Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Escuela de Ingeniería Acústica

Profesor Patrocinante:
Jorge Santamarina Viapiana
Instituto de Física de la
Universidad Austral de Chile

Profesor Co-patrocinante:
David Ulloa Guzmán
Laboratorio de Glaciología
y Cambio Climático,
Centro de Estudios Científicos.

Simulación de propagación de ondas sonoras con aplicaciones en Acústica Subacuática

Tesis presentada como parte de los requisitos para optar al Grado Académico de Licenciado en Acústica y al Título Profesional de Ingeniero Acústico.

Mario Enrique Veloso Alarcón
Valdivia-Chile
2007

Sr. Jorge Santamarina Viapiana

Profesor Patrocinante

Sr. David Ulloa Guzmán

Profesor Co-patrocinante

Sr. Jorge Arenas Bermúdez

Profesor Informante

Agradecimientos

A continuación quisiera agradecer a todos los que de alguna u otra forma hicieron posible concretar este trabajo.

En primer lugar quisiera agradecer a mi familia que siempre ha estado a mi lado y ha sido el pilar fundamental en mi vida. A mi madre, por todo el esfuerzo, amor y confianza que me permitieron hacer posible la realización de mis estudios. A mi padre y hermana, por su apoyo incondicional en todo momento. A mi tía Nora, por la preocupación y el afecto entregado todos estos años.

A ti Natalia, gracias por el amor, comprensión y fuerza que me haz dado en todo este tiempo. Gracias por ser mi pareja, compañera y amiga.

Al profesor Jorge Santamarina por guiarme hacia nuevos horizontes en el conocimiento y enseñarme el significado de la pasión por enseñar.

A Gino Casassa y David Ulloa por acogerme en el departamento de Glaciología del Centro de Estudios Científicos y apoyarme en todo momento durante el desarrollo de mi tesis.

A todos los miembros del departamento de Glaciología y Cambio Climático del CECS con quienes he compartido durante el tiempo en el que he desarrollado este trabajo

A Steven Willison del departamento de Física Teórica del CECS, por siempre tener una muy buena disposición ante las consultas realizadas.

Finalmente agradecer a mis amigos con los cuales he compartido todos estos años de estudio especialmente a Juan Acuña, Andrés Carú, Héctor Estrada, Alejandro Gómez, Daniel Mena, Gonzalo Pacheco, Mauricio Roa, Daniel Sánchez y Ramón Torrealba, gracias amigos.

Dedicado a la memoria de mi abuelo Jorge

Contenidos

Resumen……. **VII**

Abstract…….. **VIII**

Objetivos……. **IX**

Objetivos Generales……... IX

Objetivos específicos……. IX

Introducción……... **1**

Propagación del sonido en el océano…… **7**

1.1 La velocidad del sonido……... 7

1.2 Ley de Snell……. 8

1.3 Perfiles de velocidad del sonido (Sound speed profiles)……. 11

1.4 Canal sonoro profundo (Deep sound channel) ……..... 13

1.5 Camino acústico confiable (Reliable acoustic path)…… 14

1.6 Propagación en el conducto superficial…… 16

1.7 Propagación en la zona de convergencia……. 18

1.8 Propagación despedida desde el fondo…… 19

Ecuación de onda……... **21**

2.1 Leyes de conservación y ecuación de estado para acústica……. 21

2.1.1 Segunda ley de Newton para acústica……... 22

2.1.2 Conservación de la masa acústica……. 23

2.1.3 Ecuación de estado para acústica…….. 25

2.2 Propagación de ondas en tres dimensiones…….. 25

2.3 Ondas omnidireccionales en coordenadas esféricas…… 28

2.4 Atenuación……... 31

2.4.1 Ondas en un medio con absorción…… 33

Refracción del sonido…… **37**

Arreglos lineales…… **40**

4.1 El dipolo……... 40

4.2 Arreglos de fuentes discretas……... 43

4.2.1 Variación de espacio entre elementos del arreglo lineal……..... 45
4.2.2 Variación de número de elementos de arreglo lineal……. 46
4.2.3 Desfase entre elementos de arreglo lineal…….. 48
Método de diferencias finitas…… **51**
5.1 Grillas de diferencia finita……. 51
5.2 Aproximación de derivadas mediante diferencias finitas…….. 53
5.3 Propiedades de ecuaciones de diferencia finita……. 58
5.3.1 Consistencia y orden…….. 59
5.3.2 Estabilidad…….. 59
5.3.3 Convergencia…….. 59
Simulación de propagación de ondas a partir del MDF…… **60**
6.1 Aproximación de ecuación de ondas por el MDF……. 60
6.2.1 Análisis de consistencia y orden……..... 61
6.2.2 Estabilidad de aproximación…….. 63
6.2.3 Convergencia de aproximación…….. 68
6.2 Condiciones iniciales……..... 68
6.3 Fuente……..... 68
6.4 Condiciones de contorno……... 70
6.5 Dispersión por grillas……..... 72
6.6 Costo computacional……. 73
6.6.1 Discretización de los dominios (cantidad de puntos de grilla)……... 73
6.6.2 Lenguaje de Programación……. 73
6.7 Plataforma de desarrollo…… 74
Resultados……... **76**
7.1 Simulación de propagación de ondas en medio con atenuación……... 76
7.2 Simulación de campo sonoro emitido por arreglos lineales en medio homogéneo……... 88
7.2.1 Directividad del arreglo en función de espacio entre elementos……..... 88
7.2.2 Directividad del arreglo en función del número de elementos……... 93
7.2.3 Directividad del arreglo en función del desfase entre elementos…….. 95

7.3 Simulación de propagación de ondas sonoras en dos medios con distinto valor de propagación del sonido……... 101
7.4 Simulación de propagación de ondas sonoras en medio estratificado……... 103
Conclusiones y comentarios…….. **107**
Anexo 1……... **111**
Anexo 2……... **115**
Referencias……. **116**

Resumen

La propagación del sonido en el océano es una herramienta de gran utilidad a la hora de extraer información en forma remota desde el interior, fondo y superficie del mar. Existe una gran variedad de dispositivos que utilizan el principio acústico para extraer información desde el océano. Dichos equipos se denominan “sistemas de SONAR” (Sound Navigation And Ranging) y son desarrollados para distintas finalidades (detección de objetos bajo el agua, pesca, batimetría, morfología del fondo marino, perfiles de subsuelo marino, etc.).

Para el desarrollo de dispositivos acústicos de percepción remota, es fundamental conocer en forma detallada las propiedades físicas que gobiernan el comportamiento del sonido en el medio a través del cual se propaga. Estas propiedades, sumadas a un modelo matemático capaz de describir el fenómeno de propagación de ondas (ecuación de onda), permiten pronosticar el comportamiento del sonido en el medio.

Uno de los métodos de aproximación numérica utilizados para la simulación de distintos fenómenos físicos es el método de diferencias finitas (*MDF*). Este método consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas, a través del cual los valores de la variable dependiente son asignados a un número limitado de puntos. Para la representación de la propagación de ondas, el método entrega una aproximación en forma discreta de la ecuación de onda. Dicha aproximación a su vez, permite realizar simulaciones computacionales del fenómeno de propagación de ondas en un determinado medio, entregando de esta forma datos numéricos del campo sonoro a distintos instantes de tiempo.

En el presente trabajo se exponen distintas simulaciones de los campos sonoros emitidos por fuentes puntuales y arreglos lineales a partir del *MDF* en medio homogéneo y estratificado. Esto fue desarrollado con el fin de representar un modelo realista del fenómeno de propagación de ondas en medio marino y así contribuir al desarrollo de equipamiento acústico subacuático.

Abstract

The sound propagation in the ocean is a very useful tool when data is acquired from the bottom, inside and the surface of the sea in remote way. It exists a wide variety of equipments which use the acoustic principles to extract information from the ocean. These systems are called “SONAR systems” (Sound Navigation And Ranging) and they are developed for different purposes such as underwater object detection, fishing, bathymetry, sea bottom morphology, sea sub-bottom profiles, among others.

In designing acoustic devices for remote sensing, it is fundamental to know in a detailed manner the physical properties that govern the sound behaviour in the propagation medium. These properties plus a mathematical model that is able to describe the wave propagation phenomena (wave equation), allow to predict the sound behaviour in the media.

One of the numerical approaches used for simulating different physical phenomena is the finite difference method (*FDM*). This method consists in an approximation of partial derivatives by algebraic expressions, through which the values of the dependent variable are assigned to a limited number of points. For the representation of the wave propagation, the method gives a discretized approximation of the wave equation. Thereby this approximation allows to carry out simulations of the wave propagation phenomena in a given media, resulting in numerical data from the sound field at different times.

Some *FDM* simulations of sound fields radiated by point sources and linear arrays, in homogeneous and stratified media are presented in this study. This has been developed to represent a realistic wave propagation model phenomena in marine media in order to contribute to the development of underwater acoustic equipment.

Objetivos

Objetivos Generales

- Realizar un modelo representativo del fenómeno de propagación de ondas sonoras a través de un medio a partir del método de diferencias finitas.
- Otorgar una herramienta útil al diseño y desarrollo de equipamiento acústico subacuático a partir de dicho modelo.

Objetivos específicos

- Incorporar a la aproximación por diferencias finitas de la ecuación de onda la atenuación de señal producida por el medio marino a determinadas frecuencias.
- Simular el campo sonoro emitido por arreglos lineales en un medio homogéneo.
- Modelar el campo sonoro producido por una fuente puntual situada en un medio con dos distintos valores de velocidad de propagación sonora.
- Representar la propagación de ondas sonoras en un medio estratificado.

Introducción

La oceanografía física, como ciencia experimental, basa su método en la obtención de la información directamente del océano. Uno de los fenómenos físicos utilizados para obtener dicha información es la propagación del sonido. La rama de la acústica usada para cumplir con tales propósitos lleva por nombre *acústica oceanográfica*.

La acústica oceanográfica es el uso pasivo o activo del sonido en el estudio de los parámetros físicos, comportamiento de especies y procesos que ocurren en el océano. En algunos casos el equipamiento es diseñado sólo para aprender y extraer información del océano y sus fronteras. En otras investigaciones, un sonido natural en el océano es analizado para revelar características físicas o biológicas de una fuente sonora.

El nacimiento de ésta disciplina se remonta al año 1912, cuando el navío *TITANIC* colisiona con un iceberg. Las pérdidas de cientos de vidas impulsaron a que el ser humano hiciera uso del sonido para la detección de reflectores en el océano. Dentro de un mes se presentaron dos aplicaciones patentadas por L. R. Richardson en el Reino Unido. Estas aplicaciones consistían en la detección de grandes objetos bajo el agua por medio del eco de ondas de compresión. La idea básica fue que el conocimiento preciso de la velocidad de propagación del sonido en el agua y el tiempo de viaje de las ondas sonoras, permitían realizar el cálculo de la distancia hasta el reflector. Para el año 1935 el sondeo acústico ya estaba siendo utilizado para determinar la profundidad del océano y para la pesca (detección de cardúmenes). Investigaciones más recientes han mostrado que el carácter físico y espacial de los reflectores puede ser deducido de características estadísticas del sonido reflejado. De esta manera es posible obtener imágenes de alta resolución a grandes rangos en agua turbia.

Para cumplir con los diversos requerimientos que demanda la investigación del océano es necesario tener un equipamiento capacitado para la medición. Dentro de dicho equipamiento, se encuentra el sistema de *SONAR* (SOund NAvigation And Ranging), el

cual utiliza la propagación de ondas sonoras bajo el agua tanto para conocer las características del océano como para la detección, ubicación y clasificación de blancos acústicos.

Los sistemas de sonar son ocupados para mediciones remotas del interior del océano, lo que se encuentra en él, la superficie del mar, el fondo y la estructura bajo este fondo. Muchos sistemas especializados han sido desarrollados para cumplir con estos propósitos. Décadas de desarrollo han mejorado la resolución espacial y temporal de los sistemas de sonar. Tales equipos son utilizados en distintas áreas, dentro de las cuales la investigación científica, las aplicaciones militares y la industria pesquera son las que demandan mayores requerimientos.

El equipamiento de sonar puede ser dividido en sistemas activos y en sistemas pasivos. En técnicas activas de acústica subacuática, un sistema sonoro es diseñado esencialmente para obtener un tiempo de propagación preciso generalmente sobre un gran rango o datos detallados de los ecos de la señal para un posterior análisis. Por otro lado, los métodos pasivos toman ventaja de los sonidos naturales encontrados en el mar y la comprensión física de los procesos, para evaluar los parámetros del océano que causan el sonido.

Existen diversos equipos de sonar que son utilizados para extraer variada información desde el océano. A continuación se detallan algunos de estos sistemas.

Eco Sonda

El sistema de sonar más común es la eco sonda. Este es usualmente utilizado para determinar la profundidad del fondo marino, la distancia de objetos o biomasa inmersos en el océano. El equipo emplea un generador y amplificador de señal eléctrica llamado transmisor, un transductor para convertir la señal eléctrica en sonido, otro transductor para convertir el sonido en señal eléctrica y un circuito receptor. Muchos sistemas de sonar utilizan el mismo transductor para la transmisión y recepción de señal. Dicho equipamiento

posee una ganancia variable (STC, Sensibility Time Control) en el tiempo para compensar la atenuación del eco debido a las pérdidas por propagación. La figura 1 muestra una imagen de resultados obtenidos a partir de una ecosonda.

Figura 1. *Imagen de resultados obtenidos a partir de una ecosonda (medición de profundidad).*

Sonar de barrido lateral

El sonar de barrido lateral es un sistema de ecosonda que apunta hacia los lados. Sin embargo, aunque el concepto de diseño es el mismo que para una simple ecosonda, el transductor transmisor produce un haz en forma de abanico, y el transductor receptor posee una ganancia variable en el tiempo para compensar las pérdidas por propagación. El explorador lateral utiliza un arreglo de fuentes que emite pulsos hacia el fondo marino con un gran ángulo de radiación en el plano perpendicular a la trayectoria del sensor. La intensidad de las reflexiones acústicas que provienen del fondo marino es grabada y trazada en una serie de franjas, las cuales agrupadas a lo largo de la dirección de movimiento del equipo logran formar la imagen del fondo marino. En la figura 2 se muestran imágenes obtenidas a partir de un sonar de barrido lateral.

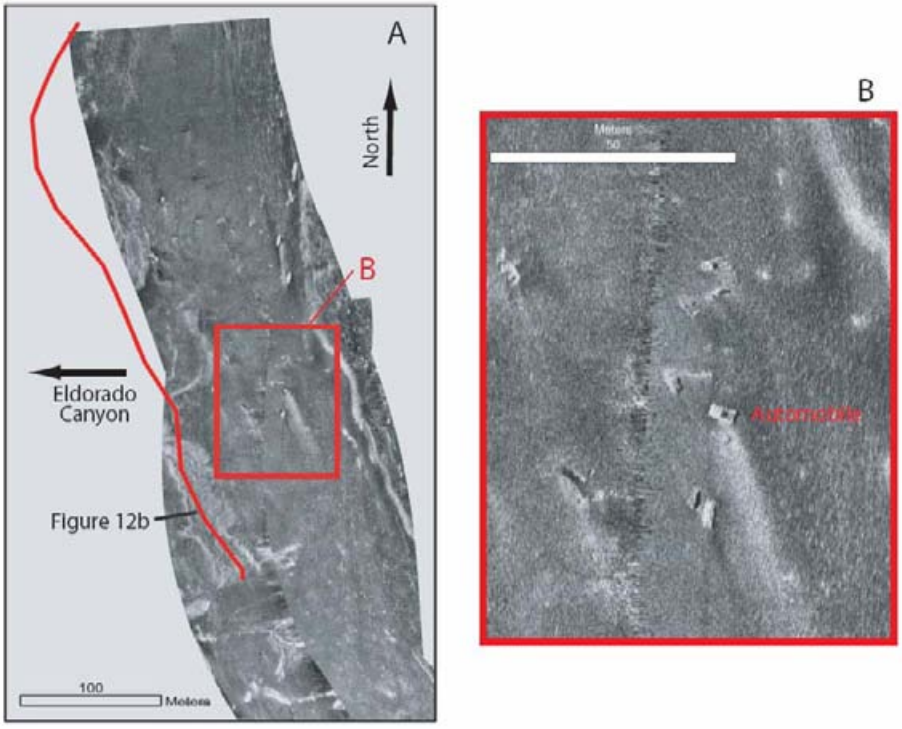


Figura 2. *Imágenes de sonar de barrido lateral obtenidas en el lago Mohave, Nevada, EE.UU.*

Perfilador de subsuelo marino

Este equipo es un poderoso sistema de baja frecuencia similar a la ecosonda, diseñado para extraer perfiles de las capas por debajo del fondo marino. La figura 3 ilustra los resultados obtenidos a partir de un perfilador de subsuelo marino.

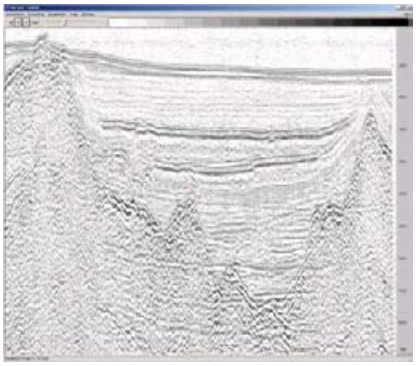


Figura 3. *Imagen de los datos obtenidos por un perfilador de subsuelo marino.*

Perfilador de corrientes submarinas basado en efecto Doppler (*ADCP*).

El *ADCP* (Acoustic Doppler Current Profiler) es un equipo que entrega componentes de velocidad del agua en distintas capas de una columna de agua. Este aparato transmite señales a una frecuencia determinada y capta los ecos retornados por los microreflectores que se encuentran en el mar (plancton, burbujas y otras partículas en suspensión). Las nubes de partículas se mueven a la misma velocidad horizontal promedio de la corriente de agua. Esto produce un corrimiento de frecuencia en la señal reflejada que depende de la velocidad de las partículas reflectoras respecto a la fuente emisora (efecto Doppler). El equipo consiste en cuatro transductores simétricamente dispuestos sobre una base. A partir de los datos obtenidos por estos transductores es posible conocer el campo de velocidades en el interior de la columna. La figura 4 ilustra la imagen de un *ADCP*.

