the Theorem is valid for degenerate subproblems whose spectrum has only one point and it is an eigenvalue with infinite multiplicity, or whose spectrum is continuous. In the case of continuous spectrum, however, we cannot talk about the least eigenvalue but the infimum of the *Rayleigh* quotient. Such problems can arise for buckling of bars where the effect of shearing forces on the deflection is taken into consideration.

There are problems where by application of the *Föppl* method (partial rigidizing), the conditions of the *Dunkerley* theorem are satisfied, and (2-40) is due to the *Dunkerley* theorem. In such a case the *Föppl-Papkovich* formula is identical to the *Dunkerley* formula. There are, however, cases for which the *Föppl-Papkovich* formula is different from the *Dunkerley* formula, and the *Föppl-Papkovich* formula approximates the exact value with a smaller error than the *Dunkerley* formula. We will show an example for each of the two cases.

The Föppl-Papkovich theorem

Example 2-7: Consider the buckling of a bar of constant cross section with hinged ends, subjected to compressive force N at its ends. The differential equation and the boundary conditions of the problem are:

$$EI_y u'''' + Nu'' = 0, \quad (2-41)$$

$$u(0) = u''(0) = u(l) = u''(l) = 0. \quad (2-42)$$

By the notation $Au = EI_y u''''$, $\lambda N_1 = N$, $Bu = -N_1 u''$ the eigenvalue problem (2-41), (2-42) can be written in the form $(A - \lambda B)u = 0$. Eq. (2-41), however, can be written in the form

$$u'''' + \frac{N}{EI_y} u'' = 0, \quad (2-43)$$

which with the notation $\bar{A}u = u''''$, $\lambda N_1 = N$, $\bar{B}u = -N_1 u'' / (EI_y)$ reads $(\bar{A} - \lambda \bar{B})u = 0$. Subdivide the length of the bar into n parts with points $0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < z_n = l$ (Fig. 2-7). The value of the stiffness parameter on every segment is EI_y . Introduce the following notation:

$$K_i = \begin{cases} EI_y & \text{if } z_{i-1} < z \leq z_i, \\ \infty, & \text{if } z \leq z_{i-1} \text{ or } z > z_i, \end{cases}$$

$$\bar{B}_i u = -N_1 \frac{u''}{K_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

It is clear that $\bar{B} = \sum_{i=1}^n \bar{B}_i$, and the conditions of the *Dunkerley* theorem (Theorem 2-2) are satisfied. Therefore, if λ_i denotes the least eigenvalue of the eigenvalue problem $(\bar{A} - \lambda \bar{B}_i)u = 0$, then (2-18) holds, but considering the physical background it expresses the inequality (2-40), as by partial rigidizing the bar we have defined A -orthogonal subspaces of displacement functions u . This can be shown as follows. The i th A -orthogonal subspace D_i consists of the four times differentiable functions u satisfying boundary conditions (2-42) such that – because of rigidizing – u is linear outside the interval $z_{i-1} < z \leq z_i$. (We note here that for $i = 2, 3, \dots, n-1$ the boundary conditions $u''(0) = u''(l) = 0$ are automatically satisfied.) Let $u \in D_i$, $v \in D_j$ ($i \neq j$) be arbitrary elements, then by integration by parts

$$(Au, v) = \int_0^l EI_y u'''' v dz = [EI_y u'''' v]_0^l - [EI_y u'' v']_0^l + \int_0^l EI_y u'' v'' dz.$$

In this expression the integrated parts vanish in consequence of the boundary conditions. The second derivative of the function u and v vanishes outside the interval $z_{i-1} < z \leq z_i$ and $z_{j-1} < z \leq z_j$, respectively. Since these intervals are disjoint, it follows that $u'' v''$ is identically equal to zero. Therefore $(Au, v) = 0$, that is, u and v are A -orthogonal; consequently D_i and D_j are A -orthogonal also. So, the conditions of the *Föppl-Papkovich* theorem (Theorem 2-3) are satisfied, too. By writing the *Rayleigh* quotient we also can show that the least eigenvalues of the eigenvalue problems $(\bar{A} - \lambda \bar{B}_i)u = 0$, $u \in D_A$ and $(A - \lambda B)u = 0$, $u \in D_i$ are the same: λ_i . In this example, therefore, the *Dunkerley* theorem and the *Föppl-Papkovich* theorem result in the same formula.