Figura 4. *Imagen de un perfilador de corrientes submarinas basado en efecto doppler.*

Para el diseño, desarrollo y construcción de equipamiento de sonar es necesario hacer un análisis minucioso de los requerimientos que debe cumplir dicho dispositivo para alcanzar los propósitos para los cuales es creado. Una herramienta de gran valor a la hora de confeccionar equipamiento acústico subacuático es la representación del fenómeno real a partir de un modelo matemático capaz de describir la propagación de ondas sonoras en un medio determinado. Dicho modelo más las características físicas del medio (salinidad, perfiles de temperatura, perfiles de velocidad del sonido, etc.), hacen posible obtener un

pronóstico detallado del campo de presión sonora producido por fuentes de distintas características situadas en el medio.

Para llevar a cabo una simulación del fenómeno de propagación de ondas en un medio pueden ser utilizados diversos recursos matemáticos. En el transcurso de los años se han planteado variadas maneras de llevar a cabo la representación de la propagación del sonido en medio marino. Steward [15] entrega simples ejemplos de simulaciones a través de la teoría del rayo. Por otro lado existen representaciones de un tipo más complejo que usan recursos matemáticos como el modelo presentado por Athanassoulis [1], quien utiliza el método de elementos finitos (*MEF*) y Villareal[16] quien simula el fenómeno a través del método de diferencias finitas (*MDF*). Estos últimos métodos pueden ser considerados como las aproximaciones más directas para realizar un modelamiento real de propagación de ondas en un medio complejo. Los recursos matemáticos ya comentados en conjunto a la gran cantidad de cálculos que puede realizar un computador actual, convierten a la simulación en una potente ayuda que contribuye al diseño de equipamiento acústico.

En el presente trabajo fue utilizado el método de diferencias finitas para obtener las aproximaciones matemáticas de la ecuación de onda con lo que fue posible calcular la distribución de presión sonora en un dominio espacial a distintos instantes de tiempo.

Propagación del sonido en el océano

El océano es un medio de propagación extremadamente complicado para la propagación de ondas sonoras, debido a su naturaleza no homogénea. A pesar de esto, la absorción y dispersión de las ondas sonoras en el agua es mucho menor que en las ondas electromagnéticas, y es por ésta razón que dichas ondas son particularmente utilizadas en equipamiento de percepción remota en medio marino. La no homogeneidad es una consecuencia de la variación de las propiedades físicas del medio (salinidad, presión, temperatura), en función de la posición. Estas a su vez dan lugar a los cambios de velocidad de propagación del sonido. La refracción, dispersión y la presencia de límites en el océano (superficie y fondo) muestran que, excepto a muy cortos rangos, las condiciones de campo libre no existen en el océano real.

Para el desarrollo de un modelo propagación del sonido confiable, el conocimiento del comportamiento de la velocidad de propagación sonora en el océano es fundamental. Gracias a tales modelos es posible pronosticar parámetros como pérdidas por propagación, trayectorias del sonido, alcance de la señal, entre otros. Estos pronósticos contribuyen al diseño y operación de equipamiento de sonar.

1.1 La velocidad del sonido

La velocidad del sonido en el océano depende de la presión hidrostática (profundidad), de la salinidad y de la temperatura. Existe una variedad de fórmulas empíricas para realizar este cálculo. A continuación se detallan dos aproximaciones de la variación de la velocidad del sonido en agua de mar en función de las variables mencionadas anteriormente.

1) Aproximación de Medwin [11]:

$$c = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016z \qquad (1.1)$$

para $0 \le T\ ^{o}C \le 35$

$0 \le Salinidad\ (ppt) \le 45$

$0 \le z\ (m) \le 1000$

2) Aproximación de Mackenzie [12]:

$$c = 1448.96 + 4.591T - 5.304\times10^{-2}T^2 + 2.374\times10^{-4}T^3 + 1.340(S-35) + 1.630\times10^{-2}z + 1.675\times10^{-7}z^2 - 1.025\times10^{-2}T(S-35) - 7.139\times10^{-13}T\,z^3 \qquad (1.2)$$

Para $z\ (m) \le 1000$

donde c es la velocidad de propagación del sonido (m/s), T es la temperatura (ºC), S es la salinidad (partes por mil) y z es la profundidad (m)

1.2 Ley de Snell

Una parte de la propagación de las ondas sonoras en agua de mar puede ser representada a partir de la ley de Snell. Esta describe la refracción de los rayos sonoros en un medio en donde la velocidad del sonido varía. La ley de Snell está dada por la siguiente expresión

$$\frac{sen\theta_1}{c_1} = \frac{sen\theta_2}{c_2} = a \qquad (1.3)$$

donde c_1 es la velocidad de propagación en el medio 1, θ_1 es el ángulo del rayo en el medio 1 con respecto a la normal a la interfase entre los dos medios, c_2 es la velocidad de propagación en el medio 2, θ_2 es el ángulo del rayo refractado con la normal a la interfase y a es el parámetro de rayo.

La figura 1.1 detalla la refracción de un rayo pasando entre dos medios con distintas velocidades de propagación sonora.

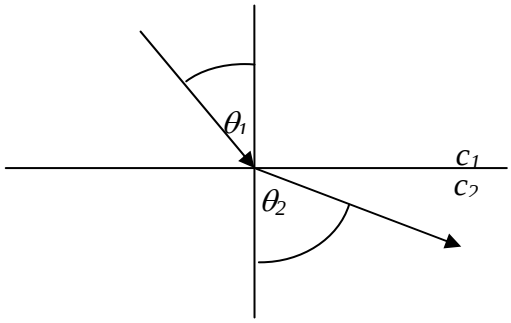


Figura 1.1. *Refracción de rayo entre dos medios con distintos valores de velocidad de propagación sonora.*

La figura 1.1 muestra el fenómeno de refracción del sonido producto del viaje de la señal entre dos medios con distintos valores de velocidad de propagación del sonido. La velocidad de propagación sonora del medio 1 está dada por c_1 y la velocidad de propagación sonora en el medio 2 está dada por c_2. El ángulo del rayo incidente con respecto a la normal a la interfase está representado por θ_1 y el ángulo del rayo refractado está representado por θ_2.

De acuerdo a la ley de Snell se observa que a medida que la velocidad del sonido crece con la profundidad el rayo sonoro se refracta hacia arriba. Del mismo modo si la velocidad del sonido disminuye, el rayo sonoro se refractará hacia abajo.

Si la velocidad del sonido varía continuamente con la profundidad, el medio a través del cual se propaga la onda sonora puede ser dividido en capas con distintos valores de velocidad de propagación del sonido.

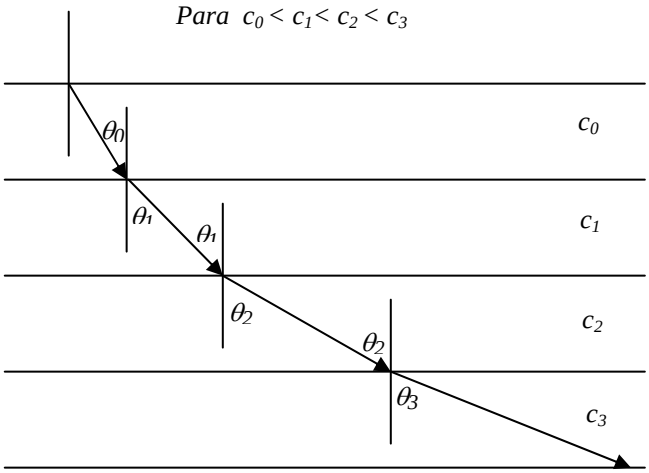


Figura 1.2. *Refracción de rayo en medio dividido en capas con distintos valores de velocidad de propagación sonora.*

La figura 1.2 muestra la refracción del sonido que viaja a través de un medio dividido en capas (medio estratificado). Cada capa posee un valor correspondiente de velocidad de propagación del sonido. El rayo sonoro viaja a través de la primera capa con un ángulo θ_0 con respecto a la normal de la interfase existente entre medios contiguos. Este rayo logra llegar al medio 3 con un ángulo refractado θ_3 con respecto a la normal de la interfase entre los últimos dos medios contiguos.

Si la velocidad continúa creciendo con la profundidad, el rayo se hará horizontal y el $sen\,\theta = 1$. La velocidad de propagación del sonido en donde esto ocurre es conocida como velocidad de vértice c_v.

$$\frac{sen\theta_0}{c_0} = \frac{1}{c_v} \tag{1.4}$$

1.3 Perfiles de velocidad del sonido (Sound speed profiles)

Los perfiles de velocidad del sonido (*SSP*) son gráficos que muestran los cambios de velocidad de propagación sonora en el océano en función de la profundidad. Los *SSP* dependen de la ubicación geográfica, de la estación, y de las condiciones meteorológicas. En muchas ubicaciones la salinidad puede ser considerada con un valor constante de 35 ppt (partes por mil), pero para otros ambientes existe distinta salinidad. En estuarios[1] cercanos la salinidad es altamente variable. En el Ártico el derretimiento del hielo cercano a la superficie tiene la más baja salinidad y en lugares del Báltico se encuentran salinidades muy bajas en todas las profundidades [17].

La temperatura del océano es la variable más fluctuante y difícil de determinar. Esta es usualmente medida con un instrumento conocido como batitermógrafo, el cual típicamente tiene una exactitud o resolución cercana a 0.25º C.

La velocidad del sonido se incrementa con la temperatura y con la profundidad. El agua que se encuentra cerca de la superficie está más caliente que el agua a mayor profundidad. De ésta manera profundidad y temperatura son dos tendencias que se oponen a medida que se va más hondo.

.-La velocidad del sonido decrece cuando decrece la temperatura
.-La velocidad del sonido crece cuando crece la presión.

El resultado de estas tendencias opuestas produce los *SSP*, los cuales varían ampliamente a raíz de los cambios diurnos y las mezclas de las capas superficiales ocasionadas por el viento y las olas. Los *SSP* se pueden dividir en las siguientes cuatro capas principales.

[1] Estuario: Región de interacción entre ríos y la orilla de océanos, donde la acción de la marea y el flujo del río mezcla el agua dulce con el agua salada. Por lo tanto los estuarios principalmente consisten en agua salobre

Capa superficial

Esta es una capa de agua isotérmica mezclada por la acción del viento sobre la superficie del océano. El sonido tiende a ser atrapado por las reflexiones de la superficie y las refracciones hacia arriba.

Termoclina estacional

En esta capa la temperatura decrece con la profundidad. Durante el verano y el otoño la termoclina es fuerte e identificable. En invierno y primavera se vuelve débil y se fusiona con la capa superficial.

Termoclina principal

Esta capa es poco afectada por las estaciones. Aquí es donde ocurre el aumento principal en temperatura sobre las profundidades frías del mar. Aunque la presión aumenta con la profundidad, el efecto neto de los cambios de temperatura y de presión reduce la velocidad del sonido en esta capa.

Capa isotérmica profunda

Tiene una temperatura constante cercana a los 4º C hasta el fondo marino. La velocidad del sonido se incrementa con el aumento de presión. En latitudes adyacentes a los polos esta capa se encuentra cercana a la superficie del mar y en el Ártico esta puede eliminar completamente a las otras capas.

La figura 1.3 se muestra las cuatro capas principales que se forman en océanos de aguas profundas. En esta figura se especifica la profundidad en metros que cubre cada capa.

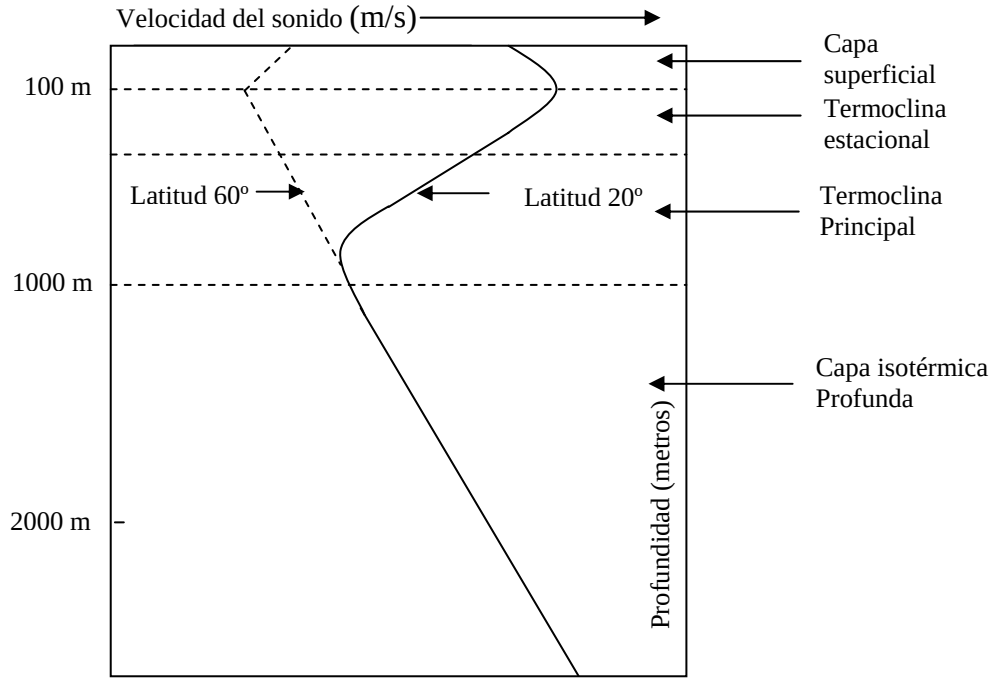


Figura 1.3. *Perfiles de velocidad del sonido en océano de aguas profundas. La figura muestra dos perfiles de velocidad de propagación del sonido formados en agua de mar a latitudes geográficas 20º y 60º respectivamente.*

1.4 Canal sonoro profundo (Deep Sound Channel)

Entre la gradiente negativa de la termoclina principal y la gradiente positiva de la capa profunda se encuentra el valor mínimo de la velocidad de propagación sonora, en donde el sonido tiende a ser enfocado por la refracción. La profundidad de este valor mínimo es conocida como canal sonoro profundo (*DSC*). Para explotar este canal, la fuente se coloca cerca del mínimo (el cual puede ser a solo unos pocos cientos de metros en latitudes polares). Debido a que la expansión del sonido es cilíndrica, es posible una propagación de muy largo rango. Los mejores resultados son alcanzados cuando el receptor está cercano al eje del canal. La figura 1.4 muestra un diagrama del rayo sonoro para una fuente colocada a una profundidad cercana al mínimo de la velocidad de propagación del sonido con un ancho de rayo vertical de 20º.

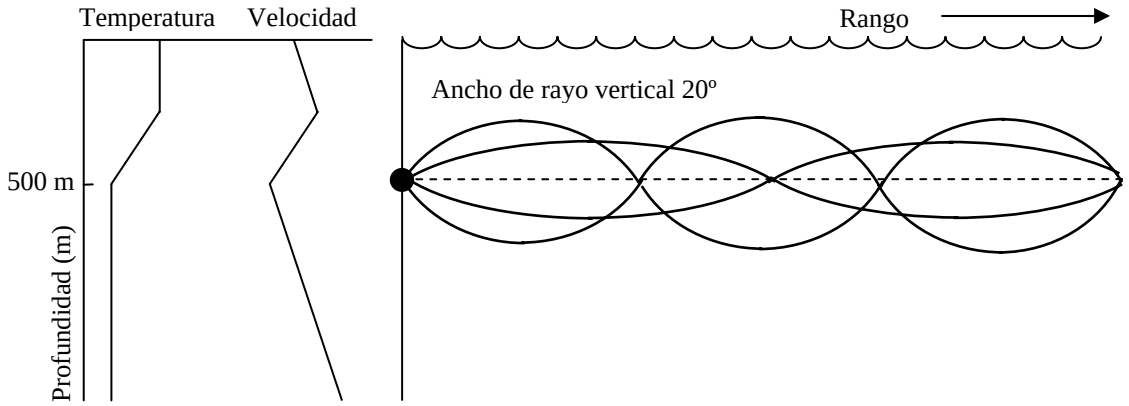


Figura 1.4. *Propagación de onda sonora en canal sonoro profundo.*

La figura 1.4 muestra la propagación del sonido a través del canal sonoro profundo. A la izquierda de dicha figura se detallan los perfiles de temperatura y velocidad de propagación sonora. El canal sonoro se encuentra a 500 metros de profundidad entre la gradiente negativa y la gradiente positiva de la velocidad de propagación sonora. Los rayos sonoros corresponden a una fuente con un ancho de haz vertical de 20º. La figura en general describe cual es la trayectoria del haz sonoro.

1.5 Camino Acústico confiable (Reliable Acoustic Path)

Al colocar una fuente sonora a determinadas profundidades del océano (a lo menos 1000m) se puede mejorar la detección de blancos que navegan a profundidades someras, como por ejemplo a las profundidades típicas en las que navegan los submarinos. Esta trayectoria es conocida como camino acústico confiable (*RAP*) ya que no es sensible a los efectos de la superficie variable (cambios en la salinidad y temperatura provocados por oleaje) y a las pérdidas en la profundidad. Las condiciones para un camino acústico confiable existen cuando la fuente es colocada a una profundidad crítica, donde la velocidad del sonido es igual a la velocidad del sonido en la superficie. La figura 1.5 muestra un esquema del camino acústico confiable.

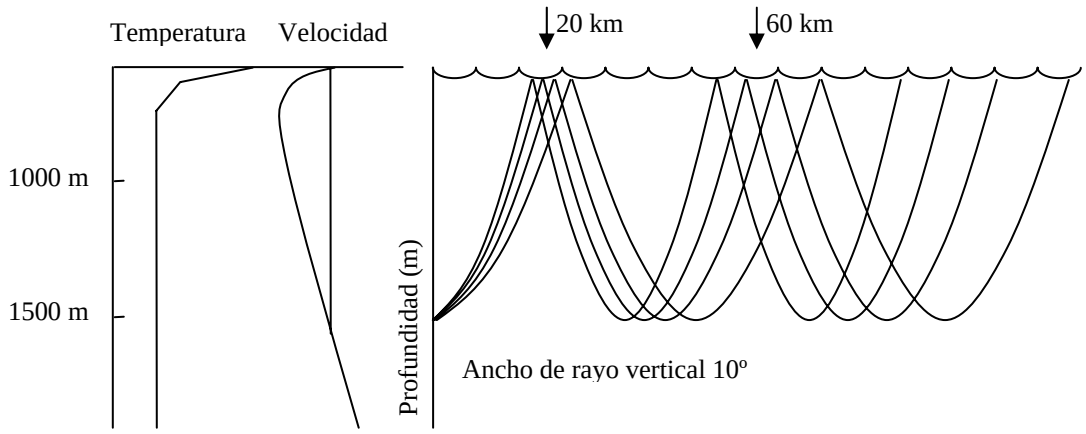


Figura 1.5. *Propagación sonora a través del camino acústico confiable.*

La figura 1.5 muestra la propagación de la señal sonora a través del camino acústico confiable. Al costado izquierdo de dicha figura son detallados los perfiles de temperatura y velocidad de propagación sonora. El haz sonoro es despedido a una profundidad de 1500 metros, donde la velocidad del sonido es igual a la velocidad de propagación sonora existente en la superficie. La figura en general muestra la trayectoria del haz sonoro emitido por una fuente de ancho de rayo vertical de 10º.