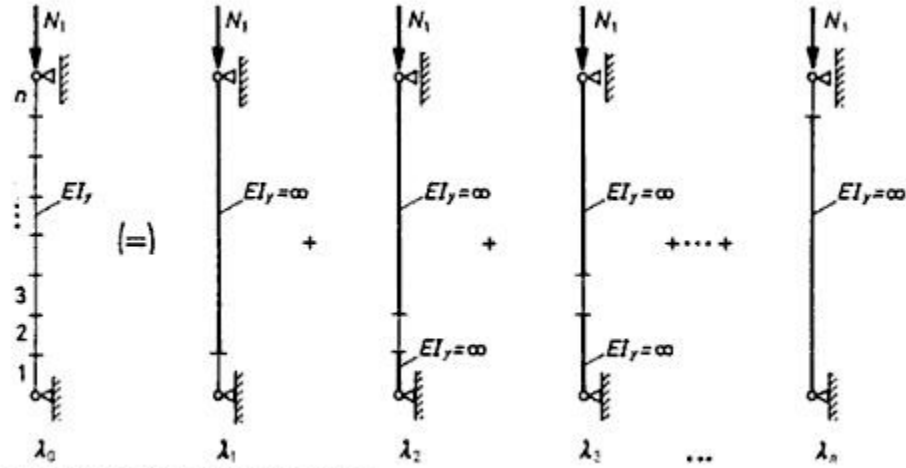


Fig. 2-7 Partial rigidizing of the hinged bar

Example 2-8: Consider torsional buckling of a bar of height l with the lower end built-in and the upper end free. The equilibrium equation and the boundary conditions with the notation used in Section 2.3.1 are

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_T \\ \Phi \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12}^{(1)} \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_T \\ \Phi \end{bmatrix} = 0, \tag{2-44}$$

$$u_T(0) = u_T''(0) = u_T'(l) = u_T'''(l) = 0, \tag{2-45a}$$

$$\Phi(0) = \Phi''(0) = \Phi'(l) = \Phi'''(l) = 0. \tag{2-45b}$$

Eq. (2-44) with notation (2-24) and (2-26) takes the form

$$Aw - \lambda B_1 w = 0. \tag{2-46}$$

Introduce the notation

$$B_1^{(1)} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, B_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & B_{12}^{(1)} \\ B_{21}^{(1)} & 0 \end{bmatrix}.$$

It is clear that $B_1 = B_1^{(1)} + B_1^{(2)} + B_1^{(3)}$. Let $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ denote the least eigenvalues of the eigenvalue problems

$$(A - \lambda B_1^{(1)}) w = 0,$$

$$(A - \lambda B_1^{(2)}) w = 0,$$

$$(A - \lambda B_1^{(3)}) w = 0,$$

respectively. If λ_0 denotes the least eigenvalue of the problem (2-46), then due to the *Dunkerley* theorem we obtain:

$$\frac{1}{\lambda_0} \leq \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}.$$

If EI_y and GI_t are the two stiffness parameters in the *Föppl* method, then the *Föppl-Papkovich* theorem results in the inequality

$$\frac{1}{\lambda_0} \leq \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

It can be seen that in this case the *Föppl-Papkovich* formula and the *Dunkerley* formula are not the same, and the *Föppl-Papkovich* formula is more accurate. (This is obvious, as λ_1 and λ_2 in the *Föppl-Papkovich* formula are identical to λ_1 and λ_2 in the *Dunkerley* formula, but there is the term $1/\lambda_3$ in the *Dunkerley* formula that is not present in the *Föppl-Papkovich* formula.)

Example 2-9: (The *Plantema* paradox) In the field of sandwich structures the *Föppl* method is known as the *method of split rigidities*. In many problems the method of split rigidities provides exact results or conservative approximations. PLANTEMA [1952], however, found an example where the result of this method was *not* on the safe side. Now we will investigate the reason of this paradoxical behaviour.