A latitudes polares el *DSC* puede estar cerca de la profundidad crítica del *RAP*. La capacidad de dirigir el rayo del sonar con una pendiente más pronunciada, así como la capacidad de desplegar el sonar a profundidades variables asistirá en la reducción de las zonas de sombra que de lo contrario existirían.

Las grandes profundidades a las cuales es necesario desplegar la fuente y el receptor (por lo menos a 500m del *DSC* y a 1000m del *RAP*) impone severos esfuerzos de ingeniería y movilidad sobre su uso. El diseño de elementos capaces de operar a grandes profundidades (por ejemplo a 1000 m) es dificultoso por no decir imposible y las pérdidas producto de los largos cables utilizados, limitarán los niveles de fuente alcanzables.

1.6 Propagación en el conducto superficial

Cuando los vientos de la superficie y las olas mezclan las capas poco profundas del mar, se produce una capa isotérmica en la cual el efecto de la presión domina y la velocidad del sonido se incrementa a medida que aumenta la profundidad. Esta capa conocida como conducto superficial, puede tener valores pequeños de profundidad como de 5m o tan grandes como de 200m. Los conductos típicos encontrados en las aguas más frías del mundo tienen valores de profundidad que se encuentran en el rango de 50 a 100m.

La figura 1.6 muestra el efecto sobre la propagación del sonido cuando una fuente se encuentra en el interior del conducto.

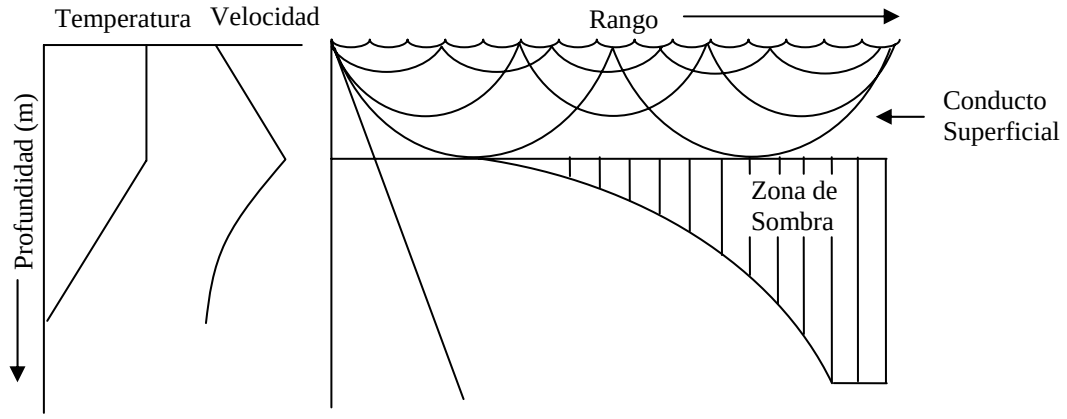


Figura 1.6. *Propagación del sonido a través del conducto superficial.*

La figura 1.6 representa la propagación de la señal sonora a través del conducto superficial. Al costado izquierdo de esta figura se presentan los perfiles de temperatura y velocidad de propagación sonora. El esquema muestra que el conducto superficial se forma a partir del cambio de una gradiente positiva a una gradiente negativa del perfil de velocidad del sonido. Como consecuencia el haz sonoro queda atrapado por la refracción del sonido hacia arriba dentro del conducto. Si ángulo del haz con respecto a la horizontal

crece, de manera que el haz logra traspasar el límite del conducto, este es refractado hacia abajo provocando una zona conocida como zona de sombra acústica.

Los rayos que son proyectados cerca de la horizontal son refractados hacia arriba y experimentan múltiples reflexiones en la superficie.

Por otra parte, los rayos que penetran la capa son refractados hacia abajo produciendo una zona (conocida como una zona de sombra) donde la energía sonora apenas penetra. A raíz de esto, los blancos que están dentro de la zona de sombra son difíciles de detectar.

Incrementando la profundidad de la fuente, tanto así, que esté por debajo de la capa, se produce un aumento del rango del punto de partida de la zona de sombra, pero esta zona se extiende hacia el conducto.

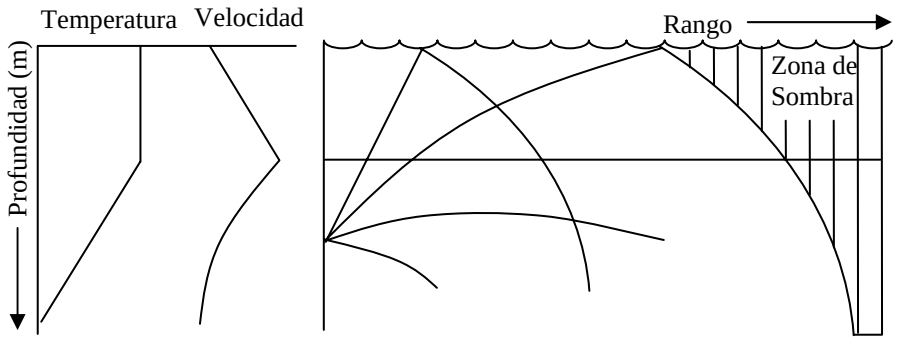


Figura 1.7. *Propagación a través del conducto superficial con fuente bajo el conducto.*

La figura 1.7 muestra un esquema de la propagación del sonido a través del conducto superficial para una fuente situada bajo éste conducto. Los perfiles de temperatura y velocidad del sonido son detallados a la izquierda de la figura. El haz sonoro es emitido hacia arriba por una fuente que se encuentra bajo el conducto superficial. La señal al llegar a la superficie es reflejada y nuevamente traspasa el límite del conducto. De esta manera es posible incrementar la zona de sombra.

1.7 Propagación en la zona de convergencia

Los rayos proyectados a ángulos más abruptos de depresión, 5º o más, primero son inclinados hacia abajo, produciendo una zona de sombra. A grandes profundidades la presión curva estos rayos hacia arriba para formar piezas anulares de alta intensidad (ver figura 1.8), cada pieza anular es conocida como zona de convergencia (CZ). El agua puede ser bastante profunda para la refracción hacia arriba lo que evita que los rayos golpeen el fondo. Típicamente la profundidad debe ser mayor a 3000 m.

Dependiendo de la profundidad del fondo, la primera zona de convergencia ocurrirá cerca de los 30-50 Km y será de un ancho de 3-5 Km.

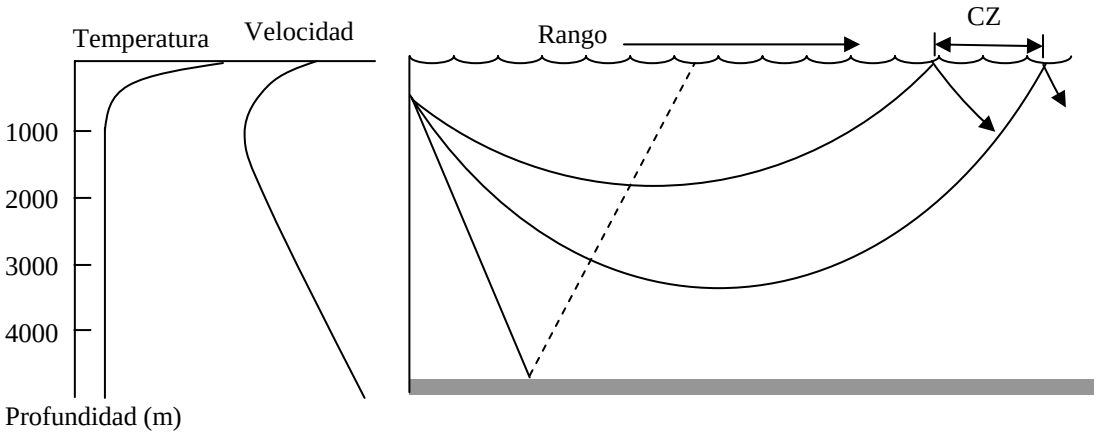


Figura 1.8. *Propagación en la zona de convergencia.*

En la figura 1.8 es posible observar un esquema de la propagación del sonido en la zona de convergencia. Al costado izquierdo son detallados los perfiles de temperatura y velocidad de propagación sonora. El haz sonoro es enviado hacia abajo, para luego ser refractado hacia arriba por efectos de la gradiente positiva de velocidad de propagación sonora.

La propagación es con expansión esférica (sin límites para confinar el sonido) y las pérdidas por absorción son apropiadas a una temperatura cercana a los 4ºC (la Tº sobre la mayor parte del camino) con una ganancia de convergencia de típicamente de 3-6 dB.

Existen zonas de convergencia sucesivas como múltiplos del rango original. Las pérdidas por propagación prohíben el uso de cualquiera de éstos rangos, tomando en cuenta sólo la primera zona de convergencia para sistemas activos[2], pero en sistemas pasivos[3] se pueden hacer detecciones a rangos cercanos a una segunda o aún tercera zona de convergencia.

1.8 Propagación despedida desde el Fondo

Los rayos desde una fuente acústica pueden ser alcanzados por un receptor a partir de las distintas trayectorias que recorren dichos rayos. Una de estas trayectorias es el modo de propagación despedida desde el fondo. En este caso el rayo del sonar es enfocado hacia abajo a ángulos con mucha pendiente con respecto a la horizontal. La efectividad del modo es determinada de acuerdo a la naturaleza del fondo marino, ya que este puede ser absorbente o reflectante, y además las pérdidas provocadas por el fondo dependen del ángulo de incidencia. Como en la zona de convergencia, aquí existe un rango anular, el cual varía con el ángulo de depresión del rayo del sonar, y a pequeños ángulos de incidencia este rango puede ser muy amplio. No existe ganancia de enfoque y las pérdidas de reflexión producidas por el fondo varían entre 10 a 20 dB. Por lo tanto el modo demanda mucho en lo que se refiere a potencia del proyector y al tamaño del arreglo (debido a las bajas frecuencias necesarias para limitar la absorción sobre las trayectorias de largo alcance).

La figura 1.9 muestra la propagación del sonido despedido desde el fondo. A la izquierda de dicha figura son detallados los perfiles de temperatura y velocidad de propagación del sonido. El haz sonoro es enviado hacia el fondo marino para luego ser reflejado en dirección a la superficie. La efectividad del modo depende de la naturaleza del fondo (fondo absorbente o reflectante).

[2] Sistema activo: Equipamiento utilizado para la proyección y recepción de señales sonoras bajo el agua.
[3] Sistema pasivo: Equipamiento sólo utilizado para la recepción de señales sonoras bajo el agua.

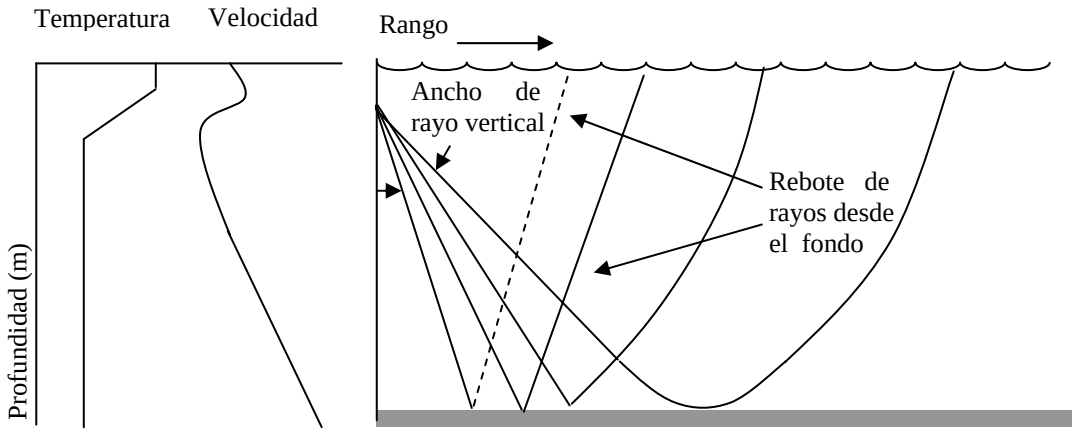


Figura 1.9. *Propagación despedida desde el fondo.*

Ecuación de Onda

El fenómeno de propagación sonora en un medio puede ser representado mediante una ecuación de derivadas parciales de segundo orden, conocida como ecuación de onda. Dicha ecuación describe la evolución del campo de presión sonora como una función del espacio y tiempo.

2.1 Leyes de conservación y ecuación de estado para acústica

Una perturbación en el medio causada por una expansión repentina de una fuente isotrópica pequeña produce un incremento de presión y densidad local, ya que el resto del medio no se mueve en forma instantánea. Si se considera una pequeña región a gran distancia de la fuente, donde la aproximación de onda plana es válida, las variaciones de presión, velocidad y aceleración de una partícula fluido en esta región, se pueden expresar en función de la dirección de propagación.

Se asume que la presión decrece a través de la región. La expresión de la presión total P_T se puede representar de la siguiente forma,

$$P_T = P_A + P \tag{2.1}$$

donde P_A es la presión estática o presión ambiental y P es el incremento de la presión acústica ($P << P_A$).

De manera similar la densidad total ρ_T es,

$$\rho_T = \rho_A + \rho \tag{2.2}$$

donde ρ_A es la densidad ambiental y ρ es el incremento de la densidad acústica ($\rho << \rho_A$).

2.1.1 Segunda Ley de Newton para Acústica.

En la figura 2.1 se muestra una partícula de agua en movimiento. La presión neta que actúa sobre la partícula de fluido en la dirección $+x$ es

$$presión\ \ neta = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\Delta x \tag{2.3}$$

Como consecuencia de esto, la fuerza neta está dada por

$$F_N = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{2.4}$$

Por otra parte, la masa de la partícula de agua está dada por $\rho_A \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, donde ρ_A es la densidad del ambiente.

De esta manera la segunda Ley de Newton puede ser detallada a partir de la siguiente expresión

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \rho_A\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{2.5}$$

o, simplemente

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \rho_A\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) \tag{2.6}$$

donde U representa la velocidad de partícula y $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ la aceleración local.

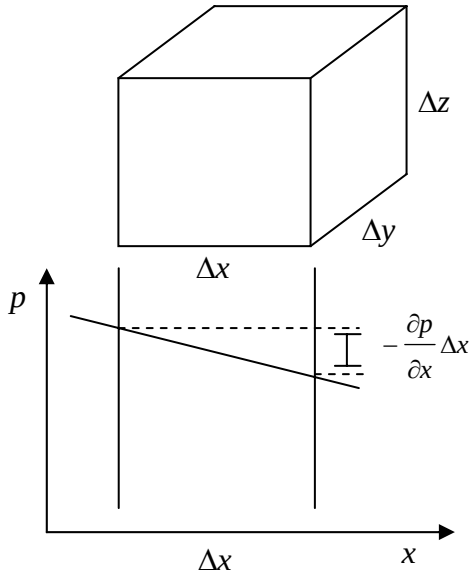


Figura 2.1. *Diferencia de presión causada por el movimiento de masa* $\rho_A \Delta x \Delta y \Delta z$ *hacia la derecha (coordenadas Lagrangianas[4]).*

2.1.2 Conservación de la masa acústica.

La expansión de la fuente causa un flujo de masa que se desplaza hacia afuera. Si se considera un pequeño cubo que se encuentra fijo en el espacio, dicha masa fluye hacia adentro de una de las caras y sale por otra. Ya que el fluido es compresible, una mayor cantidad de masa puede fluir hacia adentro de la que sale, y en consecuencia la densidad en el interior del cubo puede crecer. La figura 2.2 muestra el flujo de masa a través de un pequeño volumen.

[4] Sistema de coordenadas cuyos puntos de referencia están fijados a las partículas del fluido.

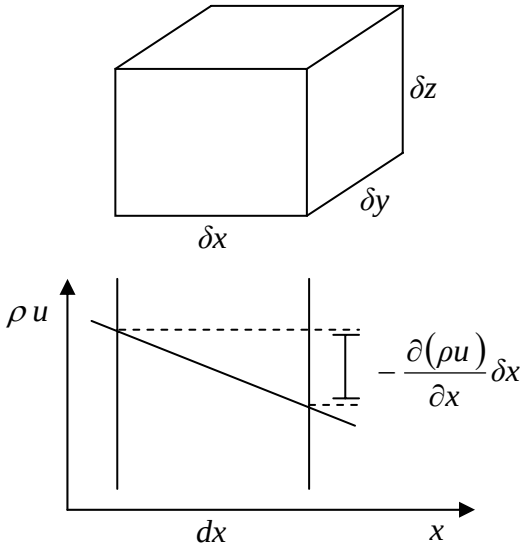


Figura 2.2. *Masa que fluye a través de un pequeño volumen δxδyδz (coordenadas eulerianas[5]); u es la componente de velocidad de flujo a lo largo del eje x; ρ_A es la densidad ambiental.*

La masa neta que fluye en el cubo por unidad de tiempo está dada por

$$m_N = -\left(\frac{\partial(\rho_T U)}{\partial x}\right)\delta x\delta y\delta z \tag{2.7}$$

Esto causa una tasa de incremento de la densidad que puede ser escrita como $\partial\rho_T/\partial t = \partial\rho/\partial t$, ya que ρ_A es constante en $\rho_T = \rho_A + \rho$.

Igualando las dos expresiones de cambio de masa se tiene

$$-\left(\frac{\partial(\rho_T U)}{\partial x}\right)\delta x\delta y\delta z = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\delta x\delta y\delta z \tag{2.8}$$

[5] Sistema de coordenadas en el que las propiedades de un fluido se asignan a puntos determinados del espacio en cada momento dado.

$$-\frac{\partial(\rho_T U)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.9}$$

Ya que para ondas acústicas $\partial \rho U / \partial x << \rho_A \partial U / \partial x$, la ecuación de conservación de masa queda

$$-\rho_A \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.10}$$

2.1.3 Ecuación de estado para acústica.

La ley de Hooke plantea que para un cuerpo elástico, la tensión es proporcional a la deformación. En la versión acústica de la Ley de Hooke, la tensión (fuerza por unidad de área) es la presión *P*, y la deformación (cambio relativo de dimensión) es el cambio relativo de densidad ρ / ρ_A. La constante de proporcionalidad es el modulo de elasticidad *E*. Excepto para intensos cambios de presión sonora, la Ley de Hooke se mantiene para los fluidos. La relación entre presión y densidad acústica es también conocida como ecuación acústica de estado. Esta se puede expresar de la siguiente forma

$$P = \frac{E}{\rho_A} \rho \tag{2.11}$$

2.2 Propagación de onda en tres dimensiones.

Para generar la ecuación de onda en tres dimensiones es necesario combinar los resultados que se obtienen a partir de cada una de las direcciones de coordenadas utilizadas.

En coordenadas rectangulares se generaliza la ecuación que nace a partir de la segunda ley de Newton, usando los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

$$\mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial x} = -\mathrm{i}\rho_A \frac{dU}{dt} \tag{2.12.a}$$

$$\mathrm{j}\frac{\partial P}{\partial y} = -\mathrm{j}\rho_A \frac{dV}{dt} \tag{2.12.b}$$

$$\mathrm{k}\frac{\partial P}{\partial z} = -\mathrm{k}\rho_A \frac{dW}{dt} \tag{2.12.c}$$

Ya que U se encuentra en función de x y de t, la derivada total dU/dt es encontrada usando derivadas implícitas.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} \tag{2.13}$$

Para las otras componentes se consideran expresiones similares. El primer término de la ecuación de la derecha es llamado aceleración local, y el segundo es conocido como aceleración convectiva.

Si $U = U(t - x/c)$, la aceleración convectiva es $U\dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{U}{c}\dfrac{\partial U}{\partial t}$.

En acústica lineal, se requiere que $U/c << 1$, y por lo tanto es valida la aproximación

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{2.14}$$

En consecuencia a lo anterior, la fuerza acústica en tres dimensiones puede ser expresada de la siguiente forma

$$\mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial P}{\partial y}+\mathrm{k}\frac{\partial P}{\partial z}=-\rho_A\left(\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial t}+\mathrm{j}\frac{\partial V}{\partial t}+\mathrm{k}\frac{\partial W}{\partial t}\right) \tag{2.15}$$

o, escrito de forma más simple

$$\nabla P=-\rho_A\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right) \tag{2.16}$$

donde $\mathbf{U} = \mathbf{i}U + \mathbf{j}V + \mathbf{k}W$

Seguido a esto, es generalizada la ecuación de conservación de masa acústica para el cálculo del cambio de densidad y el flujo de masa en el problema tridimensional

$$\frac{\partial(\rho_t U)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_t V)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho_t W)}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.17}$$

donde $\rho_T = \rho_A + \rho$ es la densidad total.

La expresión anterior escrita en forma simplificada está dada por,

$$\nabla \bullet (\rho_T \mathbf{U})=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.18}$$

donde

$$\nabla \bullet (\rho_T \mathbf{U})=\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet(\mathrm{i}\rho_T U+\mathrm{j}\rho_T V+\mathrm{k}\rho_T W) \tag{2.19}$$

es la divergencia de $\rho_T \mathbf{U}$.

Simplificando para $U/c = \rho/\rho_A << 1$, la ecuación de conservación de la masa acústica puede ser expresada de la siguiente forma

$$\rho_A(\nabla \bullet U) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.20}$$

Tomando la divergencia de la ecuación 2.16, la derivada con respecto al tiempo de ecuación 2.20 y considerando la ecuación de estado para acústica, es posible obtener como resultado la ecuación de onda en tres dimensiones en términos de presión acústica.

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{2.21}$$

donde ∇^2 representa al Laplaciano el cual toma diferentes formas de acuerdo al sistema de coordenadas utilizado.

El Laplaciano para coordenadas esféricas está dado por,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{2.22}$$

2.3 Ondas omnidireccionales en coordenadas esféricas

Una solución importante de la ecuación de onda es la onda de presión provocada por una fuente pulsante que irradia en forma isotrópica. En este caso, la ecuación de onda no depende de θ o ϕ y en consecuencia los últimos dos términos del Laplaciano para

coordenadas esféricas se hacen cero. De ésta manera la ecuación de onda para radiación omnidireccional queda dada por la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{2.23}$$

o, escrita de otra forma

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.24}$$

La ecuación anterior es idéntica a la versión unidimensional de la ecuación de onda, la cual tiene como solución $p = p_0(ct \pm x)$.

De forma similar es posible escribir la solución de la ecuación de onda omnidireccional en coordenadas esféricas como

$$pr = p_0 r_0 (ct \pm r) \tag{2.25.a}$$

o

$$p = \frac{p_0 r_0 (ct \pm r)}{r} \tag{2.25.b}$$

Si se considera que la solución es el producto entre una función radial y una función temporal,

$$p = P_0 \, \Pi(r) T(t) \tag{2.26}$$

donde

Π(r): Función radial.

T(t) : Función temporal.

P_0 : Valor de presión sonora constante.

Además, se puede asumir que para ondas sinusoidales, la función dependiente del tiempo se representa a partir de la siguiente expresión:

$$T = e^{i\omega t} \tag{2.27}$$

Al sustituir la ecuación 2.26 en la ecuación 2.23, se obtiene

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Pi) + k^2\Pi = 0 \tag{2.28}$$

donde $k = \omega/c$.

En este caso la ecuación de ondas radial posee dos soluciones independientes.

$$\Pi(r) = \frac{\cos(kr)}{r} \qquad \text{y} \qquad \Pi(r) = \frac{sen(kr)}{r} \tag{2.29}$$

En notación compleja, una onda sinusoidal propagándose hacia afuera se puede expresar de la siguiente forma.

$$p = \frac{p_0 r_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \tag{2.30}$$

donde la amplitud está escrita en términos de presión p_0 y distancia r_0.

2.4 Atenuación

Las base física en acústica de la atenuación de ondas sonoras en un medio homogéneo ya sea por absorción (conversión de energía en calor) o dispersión omnidireccional, es que una onda experimenta una reducción de su presión acústica dp, proporcional a la distancia que atraviesa dx y proporcional a la presión original p. Esto se puede representar de mediante la siguiente expresión.

$$dp = -\alpha_e \, p \, dx \tag{2.31}$$

donde α_e representa la constante de proporcionalidad. Al integrar esta expresión se obtiene,

$$ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\alpha_e x \tag{2.32}$$

o

$$\alpha_e = \left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(\frac{p_0}{p}\right) \qquad neper \big/ unidad\ de\ distancia \tag{2.33}$$

donde la constante de integración es evaluada tomando $p = p_0$ en $x = 0$. Otra forma de escribir esta igualdad está dada a continuación

$$P = P_0 e^{-\alpha_e x} \tag{2.34}$$

El coeficiente de decaimiento en *SI* tiene unidades de *nepers/unidad de distancia*. La distancia usualmente está dada en metros o kilómetros.

La tasa de atenuación para onda plana α_e, la cual depende del medio, es generalmente expresada como una función de la frecuencia. Comúnmente la atenuación por longitud de onda es muy pequeña ya que $\alpha_e\lambda << 1$, lo cual permite que la atenuación sea incluida no solamente para ondas planas sino que también para la propagación de presión de una fuente puntual. Por ejemplo, este factor puede ser incluido en la solución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas para una fuente que irradia en forma isotrópica.

$$P(t) = \frac{P_0(t - R/c)R_0 e^{-\alpha_e r}}{R} \tag{2.35}$$

Otra forma de representar el factor de atenuación es en decibeles por unidad de distancia. El factor de atenuación en dichas unidades es simplemente denominado α. En este caso el coeficiente de atenuación está escrito en términos de intensidad sonora relativa entre dos puntos del frente de onda. Esto puede ser expresado de la siguiente forma.

$$\alpha = \left(\frac{1}{x}\right)10\,log\left(\frac{i_1}{i_2}\right) \qquad dB \big/ unidad\ de\ distancia \tag{2.36}$$

o

$$\alpha = \left(\frac{1}{x}\right) 20 \log\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \qquad dB \big/ unidad\ de\ distancia \tag{2.37}$$

Esta última expresión se debe a que la intensidad sonora es proporcional al cuadrado de la presión. Comparando esta expresión con la ecuación 2.33 se encuentra que

$$1\ neper = 8.68\ dB \tag{2.38}$$

o

$$8.68\alpha_e = \alpha \tag{2.39}$$

2.4.1 Ondas en un medio con absorción

La propagación de ondas en un medio con absorción puede ser representada a través de la ecuación de onda más un elemento disipativo [5].

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + R\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \tag{2.40}$$

donde *R* representa la constante proporcionalidad para este nuevo término. De la misma forma, la ecuación de onda en coordenadas esféricas para radiación omnidireccional en un medio con absorción puede ser representada a partir de la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} + R\frac{\partial (rp)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = 0 \tag{2.41}$$

La solución para la ecuación de onda radial de una onda sinusoidal expandiéndose

(ecuación 2.30), incluyendo el factor de atenuación (ecuación 2.35) es,

$$p(r,t) = \frac{p_0 r_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} e^{-\alpha_e r} \tag{2.42}$$

para

$$\omega = 2\pi f \tag{2.43}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{2.44}$$

donde f es la frecuencia de la fuente sonora en *Hz*, c es la velocidad de propagación de la onda en el medio, p_0 es la amplitud de la presión y r_0 es la amplitud de la distancia.

Si se reemplaza esta solución en la ecuación 2.41, se puede obtener una expresión para el término *R*.

$$R = 2c\alpha_e + j\frac{(c\alpha_e)^2}{\omega} \tag{2.45}$$

Este término, de acuerdo a la igualdad detallada en la ecuación 2.39, también puede ser escrito como

$$R = 2c\left(\frac{\alpha}{8.68}\right) + j\frac{c^2\left(\frac{\alpha}{8.68}\right)^2}{\omega} \tag{2.46}$$

Relajación molecular en agua de mar

Un fluido requiere un tiempo finito para responder a un cambio de presión. Este proceso es conocido como *relajación*. La relajación química, la cual ocurre en agua de mar, envuelve

disociación iónica que es alternativamente activada y desactivada por la condensación y rarefacción del sonido. El sulfato de magnesio y el ácido bórico son los dos contribuyentes predominantes a la absorción sonora en el océano.

El resultado de investigación en laboratorio y en el océano ha sido resumido por Francois y Garrison (1982)[2][3]. Ellos entregan una fórmula empírica para la atenuación del sonido en agua de mar en la cual se incluyen dos términos de relajación y la componente de viscosidad.

$$\alpha = \frac{A_1 P_1 f_1 f^2}{f^2 + f_1^2} + \frac{A_2 P_2 f_2 f^2}{f^2 + f_2^2} + A_3 P_3 f^2 \qquad dB/km \tag{2.47}$$

donde α es el coeficiente de absorción total en *dB/km*. Los coeficientes son expresados en términos de z= profundidad (m); T= temperatura (ºC); S= salinidad (partes/1000); y las frecuencias de relajación son f_1 para el ácido bórico y f_2 para el sulfato de magnesio.

Componente de ácido bórico en agua de mar

$$A_1 = \frac{8.68}{c} 10^{(0.78\,pH-5)} \qquad dB\,km^{-1}\,kHz^{-1} \tag{2.48}$$

$$P_1 = 1 \tag{2.49}$$

$$f_1 = 2.8\left(\frac{S}{35}\right)^{0.5} 10^{[4-1245/(273+T)]} \qquad kHz \tag{2.50}$$

$$q = 1412 + 3.21T + 1.19S + 0.0167z \qquad m/s \tag{2.51}$$

Componente de sulfato de magnesio en agua de mar

$$A_2 = 21.44\frac{S}{c}(1+0.025T) \qquad dB\,km^{-1}\,kHz^{-1} \tag{2.52}$$

$$P_2 = 1-1.37\times10^{-4}z+6.2\times10^{-9}z^2 \tag{2.53}$$

$$f_2 = \frac{8.17\times10^{[8-1990/(273+T)]}}{1+0.0018(S-35)} \qquad kHz \tag{2.54}$$

Componente de viscosidad en agua pura para $T \le 20^{o}C$

$$A_3 = 4.937\times10^{-4}-2.59\times10^{-5}T+9.11\times10^{-7}T^2-1.50\times10^{-8}T^3 \qquad dB\,km^{-1}\,kHz^{-1} \tag{2.55}$$

Componente de viscosidad en agua pura para $T > 20^{o}C$

$$A_3 = 3.964\times10^{-4}-1.146\times10^{-5}T+1.45\times10^{-7}T^2-6.5\times10^{-10}T^3 \qquad dB\,km^{-1}\,kHz^{-1} \tag{2.56}$$

$$P_3 = 1-3.83\times10^{-5}z+4.9\times10^{-10}z^2 \tag{2.57}$$

En el Anexo 2 es posible encontrar una tabla de valores de atenuación para distintas frecuencias.

Refracción del sonido

Como se dijo anteriormente, la trayectoria de una onda sonora que se propaga en medio marino obedece a la ley de Snell, y si la velocidad de propagación sonora varía con la profundidad, el medio se puede dividir en distintas capas, cada una con un respectivo valor de propagación del sonido. Ya que la velocidad del sonido en cada capa se acerca a un valor constante, la trayectoria del rayo sonoro en dicha capa se puede aproximar a una línea derecha.

Si se tiene una fuente situada en una capa donde la velocidad de propagación sonora es igual a c_0, y el ángulo del rayo sonoro que despide la fuente con respecto a la normal es θ_0, de acuerdo a la ley de Snell el parámetro de rayo se puede expresar de la siguiente forma,

$$a = \frac{\sin\theta_0}{c_0} \tag{3.1}$$

Por otro lado, la ley Snell expresa que

$$\frac{\sin\theta_0}{c_0} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} = \ldots = \frac{\sin\theta_n}{c_n} \tag{3.2}$$

De acuerdo a esto, para una capa n-ésima se tiene que

$$\sin\theta_n = ac_n \tag{3.3}$$

$$\cos\theta_n = \sqrt{1-(ac_n)^2} \quad \text{para} \quad ac_n < 1 \tag{3.4}$$

$$tan\,\theta_n = \frac{ac_n}{\sqrt{1-(ac_n)^2}} \tag{3.5}$$

A partir del parámetro de rayo a es posible predecir la trayectoria del rayo sonoro en capas sucesivas de acuerdo a los distintos valores de velocidad de propagación sonora existentes en dichas capas.

De acuerdo a la ley de Snell es posible caracterizar la propagación de un frente de onda acústica mediante el esquema mostrado en la figura 3.1.

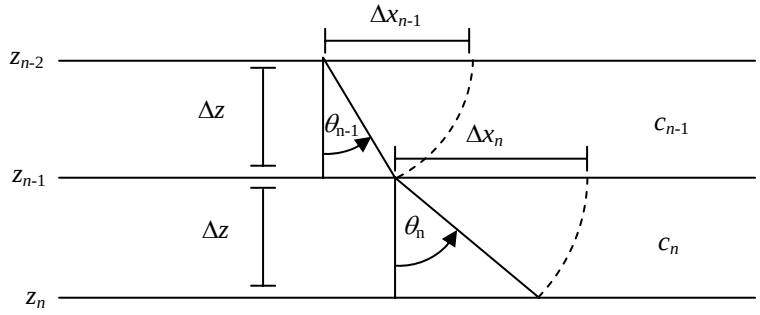


Figura 3.1. *Propagación del frente de onda de acuerdo a la ley de Snell. En la figura se muestra la refracción sonora producto de los cambios de velocidad del sonido.*

La componente de desplazamiento horizontal del rayo sonoro puede ser escrita de la siguiente forma

$$\Delta x_n = \Delta z_n\, tan\,\theta_n \tag{3.6}$$

o conforme con la expresión 3.5, esta ecuación puede ser representada de la siguiente forma

$$\Delta x_n = \Delta z_n \frac{ac_n}{\sqrt{1-(ac_n)^2}} \tag{3.7}$$

donde

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} \tag{3.8.a}$$

$$\Delta z_n = z_n - z_{n-1} \tag{3.8.b}$$

El tiempo de viaje del rayo en la capa n-ésima esta dado por

$$\Delta t_n = \frac{\Delta z_n}{c_n \cos\theta_n} \tag{3.9}$$

De acuerdo a la ecuación 3.4, esta expresión también se puede escribir de la siguiente forma

$$\Delta t_n = \frac{\Delta z_n}{c_n \sqrt{1-(ac_n)^2}} \tag{3.10}$$

Arreglos lineales

Un arreglo de fuentes es una configuración de elementos individuales los cuales son ordenados en el espacio y pueden ser usados para producir un patrón de radiación direccional. Los arreglos de transductores para proyección de señal son utilizados para incrementar la amplitud de dicha señal además de mejorar la directividad de la fuente sonora en una determinada dirección. Por otro lado, los arreglos de transductores para recepción de señal son diseñados para mejorar la respuesta de dicho arreglo en una determinada dirección. De esta forma es posible lograr un incremento en la relación señal ruido e indicar la dirección de la fuente sonora.

4.1 El Dipolo

El dipolo es una combinación de dos fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud con una separación pequeña entre ellos (tomando como referencia la longitud de onda de la señal emitida). Un ejemplo de un dipolo es una membrana oscilando, la cual simultáneamente crea una compresión al lado de una de sus caras y una rarefacción en el otro lado. Cuando la membrana revierte su oscilación la compresión es reemplazada por la rarefacción y la rarefacción por la compresión.

Físicamente esto puede ser visto como la radiación de dos monopolos fuera de fase con una cancelación completa de la presión a lo largo del plano perpendicular a la línea que une a los dos monopolos. Dicho de otra manera, la radiación de cada monopolo cancela parcialmente al otro.

La radiación de la membrana es mostrada en la figura 4.1.