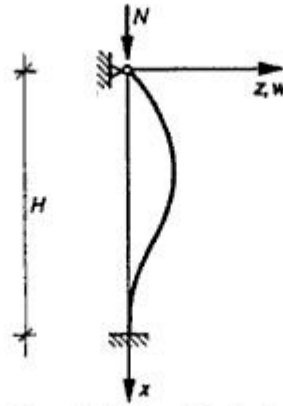


Fig. 2-8 Buckling of a thin-faced sandwich bar with the lower end built-in and the upper end hinged

Consider the buckling of a bar of height H with the lower end built-in and the upper end hinged, subjected to a concentrated vertical force N at the hinged end (Fig. 2-8). Suppose that the bar undergoes both bending and shearing deformations. The displacement w of a point of the axis of the bar is composed of two parts: displacement w_D due to the bending deformation and displacement w_S due to the shearing deformation, that is,

$$w = w_D + w_S.$$

The equilibrium of the bar – as is usual in the literature [TIMOSHENKO and GERE, 1961] – can be expressed by using w_D only. If D_0 and S denote the bending and the shear rigidities, and $\lambda = N$ the equilibrium equation takes the form

$$w_D'''' - \lambda \left(\frac{w_D''''}{S} - \frac{w_D''}{D_0} \right) = 0 \quad (2-47)$$

and as shown in Chapter 6 the boundary conditions are

$$w_D(0) = w_D''(0) = w_D(H) - \frac{D_0}{S} w_D''(H) = w_D'(H) = 0. \quad (2-48)$$

The eigenvalue problem (2-47), (2-48) for $S = \infty$ leads to the eigenvalue problem

$$w_D'''' + \lambda \frac{w_D''}{D_0} = 0, \quad (2-49)$$

$$w_D(0) = w_D''(0) = w_D(H) = w_D'(H) = 0, \quad (2-50)$$

and for $D_0 = \infty$ leads to the eigenvalue problem

$$w_D'''' - \lambda \frac{w_D''''}{S} = 0, \quad (2-51)$$

$$w_D(0) = w_D''(0) = w_D''(H) = w_D'(H) = 0. \quad (2-52)$$

Let λ_0 , λ_1 , λ_2 denote the least eigenvalue of the eigenvalue problem (2-47), (2-48), (2-49), (2-50), (2-51), (2-52), respectively. Introduce the notation

$$\alpha^2 = \frac{N}{D_0 \left(1 - \frac{N}{S}\right)}. \quad (2-53)$$

As $N = \lambda$ it is easy to show that the reciprocal of the least eigenvalue of the eigenvalue problem

$$w_D'''' - \lambda \left(\frac{w_D''''}{S} - \frac{w_D''}{D_0} \right) = 0, \quad (2-54)$$

$$w_D(0) = w_D''(0) = w_D(H) = w_D'(H) = 0 \quad (2-55)$$

is equal to $1/\lambda_1 + 1/\lambda_2$. This eigenvalue comes from the least positive solution of the characteristic equation

$$\tan \alpha H = \alpha H. \quad (2-56)$$

The eigenvalue problem (2-47), (2-48), however, leads to the characteristic equation

$$\left(1 + \frac{D_0}{S} \alpha^2\right) \tan \alpha H = \alpha H \quad (2-57)$$

where the coefficient of $\tan \alpha H$ is a number greater than 1. It follows that the least positive root of (2-57) is less than the least positive root of (2-56), and due to (2-56) the less α is, the less N (or λ) is; we obtain that the least eigenvalue λ_0 of the eigenvalue problem (2-47), (2-48) is less than the least eigenvalue $(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)^{-1}$ of the eigenvalue problem (2-54), (2-55)

$$\frac{1}{\lambda_0} > \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2},$$

that is, the *Föppl* method is on the unsafe side. Looking at the problem (2-47), (2-48), however, the explanation is not at all obvious. (*A*-orthogonality of the bending mode and the shearing mode does not occur, the operators in the problem are not symmetric, and the boundary conditions change with partial rigidizing of the bar.)

To resolve the paradox situation let us describe the problem using both the bending displacement w_D and the shearing displacement w_S explicitly. The equilibrium of the bar in a buckled shape can be written by the system of differential equations

$$D_0 w_D'''' + \lambda (w_D'' + w_S'') = 0, \quad (2-58a)$$

$$-S w_S'' + \lambda (w_D'' + w_S'') = 0, \quad (2-58b)$$

and the boundary conditions

$$w_D(0) = 0, \quad w_D''(0) = 0, \quad w_D(H) - \frac{D_0}{S} w_D''(H) = 0, \quad w_D'(H) = 0, \quad (2-59a)$$

$$w_S(0) = 0, \quad w_S(H) + w_D(H) = 0. \quad (2-59b)$$

By introducing the notation

$$A_{11} w_D = D_0 w_D'''' , \quad (2-60a)$$

$$A_{22} w_S = -S w_S'' , \quad (2-60b)$$

$$B_{11} w_D = -w_D'' , \quad (2-60c)$$

$$B_{22} w_S = -w_S'' , \quad (2-60d)$$