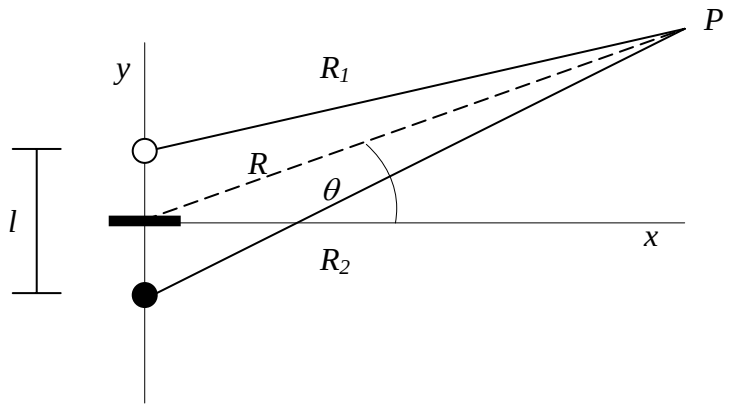


Figura 4.1. *Esquema de un dipolo ideal. Dos fuentes de igual amplitud pero de fase opuesta separadas por una distancia l, mucho menor que la longitud de onda de la señal emitida.*

En la figura 4.1 se muestra la radiación de un dipolo ideal. En dicha figura, l representa la separación entre los monopolos; P a un punto situado en la zona de campo lejano; R_1 la distancia desde el monopolo1 a P; R_2 la distancia desde el monopolo2 a P; R la distancia desde P hasta el punto equidistante a los dos monopolos situado en el eje del dipolo y θ al ángulo de R con respecto al eje perpendicular al dipolo

El campo de presión sonora emitido por el dipolo puede ser obtenido por la suma de dos fuentes puntuales de onda esférica que se encuentran fuera de fase. De acuerdo a la solución de la ecuación de ondas para una fuente ominidireccional en coordenadas esféricas, el campo de presión sonora del dipolo está dado por

$$P_d = P_0 R_0 \left[\frac{e^{i(\omega t - kR_1)}}{R_1} - \frac{e^{i(\omega t - kR_2)}}{R_2} \right] \tag{4.1}$$

Para grandes rangos, en lugar de la separación l de los monopolos, es utilizada la aproximación de Fraunhofer (Anexo1). De acuerdo a ésta aproximación, los rangos con respecto a cada monopolo pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$R_1 \approx R\left(1-\frac{l}{2R}\cos(\theta)\right) \qquad \text{y} \qquad R_2 \approx R\left(1+\frac{l}{2R}\cos(\theta)\right) \tag{4.2}$$

Para análisis en campo lejano, las pequeñas diferencias existentes entre R_1 y R_2 en los denominadores de la ecuación 4.1 no son relevantes y cada distancia puede ser aproximada a *R*. Al contrario de esto, para los términos kR_1 y kR_2 que se encuentran en las exponenciales, las diferencias entre los rangos es crucial ya que éstas determinan la fase y la interferencia entre las dos fuentes. Después de factorizar los términos comunes y considerando la condición $kl << 1$, el dipolo puede ser expresado de la siguiente forma.

$$P_d = \frac{P_0 R_0}{R} e^{i(\omega t - kR)}\left[ikl\cos\theta\right] \tag{4.3}$$

Esta ecuación representa a un monopolo multiplicado por $ikl\cos\theta$.

Cuando la atenuación del medio es incluida, la expresión anterior queda dada por

$$P_d = \frac{P_0 R_0}{R} e^{i(\omega t - kR)}\left[ikl\cos\theta\right] 10^{-\frac{\alpha R}{20}} \tag{4.4}$$

donde α representa el coeficiente de atenuación en el medio.

El dipolo produce dos efectos significativos en comparación con la radiación de los monopolos por separado. El primer efecto es que la presión irradiada es disminuida por el factor *kl*. El segundo efecto es que el patrón de radiación no es isotrópico ya que éste ahora tiene una directividad dada por $\cos\theta$, en donde θ es el ángulo con respecto al eje del dipolo. Este patrón tiene un máximo de presión sonora a lo largo de la línea del dipolo y presión sonora nula en el plano que se encuentra entre los polos. Dicho plano se encuentra perpendicular a la línea del dipolo.

4.2 Arreglos de fuentes discretas

La presión sonora producida por un arreglo de fuentes discretas como en fuentes sonoras de multielementos se adapta fácilmente a cálculos con sumatorias.

La figura 4.2 muestra un arreglo de *N* fuentes que se encuentran en fase y están uniformemente espaciadas sobre una distancia *W* en una línea derecha a lo largo del eje *y*. La separación *b* entre los elementos adyacentes está dada por,

$$b = \frac{W}{N-1} \tag{4.5}$$

La presión P_n de la n-ésima fuente a la distancia R y a un ángulo θ es

$$P_n = \frac{a_n P_0 R_0}{R} e^{i\left(\omega t - kR + \frac{nkW\sin\theta}{N-1}\right)} \left(10^{-\frac{\alpha R}{20}}\right) \tag{4.6}$$

donde a_n es el factor de amplitud adimensional de la n-ésima fuente; θ es el ángulo con el eje *x*, el cual es perpendicular a la línea del arreglo (figura 4.2); y α el coeficiente de atenuación en el medio.

Al igual que en el caso del dipolo, es utilizada la aproximación de Fraunhofer para campo lejano, y el denominador R_n es aproximado simplemente por el valor de *R*. De acuerdo a esto, la presión sonora total que irradia el arreglo está dada por la siguiente expresión.

$$P_T = D_t \frac{a_n P_0 R_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \left(10^{-\frac{\alpha R}{20}} \right), \qquad R >> W \tag{4.7}$$

donde D_t representa la respuesta de presión direccional o función de directividad de un transductor o arreglo de transductores. Esta función está representada por,

$$D_t = \sum_{n=1}^{N} a_n \, e^{\left(i \frac{nkW \sin\theta}{N-1} \right)} \tag{4.8}$$

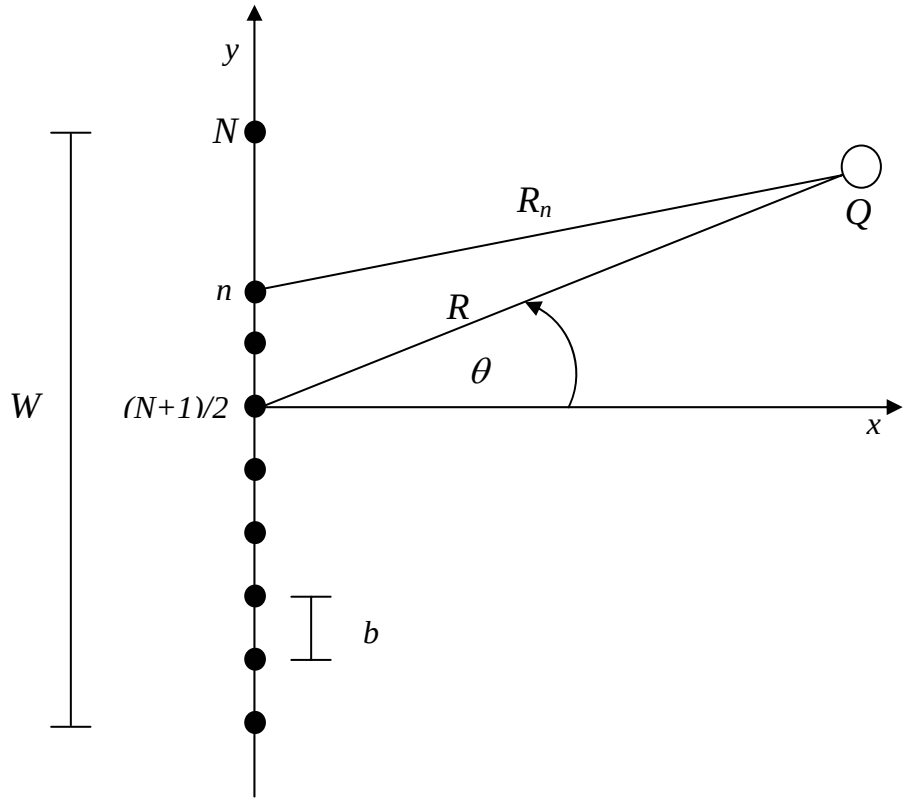


Figura 4.2. *Geometría para la directividad de un arreglo lineal de fuentes discretas. El arreglo posee una separación b entre los elementos que lo conforman. La posición Q representa a la posición del receptor.*

La expresión anterior también puede ser escrita en la forma $D_t = A + Bi$, donde

$$A = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{nkW\sin\theta}{N-1}\right) \tag{4.9}$$

y

$$B = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{nkW\sin\theta}{N-1}\right) \tag{4.10}$$

Así, la magnitud de la directividad del arreglo es encontrada a partir de

$$\left|D_t\right| = \left(A^2 + B^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.11}$$

Con las expresiones detalladas anteriormente, es posible analizar la respuesta direccional de arreglos lineales de fuentes omnidireccionales a partir de su diagrama polar.

4.2.1 Variación de espacio entre elementos del arreglo lineal

Los diagramas polares de un arreglo lineal de nueve fuentes espaciadas uniformemente, para distintos valores de distancia *b* entre fuentes son ilustrados en la figura 4.3.

Al igual que en el caso del dipolo, en dicha figura observa que el patrón de radiación de cada arreglo no es isotrópico. Todos los patrones presentan dos lóbulos principales los cuales muestran que los valores máximos de presión sonora se producen en la línea perpendicular al eje del arreglo excepto para el caso de la figura 4.3 d).

Las imágenes muestran que a medida que *b* crece, los lóbulos que se encuentran en el eje perpendicular a la línea del arreglo se vuelven más estrechos y la directividad de éste mejora. De las imágenes también se observa que con el incremento de *b* existe un aumento en la presencia de lóbulos secundarios.

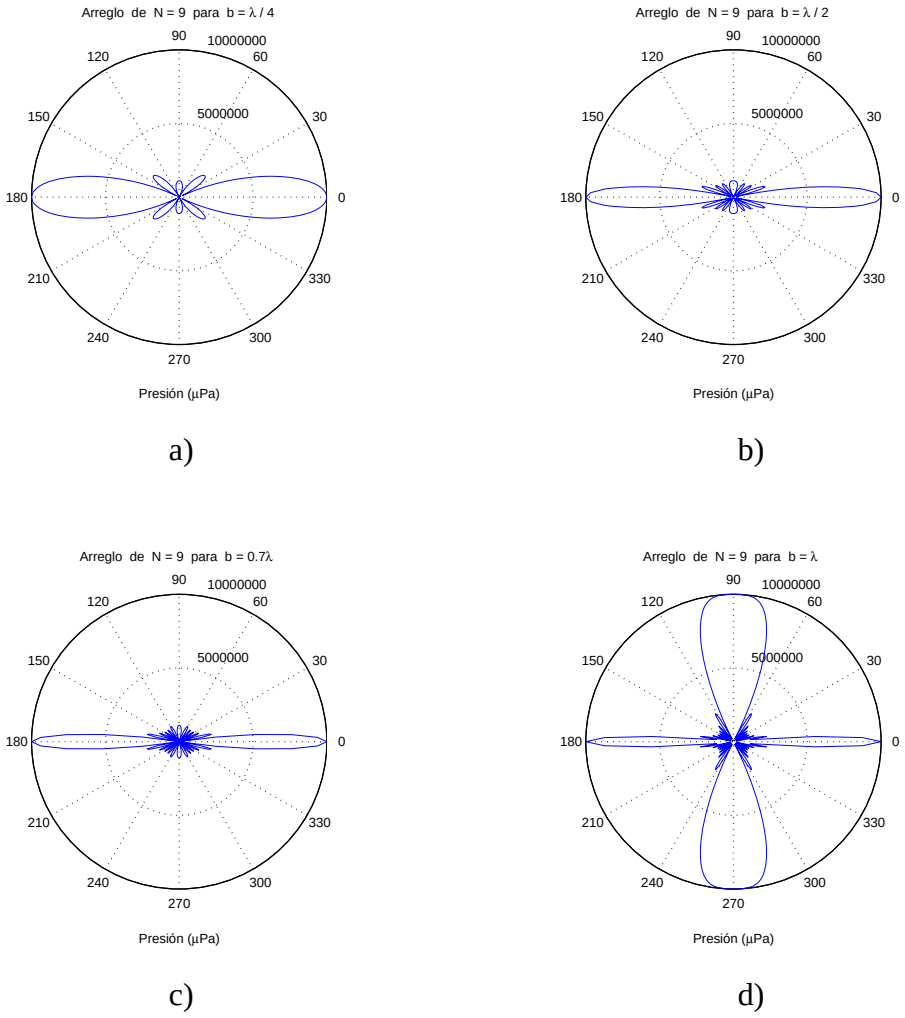


Figura 4.3. *Patrones de radiación de un arreglo lineal de 9 fuentes para distintos valores de distancia entre fuentes. a) Patrón de radiación para una distancia entre elementos b=λ/4. b) Patrón de radiación para una distancia entre elementos b=λ/2. c) Patrón de radiación para una distancia entre elementos b=0.7λ. d) Patrón de radiación para una distancia entre elementos b=λ.*

4.2.2 Variación de número de elementos de arreglo lineal

También puede ser analizada la respuesta direccional del arreglo lineal variando el número de fuentes.

A continuación se muestran los diagramas polares para arreglos lineales con distinto número de fuentes para una distancia $b = \lambda/2$ entre los elementos que lo componen.

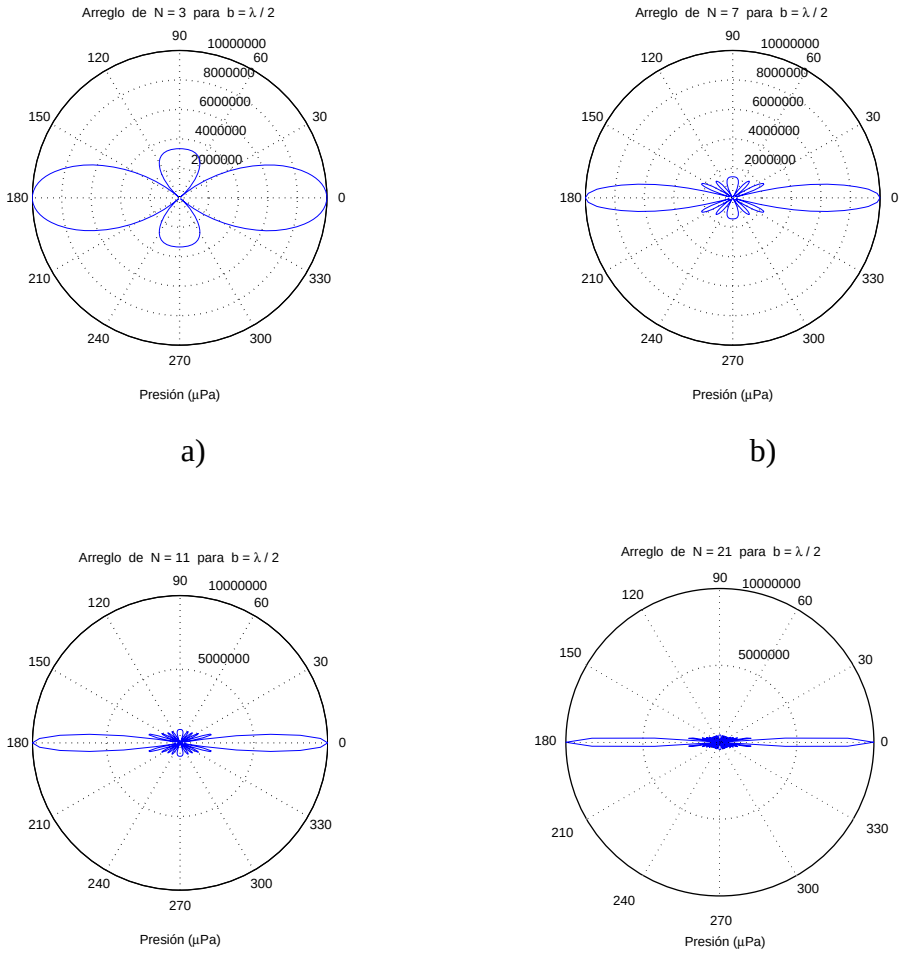


Figura 4.4. *Patrones de radiación de arreglos lineales con distinto número de fuentes para un espaciamiento uniforme* $b = \lambda/2$. *a) Patrón de radiación para una un arreglo lineal conformado por 3 elementos. b) Patrón de radiación para una un arreglo lineal conformado por 7 elementos c) Patrón de radiación para una un arreglo lineal conformado por 11 elementos. d) Patrón de radiación para una un arreglo lineal conformado por 21 elementos.*

La figura 4.4 muestra los patrones de radiación de un arreglo lineal con distancia $b = \lambda/2$ entre elementos para un distinto número de fuentes.

Como se puede observar, a medida que crece el número de fuentes del arreglo lineal, los lóbulos principales se vuelven más estrechos y en consecuencia la directividad del arreglo también es mejorada.

4.2.3 Desfase entre elementos de arreglo lineal

Otro factor importante a la hora de realizar un análisis de la respuesta direccional de arreglos lineales es el desfase entre fuentes. Si se considera un valor de desfase para cada una de las fuentes con respecto a una fuente de referencia, la presión P_n de la n-ésima fuente a la distancia R y a un ángulo θ se expresa de la siguiente forma (ver figura 4.2).

$$P_d = \frac{a_n P_0 R_0}{R} e^{i\left(\omega t - kR + \frac{nkW\sin\theta}{N-1} - \phi_n\right)} \left(10^{-\frac{\alpha R}{20}}\right) \tag{4.12}$$

donde ϕ_n representa el desfase de cada fuente con respecto a la fuente de referencia.

De acuerdo a la ecuación 4.12, la presión sonora total que irradia el arreglo se puede expresar de la misma forma que en la ecuación 4.7, pero la función de directividad D_t para este caso está representada por,

$$D_t = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\left(\frac{nkW\sin\theta}{N-1} - \phi_n\right)} \tag{4.13}$$

Al igual que los análisis anteriores, al conocer la variación de magnitud de la presión sonora total en función de θ a una distancia R determinada, es posible obtener los patrones de directividad para arreglos con distintos desfases entre fuentes.

Si se considera un desfase constante entre cada fuente tomando como referencia el primer elemento del arreglo, el desfase ϕ_n puede ser expresado como,

$$\phi_n = (n-1)\phi \tag{4.14}$$

donde n corresponde al número de la fuente y ϕ el valor del desfase constante entre las fuentes.

Los patrones de directividad para un arreglo lineal conformado por nueve fuentes, con una separación $b = \lambda/2$, para distintos valores de ϕ, son ilustrados en la figura 4.5.

En dicha figura se observa el patrón de directividad para un desfase cero entre fuentes. Este tipo de arreglos es conocido como *sistema de radiación transversal* (broadside array) y corresponde a los casos analizados anteriormente. En este tipo de arreglo lineal los valores máximos de presión sonora se encuentran a lo largo del plano que se encuentra perpendicular a la línea del arreglo. Por otra parte, la figura 4.5.d muestra que producto de un desfase entre fuentes $\phi = \pi$, los valores máximos de presión sonora se encuentran a lo largo del eje del arreglo. Este tipo de arreglo es conocido como *sistema de radiación longitudinal* (end-fire array).

La figura 4.5 en general muestra la transición que existe entre un sistema de radiación transversal y un sistema de radiación longitudinal en función del incremento del desfase entre fuentes.

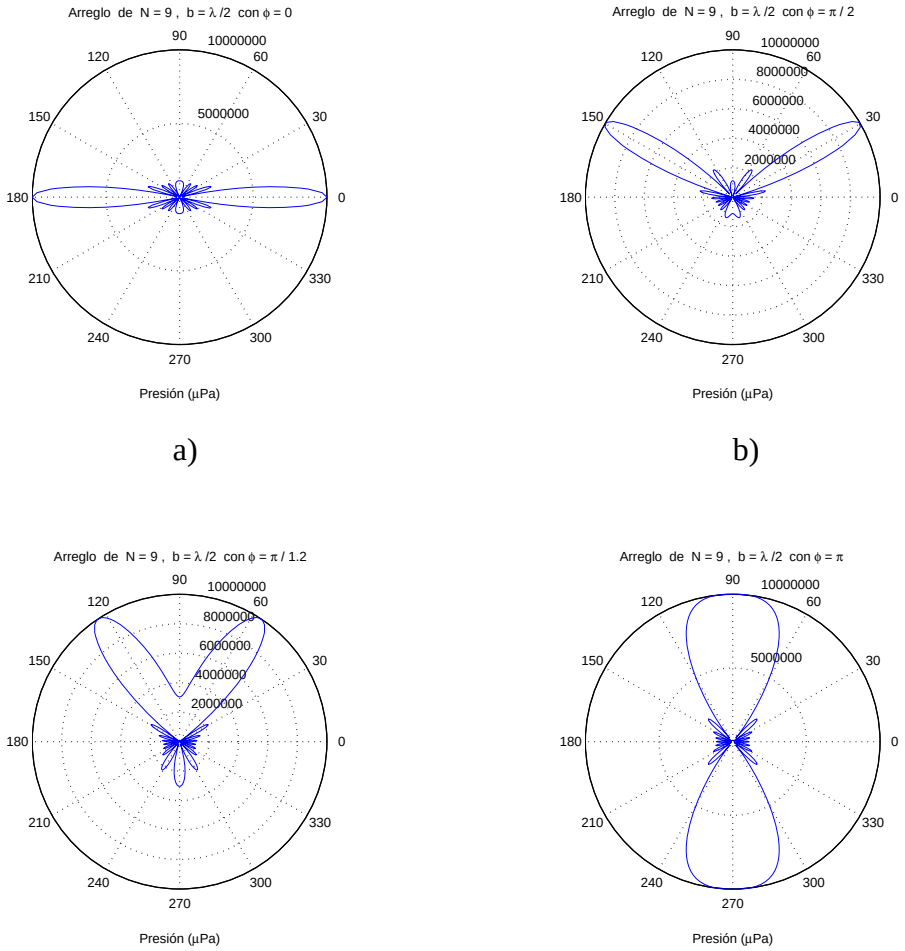


Figura 4.5. *Patrones de radiación de arreglo lineal de N*=9 *con espaciamiento uniforme* $b = \lambda/2$, *para distintos valores de desfase entre fuentes. a) Patrón de radiación para un desfase* $\phi = 0$. *b) Patrón de radiación para un desfase* $\phi = \pi/2$. *c) Patrón de radiación para un desfase* $\phi = \pi/1{,}2$. *d) Patrón de radiación para un desfase* $\phi = \pi$.

Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas es un procedimiento numérico que resuelve una ecuación diferencial parcial (*EDP*) través de la discretización del dominio físico en una grilla de diferencia finita discreta. Este método aproxima las derivadas parciales exactas que se encuentran en la *EDP* por aproximaciones de diferencias finitas (*ADFs*). Al sustituir las *ADFs* en la *EDP* se puede obtener una ecuación de diferencia finita algebraica (*EDF*). De ésta manera es posible resolver las ecuaciones de diferencias finitas algebraicas (*EDFs*) para las variables dependientes.

5.1 Grillas de diferencia finita

El dominio de solución cerrada $D(x,y)$ en el espacio xy para un problema en dos dimensiones es ilustrado en la figura 5.1.

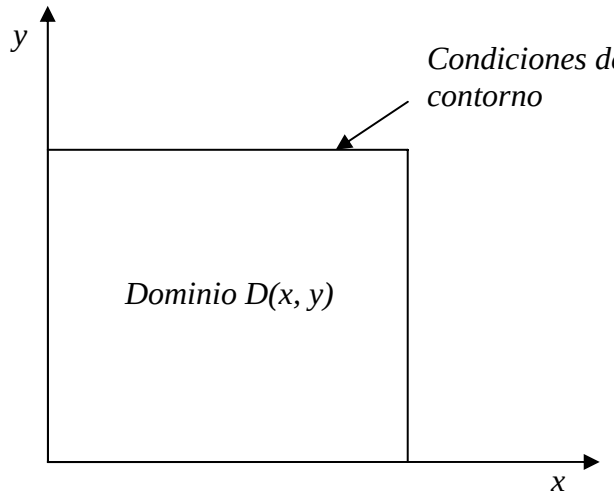


Figura 5.1. *Dominio para un problema en dos dimensiones.*

Dicho dominio de la solución debe ser cubierto por una grilla de líneas de dos dimensiones, llamado *grilla de diferencia finita*. Las intersecciones de estas *líneas de grilla* son los puntos para los cuales la solución de diferencia finita de la ecuación diferencial

parcial es obtenida. Las líneas de grillas pueden o no estar uniformemente espaciadas. Es este caso se consideran líneas igualmente espaciadas, perpendiculares al eje *x* y al eje *y* con espaciamiento uniforme Δx y Δy, respectivamente.

La grilla de diferencia finita resultante es ilustrada en la figura 5.2.

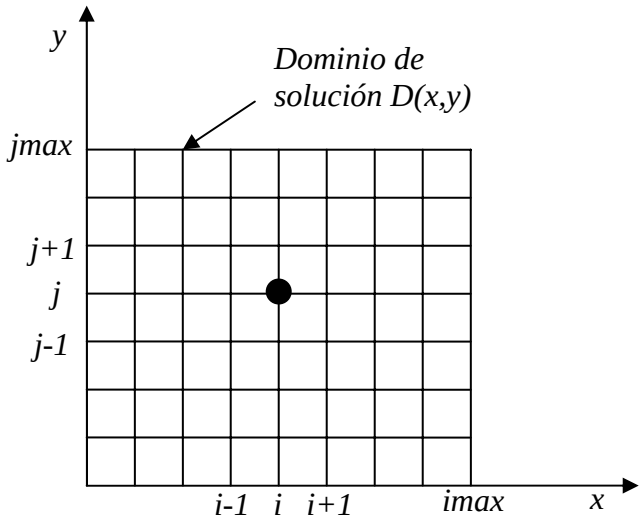


Figura 5.2. *Dominio de solución D(x,y) y grilla de diferencia discreta.*

El subíndice *i* es utilizado para representar las líneas de grilla física correspondientes a los valores constantes de *x* y el subíndice *j* es utilizado para representar las líneas de grilla física correspondientes a los valores constantes de *y*. De esta manera, un punto de grilla (*i*, *j*) corresponde a la ubicación (x_i, y_j) en el dominio de solución *D*(*x*, *y*). El número total de líneas de grilla en el eje *x* es representado por *imax*, y el número total de líneas de grilla en el eje *y* es representado por *jmax*.

La variable dependiente en un punto de grilla es representada por la misma notación de subíndices que es usada para representar los puntos de grilla. Así, la función *f*(*x*, *y*) en un punto de grilla es representada por

$$f(x_i, y_i) = f_{i,j} \tag{5.1}$$

De forma similar, las derivadas son representadas por

$$\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = f_x|_{i,j} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} = f_{xx}|_{i,j} \tag{5.2}$$

5.2 Aproximación de derivadas mediante diferencias finitas

Las formulas de diferencia pueden ser desarrolladas a partir de las series de Taylor. Esta aproximación es especialmente útil para aproximaciones de diferencia finita de derivadas exactas.

Las formulas de diferencia para funciones de una variable, por ejemplo $f(x)$, pueden ser desarrolladas a partir de las series de Taylor para una función de una variable.

$$f(x) = f_0 + f_0'\Delta x + \frac{1}{2} f_0''\Delta x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f_0^{(n)}\Delta x^n + \ldots \tag{5.3}$$

donde $f_0 = f(x_0)$, $f_0' = f'(x_0)$, etc. El dominio espacial continuo $D(x)$ debe ser discretizado en grillas igualmente espaciadas, como se ilustra en la figura 5.3. Para el espacio x discreto se tiene,

$$f(x_i) = f_i \tag{5.4}$$

donde el subíndice i representa la ubicación espacial particular. Las series de Taylor de $f(x)$ para puntos de grilla que rodean al punto i, pueden ser combinadas para obtener las formulas de diferencia para $f'(x_i)$, $f''(x_i)$, etc.

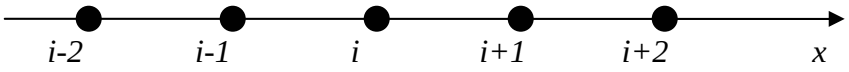


Figura 5.3. *Dominio espacial continúo D(x) discretizado*

La figura 5.3 ilustra la discretización del dominio espacial.

Las formulas de diferencia para funciones de varias variables, como por ejemplo $f(x, y)$ pueden ser desarrolladas a partir de la serie de Taylor para una función de varias variables.

$$f(x,y) = f_0 + \left(f_x\big|_0 \Delta x + f_y\big|_0 \Delta y\right) + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}\big|_0 \Delta x^2 + 2 f_{xy}\big|_0 \Delta x \Delta y + f_{yy}\big|_0 \Delta y^2\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f_0 + \ldots \tag{5.5}$$

donde $f_0 = f(x_0, y_0)$, $f_x\big|_0 = f_x(x_0, y_0)$, etc. La expresión $(\ldots)^n$ se resuelve con expansión binomial, en la cual los incrementos Δx y Δy son elevados a las potencias indicadas, y los términos como $(\partial/\partial x)^n$, etc., son interpretados como $\partial^n / \partial x^n$, etc. El dominio continuo $D(x,y)$, debe ser discretizado en una grilla ortogonal uniformemente espaciada de puntos discretos, como se ilustra en la figura 5.2 mostrada anteriormente.

Para una grilla discreta, se tiene que,

$$f(x_i, y_j) = f_{i,j} \tag{5.6}$$

donde el subíndice i representa la ubicación particular espacial en el eje x, y el subíndice j representa la ubicación particular espacial en el eje y.

Para derivadas parciales de $f(x,y)$ con respecto a x, $y = y_0$ = constante, $\Delta y=0$, la ecuación 5.3 se puede escribir de la siguiente forma.

$$f(x,y_0) = f_0 + f_x\big|_0 \Delta x + \frac{1}{2!} f_{xx}\big|_0 \Delta x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f_{(n)x}\big|_0 \Delta x^n + \ldots \qquad (5.7)$$

La ecuación 5.7 es de forma idéntica que la ecuación 5.3, donde f_0' corresponde a $f_x\big|_0$, etc. De ésta manera la derivada parcial de la ecuación $f_x\big|_0$ de la función $f(x,t)$ puede ser obtenida de la ecuación 5.7 al igual que la derivada total f_0' es obtenida de la ecuación 5.3. Como la ecuación 5.7 y la ecuación 5.3 son iguales, las formulas de diferencia para f_0' y $f_x\big|_0$ también lo son si son utilizados los mismos puntos de grillas discreta para desarrollar las formulas de diferencia. Consecuentemente, las formulas de diferencia para derivadas parciales de una función para varias variables pueden ser deducidas a partir de las series de Taylor para una función de una sola variable. De acuerdo a esto, la siguiente notación común será utilizada en el desarrollo de formulas de diferencia para derivadas totales y para derivadas parciales.

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = f_x \qquad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x,t)\big) = f_x \qquad (5.9)$$

De manera similar, las derivadas parciales de $f(x, y)$ con respecto a y, para $x = x_0$ = constante, $\Delta x=0$, pueden ser obtenidas desde la siguiente expresión

$$f(x_0,y) = f_0 + f_y\big|_0 \Delta y + \frac{1}{2!} f_{yy}\big|_0 \Delta y^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f_{(n)y}\big|_0 \Delta y^n + \ldots \qquad (5.10)$$

Esta aproximación no es válida para derivadas parciales mezcladas como por ejemplo para f_{xy}. Las formulas de diferencias para derivadas parciales mezcladas deben ser determinadas directamente desde la serie de Taylor para varias variables (ecuación 5.5).

La serie de Taylor para la función $f(x)$ de la ecuación 5.3, puede ser representada de la siguiente forma

$$f(x) = f_0 + f_x\big|_0 \Delta x + \frac{1}{2!} f_{xx}\big|_0 \Delta x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f_{(n)x}\big|_0 \Delta x^n + \ldots \qquad (5.11)$$

Por otro lado, la formula o polinomio de Taylor con resto está dada por

$$f(x) = f_0 + f_x\big|_0 \Delta x + \frac{1}{2!} f_{xx}\big|_0 \Delta x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f_{(n)x}\big|_0 \Delta x^n + R^{n+1} \qquad (5.12)$$

donde el término R^{n+1} que representa al resto, está dado por

$$R^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f_{(n+1)x}(\xi) \Delta x^{n+1} \qquad (5.13)$$

para $x_0 \le \xi \le x_0 + \Delta x$.

La serie de Taylor infinita y la formula de Taylor con resto son equivalentes. El error provocado al truncar la serie de Taylor infinita después de la enésima derivada es exactamente el término del resto de la formula de Taylor de enésimo orden. Los términos que son truncados de la serie de Taylor infinita reciben el nombre de error de truncamiento de la aproximación de derivadas exactas. En la mayoría de los casos, la principal preocupación es el orden del error de truncamiento. Este orden es la tasa con la cual el error se aproxima a cero cuando $\Delta x \to 0$. El orden del error de truncamiento es el orden del término del resto y está representado por la notación $O(\Delta x^n)$.

A continuación se considera una grilla de diferencia finita discreta espaciada (figura 5.2). Eligiendo el punto *i* como punto base, y escribiendo la serie de Taylor para f_{i+1} y f_{i-1}

$$f_{i+1} = f_i + f_x\big|_i \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx}\bigg|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6} f_{xxx}\bigg|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24} f_{xxxx}\bigg|_i \Delta x^4 + \ldots \qquad (5.14)$$

$$f_{i-1} = f_i - f_x\big|_i \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx}\bigg|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6} f_{xxx}\bigg|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24} f_{xxxx}\bigg|_i \Delta x^4 - \ldots \qquad (5.15)$$

Restando las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2 f_x\big|_i \Delta x - \frac{1}{3} f_{xxx}\bigg|_i \Delta x^3 + \ldots \qquad (5.16)$$

Considerando el término con f_{xxx} como el término de resto y despejando $f_x|_i$ se tiene

$$f_x\big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{6} f_{xxx}\left(\bar{\xi}\right)\Delta x^2 + \ldots \qquad (5.17)$$

donde $x_{i-1} \le \bar{\xi} \le x_{i+1}$.

La ecuación 5.15 es una expresión exacta para $f_x|_i$. Si el término del resto es truncado, lo cual es equivalente a truncar la serie infinita de Taylor, la ecuación 5.15 entrega una aproximación de diferencia finita con $O(\Delta x^2)$ para $f_x|_i$. Esta aproximación se expresa de la siguiente forma

$$f_x\big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \qquad (5.18)$$

Al sumar las ecuaciones 5.12 y 5.13 se tiene que,

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + f_{xx}\big|_i \Delta x^2 + \frac{1}{12} f_{xxxx}\bigg|_i \Delta x^4 + \ldots \tag{5.19}$$

Considerando el término con f_{xxxx} como el término de resto y despejando $f_{xx}\big|_i$ se tiene,

$$f_{xx}\big|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{1}{12} f_{xxxx}\left(\bar{\xi}\right)\Delta x^2 + \ldots \tag{5.20}$$

donde $x_{i-1} \le \bar{\xi} \le x_{i+1}$.

Truncando el término del resto se tiene la aproximación de diferencia finita para $f_{xx}\big|_i$. Esta aproximación está dada por

$$f_{xx}\big|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \tag{5.21}$$

5.3 Propiedades de ecuaciones de diferencia finita.

En el método de diferencias finitas existen cuatro importantes propiedades para problemas de propagación gobernados por *EDPs* parabólicas e hiperbólicas, que deben ser considerados antes de elegir una aproximación específica. Estas son,

1.Consistencia
2.Orden
3.Estabilidad
4.Convergencia

5.3.1 Consistencia y orden

El análisis de consistencia envuelve el regreso de la ecuación de diferencias finitas (*EDF*) a la ecuación diferencial y determina si tal ecuación diferencial se aproxima a la ecuación diferencial exacta a medida que el espaciamiento de grilla (Δx o Δy) tiende a cero. Esto se logra expresando todos los términos en la *EDF* por una serie de Taylor tomando el mismo punto base de la *EDF* [4]. Dicha serie de Taylor es una serie infinita. De esta forma es obtenida una ecuación diferencial de orden infinito. Esta ecuación diferencial de orden infinito es conocida como *ecuación diferencial modificada* (*EDM*). La *EDM* es la actual ecuación diferencial, la cual es resuelta por la *EDF*. Aproximando los espaciamientos de grilla a cero en la *EDM* se obtiene una ecuación diferencial de orden finito. Si esta ecuación diferencial de orden finito es idéntica a la ecuación diferencial exacta cuya solución es deseada, la *EDF* es una aproximación consistente de la ecuación diferencial exacta.

El orden de la *EDF* es el orden del término de más bajo orden en la *EDM*.

5.3.2 Estabilidad

Una *EDF* es estable si esta produce una solución acotada para una *EDP* estable y es inestable si esta produce una solución no acotada para una *EDP* estable. Por otro lado, si la *EDP* es inestable, su solución numérica también es inestable. El concepto de estabilidad en este último caso no es relevante. En la sección 6 se presenta en forma gráfica la estabilidad e inestabilidad de la aproximación por diferencias finitas de la ecuación de ondas.

5.3.3 Convergencia

Un método de diferencias finitas es convergente si la solución numérica de la *EDF* se aproxima a la solución exacta de la *EDP* a medida que el espaciamiento de grillas tiende a cero.

La convergencia del método de diferencias finitas está relacionada con la consistencia y la estabilidad de la *EDF*. De acuerdo al teorema de de equivalencia de Lax [7] se tiene que para una *EDF* consistente y estable, el método de diferencias finitas es convergente.

Simulación de propagación de ondas a partir del MDF.

6.1 Aproximación de ecuación de ondas por el MDF.

La simulación de la propagación de ondas sonoras a través de un medio fue desarrollada mediante el método de diferencias finitas. A partir de dicho método fue posible realizar una aproximación numérica de la ecuación de ondas en coordenadas cartesianas para el fenómeno de propagación de ondas en dos dimensiones.

La propagación de ondas acústicas puede ser representada a partir de la ecuación de onda

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{6.1}$$

donde p es la presión sonora en el medio. Dicha ecuación expresada en coordenadas cartesianas en dos dimensiones está dada por

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{6.2}$$

A partir de la aproximación por diferencia central de segundo orden, ya descrita en la sección 5, se obtiene una expresión discreta para la ecuación 6.2.

$$\frac{p^n_{i+1,j} - 2p^n_{i,j} + p^n_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p^n_{i,j+1} - 2p^n_{i,j} + p^n_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{p^{n+1}_{i,j} - 2p^n_{i,j} + p^{n-1}_{i,j}}{\Delta t^2}\right) \tag{6.3}$$

donde Δx y Δy son los espacios entre grillas a lo largo del eje x y el eje y respectivamente y Δt es el periodo de muestreo.

Si se considera que $\Delta x = \Delta y = h$, la expresión anterior puede ser escrita de la siguiente forma,

$$p_{i,j}^{n+1} = 2p_{i,j}^{n} - p_{i,j}^{n-1} + d^2\left(p_{i+1,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n} + p_{i,j+1}^{n} + p_{i,j-1}^{n} - 4p_{i,j}^{n}\right) \tag{6.4}$$

donde

$$d = \frac{c\Delta t}{h}$$

Para representar el fenómeno de propagación a partir de una aproximación por diferencia finita es necesario conocer características del comportamiento de dicha aproximación. Este comportamiento puede ser descrito a partir de las propiedades de consistencia, estabilidad, orden y convergencia. A continuación se muestra el análisis de éstas propiedades.

6.1.1 Análisis de consistencia y orden

Según lo señalado en la sección 5.3, una ecuación de diferencias finitas (*EDF*) es consistente con una ecuación en derivadas parciales (*EDP*) si la diferencia entre la *EDF* y la *EDP* se desvanece a medida que los tamaños de los espacios entre grillas (en este caso Δx, Δy y Δt) se aproximan a cero.

Las series de Taylor con punto base (i, j, k), para todos los valores de $p(x, y, t)$ que aparecen en la ecuación 6.3, son detalladas a continuación.

$$p_{i\pm1,j}^{n} = p_{i,j}^{n} \pm p_x\Big|_{i,j}^{n}\Delta x + \frac{1}{2}p_{xx}\Big|_{i,j}^{n}\Delta x^2 \pm \frac{1}{6}p_{xxx}\Big|_{i,j}^{n}\Delta x^3 + \frac{1}{24}p_{xxxx}\Big|_{i,j}^{n}\Delta x^4 \pm \ldots \tag{6.5a}$$

$$p^{n}_{i,\,j\pm1} = p^{n}_{i,\,j} \pm p_{y}\Big|^{n}_{i,j}\Delta y + \frac{1}{2}\,p_{yy}\Big|^{n}_{i,j}\Delta y^{2} \pm \frac{1}{6}\,p_{yyy}\Big|^{n}_{i,j}\Delta y^{3} + \frac{1}{24}\,p_{yyyy}\Big|^{n}_{i,j}\Delta y^{4} \pm \ldots \qquad (6.5b)$$

$$p^{n\pm1}_{i,\,j} = p^{n}_{i,\,j} \pm p_{t}\Big|^{n}_{i,j}\Delta t + \frac{1}{2}\,p_{tt}\Big|^{n}_{i,j}\Delta t^{2} \pm \frac{1}{6}\,p_{ttt}\Big|^{n}_{i,j}\Delta t^{3} + \frac{1}{24}\,p_{tttt}\Big|^{n}_{i,j}\Delta t^{4} \pm \ldots \qquad (6.5c)$$

Si en la ecuación 6.3 se reemplazan los valores de $p(x, y, t)$ por sus respectivas series de Taylor se obtiene la expresión de la ecuación diferencial modificada (*EDM*).

$$p_{tt}\Big|^{n}_{i,j} - c^{2}\left(p_{xx}\Big|^{n}_{i,j} + p_{yy}\Big|^{n}_{i,j}\right) = -\frac{1}{12}\,p_{tt}\Big|^{n}_{i,j}\Delta t^{2} - \ldots - \frac{c^{2}}{12}\,p_{xx}\Big|^{n}_{i,j}\Delta x^{2} - \ldots - \frac{c^{2}}{12}\,p_{yy}\Big|^{n}_{i,j}\Delta y^{2} - \ldots \qquad (6.6)$$

Para $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\Delta t \to 0$, la ecuación 6.6 se reduce a la siguiente expresión.

$$p_{tt}\Big|^{n}_{i,j} - c^{2}\left(p_{xx}\Big|^{n}_{i,j} + p_{yy}\Big|^{n}_{i,j}\right) = 0 \qquad (6.7)$$

La ecuación 6.7 es idéntica a la ecuación de onda en dos dimensiones. La diferencia entre la *EDF* y la *EDP* se aproxima a cero a medida que los espaciamientos de grilla tienden a cero. Como consecuencia se prueba que la aproximación por diferencia finita utilizada es consistente con la ecuación de ondas exacta.

El orden de una aproximación por diferencia finita de una ecuación diferencial parcial es la tasa con la cual el error de la solución de diferencia finita se aproxima a cero a medida que los espaciamientos de grilla se aproximan a cero. Dicho valor puede ser conocido a partir del término de más bajo orden de la *EDM*. La ecuación 6.6 muestra que el orden[6] de la ecuación *EDF* es de $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$.

[6] $O(\Delta h^n)$ es la notación de un orden de error n producido al truncar una aproximación de una derivada exacta obtenida a partir de series de Taylor [4].

6.1.2 Estabilidad de aproximación

Como fue señalado en el capítulo anterior, una *EDF* es estable si ésta produce una solución limitada para una *EDP* estable. Debido a que la ecuación de ondas es estable, sólo es necesario conocer la estabilidad de su aproximación por diferencias finitas.

A partir del análisis realizado por Mitchell 1969 [13], la aproximación de segundo orden de la ecuación de ondas a través del método de diferencias finitas (ecuación 6.4), debe cumplir con la siguiente condición para la estabilidad.

$$d = c\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.8}$$

Para probar esta condición se realizaron simulaciones para distintos valores de *d* con el fin de evaluar en forma gráfica la estabilidad de la aproximación.

A continuación son detallados los valores de los parámetros de la aproximación por diferencia finita de la ecuación de onda utilizados.

Velocidad de propagación sonora $c = 1500\ m/s$

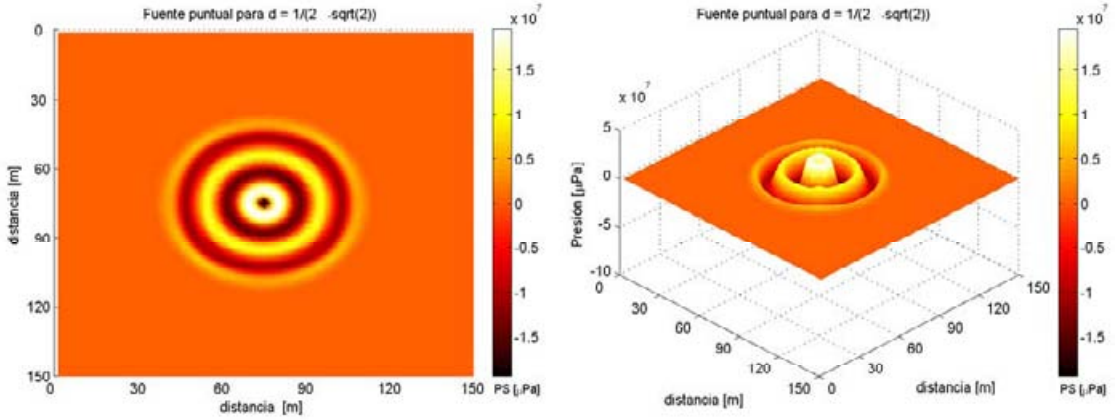
Espaciamiento de grilla $h = 1.5\ m$

Periodo de muestreo $\Delta t = 3.5355 \times 10^{-4}\ s$

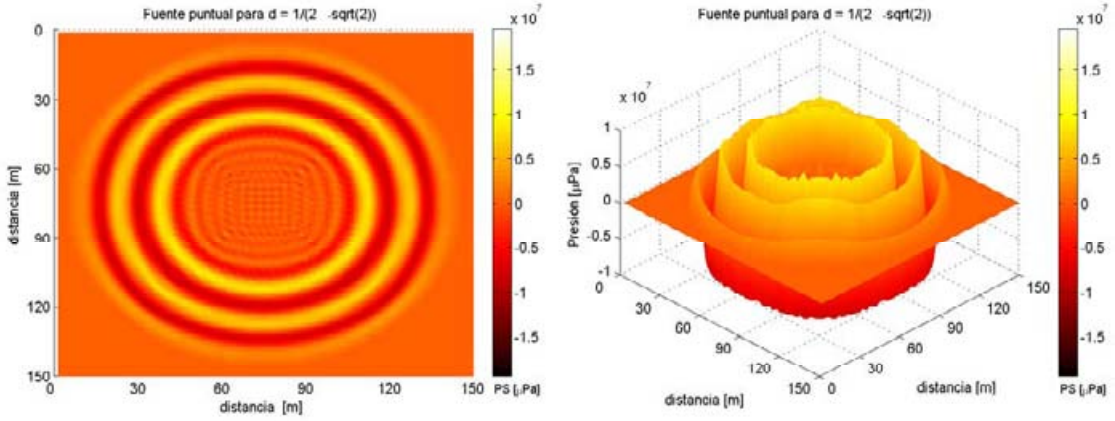
Tamaño de grilla $m \times n = 100 \times 100\ puntos$

$$d = c\frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Las imágenes de las simulaciones de propagación ondas sonoras en un medio homogéneo para una fuente puntual de frecuencia aproximada de 100 *Hz* con un valor d menor al límite de estabilidad, son ilustradas en la figura 6.1. La plataforma en la que fueron desarrolladas todas las simulaciones es descrita en la sección 6.7.



a)



b)

Figura 6.1. *Imágenes de simulación de campo sonoro emitido por una fuente de* 100 *Hz para* $d = 1/2\sqrt{2}$. *a) Imagen de campo sonoro a un tiempo t =* 24,7 *ms. b) Imagen de campo sonoro a un tiempo t =* 46 *ms.*

En las imágenes mostradas se aprecia un comportamiento estable de la simulación. Las figuras 6.1.a y 6.1.b ilustran el campo sonoro en distintos instantes de tiempo. En dichas figuras, las imágenes de la derecha permiten una mejor visualización de la amplitud de la señal.

Las imágenes de una simulación para el valor límite de la condición de estabilidad son ilustradas en la figura 6.2. En dicha figura es representado el campo sonoro para distintos instantes de tiempo. Las imágenes de la derecha permiten visualizar las amplitudes de dicho campo. A partir de ésta representación se observa que aún se cumple la condición de estabilidad. Para realizar la simulación se consideraron los siguientes valores para los parámetros de la *EDF*.

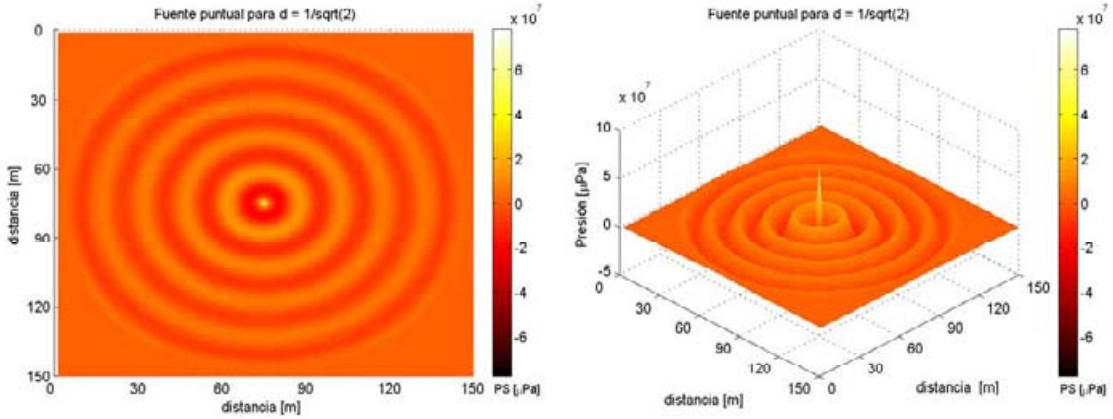
Velocidad de propagación sonora	$c = 1500\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 1.5\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 7.0711 \times 10^{-4}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 100 \times 100\ \ puntos$

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

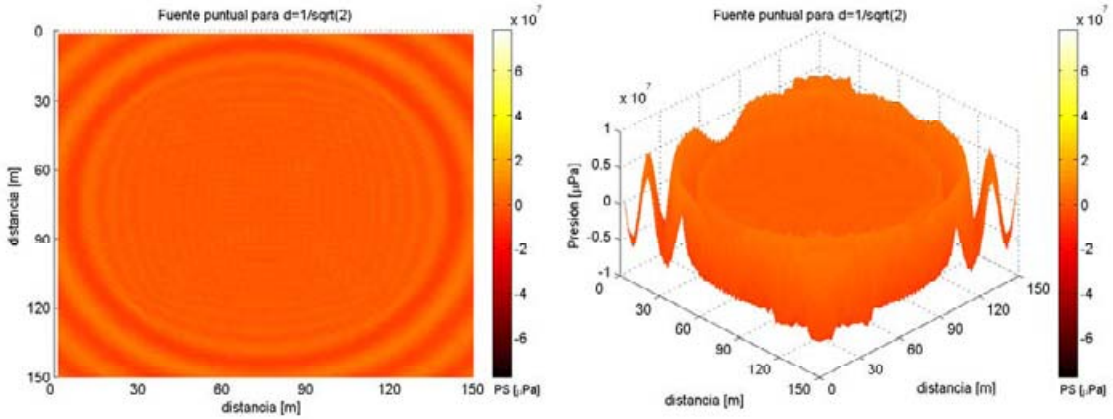
La figura 6.3 muestra las imágenes de una simulación para valores de *d* por sobre el valor para la condición de estabilidad. En dicha simulación fueron utilizados los siguientes valores para los parámetros de la aproximación por diferencia finita.

Velocidad de propagación sonora	$c = 1500\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 1.5\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 7.1418 \times 10^{-4}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 100 \times 100\ \ puntos$

$$d = \frac{1.01}{\sqrt{2}}$$

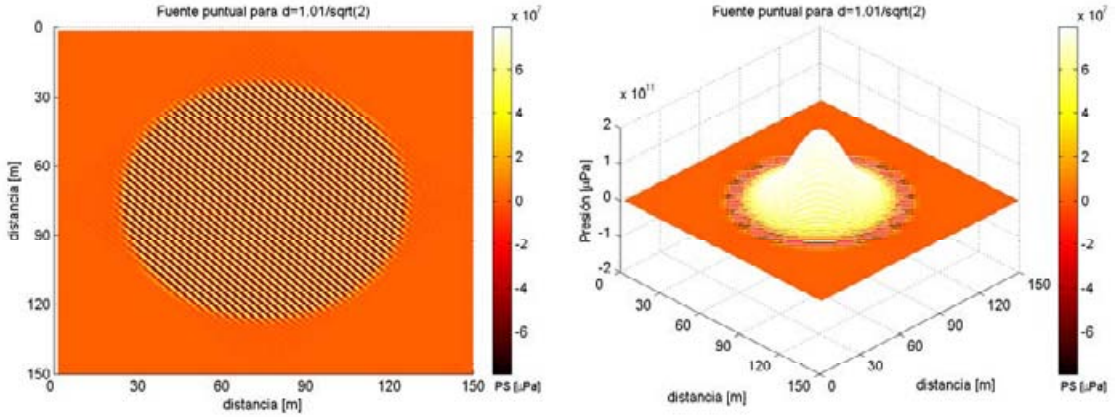


a)

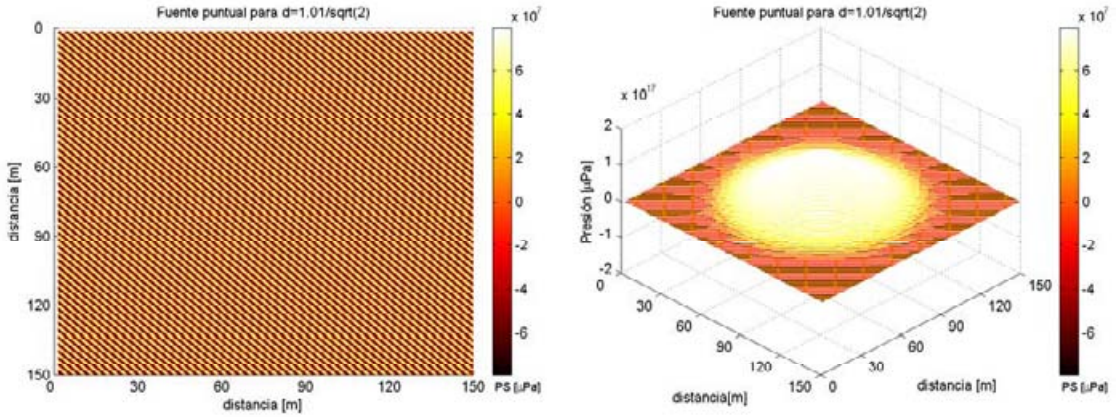


b)

Figura 6.2. *Imágenes de simulación de campo sonoro emitido por una fuente de* 100 *Hz para* $d = 1/\sqrt{2}$ *. a) Imagen de campo sonoro a un tiempo t =* 49,5 *ms. b) Imagen de campo sonoro a un tiempo t =* 91,9 *ms.*



a)



b)

Figura 6.3. *Imágenes de simulación de campo sonoro emitido por una fuente de* 100 *Hz para* $d = 1{,}01/\sqrt{2}$ *. a) Imagen de campo sonoro a tiempo t =* 35,7 *ms. b) Imagen de campo sonoro a tiempo t =* 71,4 *ms.*

Las figuras 6.3.a y 6.3.b detallan el campo sonoro para distintos instantes de tiempo. En dichas figuras, las imágenes de la derecha permiten observar en detalle la amplitud de la señal. A partir de estas últimas es posible confirmar la inestabilidad de la aproximación. Las imágenes muestran que la aproximación de la ecuación de ondas se vuelve inestable al

superar el valor de la condición límite, ya que las amplitudes del campo sonoro empiezan a crecer ilimitadamente a medida que la señal se propaga.

6.1.3 Convergencia de aproximación

Una ecuación de diferencia finita es convergente si la solución de dicha ecuación se aproxima a la solución exacta de la *EDP* a medida que el tamaño de los espaciamientos de grilla tiende a cero.

Los criterios de consistencia y estabilidad para un problema con aproximación por diferencia finita son una condición necesaria y suficiente para el cumplimiento de la convergencia. Dicho de otra forma, una *EDF* es convergente si cumple con la estabilidad y la consistencia (*Lax* 1954) [7].

6.2 Condiciones Iniciales

Debido a que la ecuación de onda envuelve el tiempo, parte de la condición de contorno requerida para la aproximación por diferencia finita es una condición en el tiempo, o una condición inicial. Si se observa nuevamente la aproximación discreta de la ecuación de onda (ecuación 6.4), para calcular el valor de presión $p_{i,j}^{2}$ es necesario conocer los valores $p_{i,j}^{0}$ y $p_{i,j}^{1}$. Para todas las simulaciones realizadas se consideró $p_{i,j}^{0} = p_{i,j}^{1} = 0$ (medio con presión nula en las iteraciones 0 y 1).

6.3 Fuente

Para excitar al medio fue utilizada una fuente de presión sinusoidal localizada en una región del dominio espacial analizado. La fuente de característica monocromática, fue la encargada de entregar varios ciclos de señal al medio en las simulaciones realizadas. En términos de presión, dicha fuente está dada por la siguiente expresión

$$p_f = p_0 \cos(\omega t)\delta_{i,p}\delta_{j,q} \tag{6.9}$$

donde

$\omega = 2\pi f$

f : Frecuencia de la señal (*Hz*).

p : coordenada de posición a lo largo del eje *y* de la fuente en el dominio.

q : coordenada de posición a lo largo del eje *x* de la fuente en el dominio.

$\delta_{i,p}$: Delta de Kronecker, posición de la fuente a lo largo del eje *y*.

$\delta_{j,q}$: Delta de Kronecker, posición de la fuente a lo largo del eje *x*.

La ecuación 6.9 debe ser incorporada a la ecuación de onda. Esto es realizado de la siguiente forma.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_f}{\partial t^2} \tag{6.10}$$

El término de la derecha puede ser interpretado como la aceleración de masa por unidad de volumen. Reemplazando la ecuación 6.9 en la ecuación 6.10 se tiene

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} p_0 \omega^2 \cos(\omega t)\delta_{i,p}\delta_{j,q} \tag{6.11}$$

La aproximación discreta por diferencia finita de la ecuación 6.11 está dada por la siguiente expresión

$$p_{i,j}^{n+1} = 2p_{i,j}^{n} - p_{i,j}^{n-1} + A_0 \cos(\omega n\Delta t)\delta_{i,p}\delta_{j,q} + d^2\left(p_{i+1,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n} + p_{i,j+1}^{n} + p_{i,j-1}^{n} - 4p_{i,j}^{n}\right) \tag{6.12}$$

donde

$$A_0 = p_0(\omega\Delta t)^2$$

$$d = c\frac{\Delta t}{h}$$

6.4 Condiciones de contorno

Debido a que la solución por diferencia finita puede ser obtenida sólo a partir de un número finito de puntos, es necesario introducir condiciones de contorno artificiales para representar la propagación de ondas en un medio infinito.

Para la simulación de la propagación de ondas en un medio sin límites fueron utilizadas condiciones de contorno transparentes descritas por Reynolds 1978 [14]. Estas condiciones son detalladas a continuación.

Condición de contorno izquierda

$$p_{1,j}^{n+1} = p_{1,j}^{n} + p_{2,j}^{n} - p_{2,j}^{n-1} + d\left[p_{2,j}^{n} - p_{1,j}^{n} - \left(p_{3,j}^{n-1} - p_{2,j}^{n-1}\right)\right] \qquad (6.12.a)$$

Condición de contorno derecha

$$p_{i\max,j}^{n+1} = p_{i\max,j}^{n} + p_{i\max-1,j}^{n} - p_{i\max-1,j}^{n-1} + d\left[p_{i\max-1,j}^{n} - p_{i\max,j}^{n} - \left(p_{i\max-2,j}^{n-1} - p_{i\max-1,j}^{n-1}\right)\right] \quad (6.12.b)$$

Condición de contorno superior

$$p_{i,j\max}^{n+1} = p_{i,j\max}^{n} + p_{i,j\max-1}^{n} - p_{i,j\max-1}^{n-1} + d\left[p_{i,j\max-1}^{n} - p_{i\max,j}^{n} - \left(p_{i,j\max-2}^{n-1} - p_{i,j\max-1}^{n-1}\right)\right] \quad (6.12.c)$$

Condición de contorno inferior

$$p_{i,1}^{n+1} = p_{i,1}^{n} + p_{i,2}^{n} - p_{i,2}^{n-1} + d\left[p_{i,2}^{n} - p_{i,1}^{n} - \left(p_{i,3}^{n-1} - p_{i,2}^{n-1}\right)\right] \qquad (6.12.d)$$

donde

$$d = c\frac{\Delta t}{h}$$

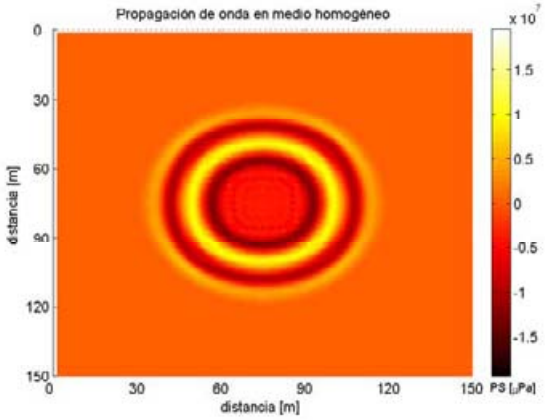
La propagación de una onda de frecuencia de 100 *Hz* en un medio homogéneo es ilustrada en la figura 6.4. En dicha figura las imágenes mostradas son los resultados de simulaciones con el uso de las condiciones de contorno anteriormente señaladas y sin el uso de éstas.

Para ésta simulación fueron considerados los siguientes valores para los parámetros de la aproximación de la ecuación de onda.

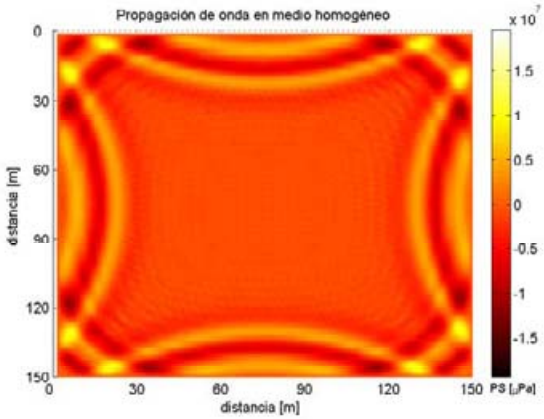
Velocidad de propagación sonora	$c = 1500\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 1.5\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 3.5355 \times 10^{-4}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 100 \times 100\ \ puntos$

$$d = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

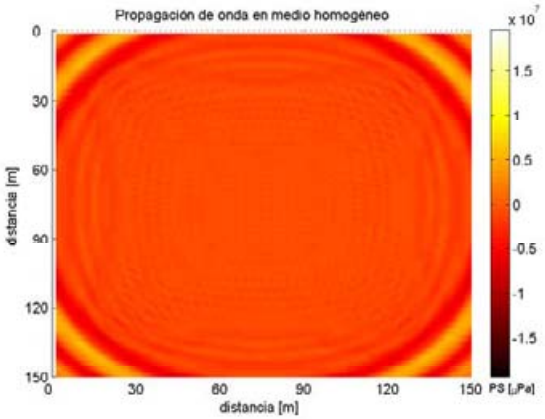
En la figura 6.4.a se muestra el campo sonoro para un instante de tiempo en el cual la señal aún no incide en los contornos del dominio. La figura 6.4.b detalla la simulación considerando un valor de presión p=0 en los contornos. En ésta imagen se aprecian las reflexiones de la señal en cada contorno. En la figura 6.4.c se puede visualizar el campo sonoro en el mismo instante de tiempo que en la figura 6.4.b para una simulación que utiliza las condiciones de contorno transparentes ya detalladas. En ésta imagen es posible notar como disminuyen las reflexiones de la señal en los contornos debido al uso de dichas condiciones. A partir de ésta herramienta es posible representar la propagación de ondas en un medio ilimitado.



a)



b)



c)

Figura 6.4. *a) Imagen de simulación de campo sonoro cuando aun no alcanza los bordes. b) Imagen de simulación de campo sonoro reflejado por los bordes (sin condiciones de contorno trasparentes). c) Imagen de simulación de campo sonoro con condiciones de contorno transparentes.*

6.5 Dispersión por grillas

Existen varios temas que es necesario abordar a la hora de elegir los parámetros de grilla en la discretización. Uno de éstos es la dispersión por grilla debido a que la propagación de ondas en sistemas discretos es inherentemente dispersiva. La forma de eliminar la

dispersión por grillas es hacer longitudes de ondas grandes en comparación al tamaño de grilla. Para una aproximación por diferencias finitas de segundo orden, Villareal [16] comprobó empíricamente que usando al menos 10 puntos por longitud de onda, es posible mantener la dispersión por grilla a valores suficientemente bajos. De esta manera el modelo de propagación de onda no es perjudicado. Un análisis más detallado del problema de dispersión, incluyendo la relación entre la longitud del operador y el número requerido de puntos de grilla por longitud de onda, están dados por Holberg [5] y por Markfurt [10].

6.6 Costo computacional

El costo computacional está relacionado con el tiempo que demora un algoritmo en obtener un determinado resultado. Este tiempo va de la mano con las características del hardware utilizado para poder llevar acabo el proceso (velocidad de procesador, memoria RAM). Además de esto, dicho tiempo depende de factores que es necesario evaluar a la hora de desarrollar algoritmos de diferencias finitas. Dos de estos factores son detallados a continuación.

6.6.1 Dicretización de los dominios (cantidad de puntos de grilla).

La cantidad de puntos elegidos en un determinado dominio está muy vinculada con la velocidad de ejecución de algoritmos de diferencia finita. Es conocido que mientras más discretizado sea un dominio, mejor es la aproximación del fenómeno que se quiere representar. No obstante, mientras más puntos son elegidos en dicho dominio, mayor es el número de cálculos y como consecuencia es necesario más tiempo para que el programa arroje resultados.

6.6.2 Lenguaje de Programación

Para analizar la rapidez con que un código es ejecutado, es necesario hacer una clasificación de los lenguajes de programación en *lenguajes compilados* y *lenguajes interpretados*.

Un programa que se escribe en un lenguaje de alto nivel tiene que ser traducido a un código que pueda utilizar la máquina. Los programas que realizan dicha operación son

llamados *compiladores*. Al usar un lenguaje compilado, el programa desarrollado nunca se ejecuta mientras existan errores. Eliminando estos errores del código el programa puede ser compilado.

Existe una alternativa diferente de los compiladores para traducir lenguajes de alto nivel. En vez de traducir el código fuente y grabar en forma permanente el código objeto que se produce en la compilación, el programador sólo carga el código fuente en la computadora junto con los datos que se van a procesar. Después de esto, un programa intérprete (por ej. *MATLAB*) convierte cada proposición del código fuente en lenguaje de máquina conforme vaya siendo necesario durante la ejecución del algoritmo. La siguiente ocasión que es utilizada una instrucción, se debe interpretar otra vez y traducir a lenguaje máquina.

Un ejemplo de esto ocurre durante el procesamiento repetitivo de los pasos de un ciclo, donde cada instrucción del ciclo tendrá que volver a ser interpretado cada este se ejecute. Esto hace que el programa sea más lento en tiempo de ejecución en comparación con los códigos compilados. Por otro lado, el intérprete elimina la necesidad de realizar una compilación después de cada modificación del programa y de ésta manera hace que el tiempo de diseño sea más rápido.

6.7 Plataforma de desarrollo

La plataforma de desarrollo utilizada para realizar las simulaciones de éste trabajo fue *MATLAB* (Matrix Laboratory). Este es un lenguaje interpretado de alto nivel computacional empleado para cálculos técnicos. *MATLAB* a través de un ambiente simple es capaz de integrar el cálculo, la visualización y la programación. Mediante este lenguaje es posible realizar la programación de una manera fácil y sencilla.

En dicha plataforma existe gran variedad de librerías desarrolladas para distintos propósitos. Cada una de estas librerías posee funciones que se encuentran altamente optimizadas. La colección de algoritmos computacionales va desde funciones elementales

hasta funciones muy sofisticadas para el procesamiento digital de señales. Dentro de ésta colección se encuentran funciones de alto nivel para la visualización de datos en dos y tres dimensiones, procesamiento de imagen, animación y presentación de gráficos. Dichas funciones entregan una importante ayuda ya que facilitan el despliegue de vectores y matrices como gráficos. Ya que los códigos desarrollados en este trabajo entregaron matrices con datos de presión sonora a distintos instantes de tiempo, las funciones de visualización fueron un aporte eficaz a la hora de representar los datos en forma gráfica.

Otra característica importante y de gran utilidad que posee *MATLAB* es que permite la interacción con programas escritos en lenguajes como *C* y *Fortran* (lenguajes compilados), lo que lo convierte en un lenguaje versátil. Frente a problemas que surgen ante el uso del *MDF* como es el caso del costo computacional, el uso de lenguajes compilados contribuye notablemente. El reemplazo de los ciclos encontrados en un código escrito en lenguaje de *MATLAB* por funciones escritas en lenguaje compilado, disminuye notoriamente el costo computacional. En algunos de los códigos utilizados para llevar a cabo las simulaciones de este trabajo, varios ciclos fueron reemplazados por funciones escritas en *C* lo que redujo el tiempo de ejecución de tales programas.

Un lenguaje intérprete como *MATLAB*, además de las características ya comentadas, permite un tiempo de diseño más rápido debido a que no es necesario compilar el código completo cada vez que se realice un cambio en éste. Dicho de otra forma, el intérprete elimina la necesidad de realizar una corrida de compilación después de cada modificación del programa cuando se quiere agregar funciones o corregir errores.

Resultados

A partir de la aproximación por diferencias finitas detallada en la sección 6 fue posible desarrollar simulaciones de propagación de ondas sonoras ante diversas situaciones físicas. Las simulaciones que se muestran en los resultados abordaron los siguientes temas.

-. Simulación de propagación de ondas sonoras en medio con atenuación.
-. Simulación de campo sonoro emitido por arreglos lineales en medio homogéneo.
-. Simulación de propagación de ondas sonoras en dos medios con distinto valor de velocidad de propagación del sonido.
-. Simulación de propagación de ondas sonoras en medio estratificado.

A continuación se presentan en forma detallada los puntos anteriormente comentados.

7.1 Simulación de propagación de ondas sonoras en medio con atenuación

La ecuación de ondas homogénea en dos dimensiones más un término disipativo puede ser expresada de la siguiente forma.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + R\frac{\partial p}{\partial t} - c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (7.1)$$

donde

$$R = 2c\left(\frac{\alpha}{8.68}\right) + j\frac{c^2\left(\frac{\alpha}{8.68}\right)^2}{\omega}$$

$$\omega = 2\pi f$$

f : frecuencia en *Hz*

α : atenuación del medio *dB/m*

c : velocidad de propagación del sonido *m/s.*

A partir de la aproximación por diferencia central de segundo orden se obtiene una expresión discreta para la ecuación 7.1.

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n} + p_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} + R\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = c^2\left(\frac{p_{i+1,j}^{n} - 2p_{i,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n} - 2p_{i,j}^{n} + p_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right) \quad (7.2)$$

Considerando $\Delta x = \Delta y = h$ y reordenando la ecuación 7.2 se obtiene la siguiente expresión.

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{2}{2 + R\Delta t}\left[2p_{i,j}^{n} - p_{i,j}^{n-1}\left(\frac{2 - R\Delta t}{2}\right) + d^2\left(p_{i+1,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n} + p_{i,j+1}^{n} + p_{i,j-1}^{n} - 4p_{i,j}^{n}\right)\right] \quad (7.3)$$

donde

$$d = c\frac{\Delta t}{h}$$

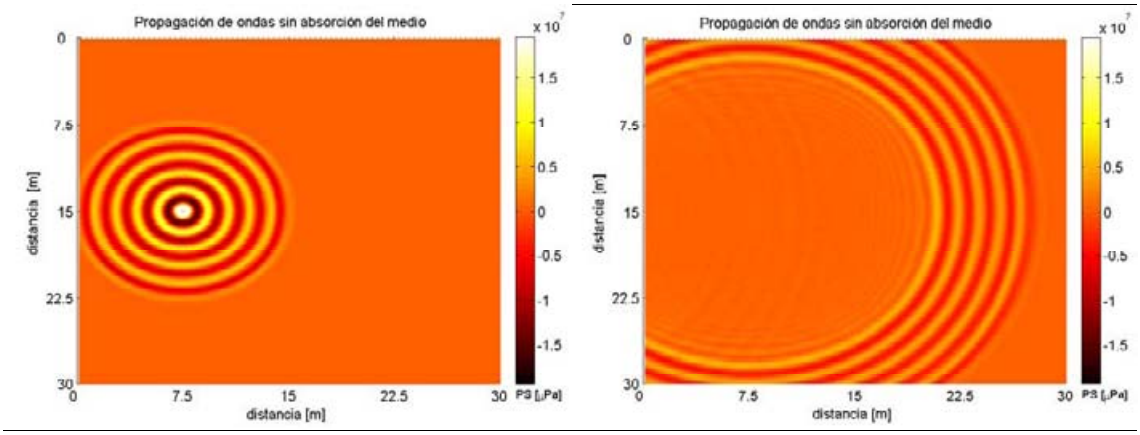
A continuación se muestran simulaciones de propagación de ondas sonoras a través de medios con y sin atenuación. Esto fue realizado con el fin de hacer un análisis de las diferencias existentes entre estos dos casos. El mismo proceso fue desarrollado para dos frecuencias distintas (1 *KHz* y 10 *KHz*). Los valores de atenuación corresponden a la absorción sonora en agua de mar y fueron extraídos de A. D. Waite 2002 [17] (Anexo 2).

Los valores de los parámetros de la aproximación discreta de la ecuación 7.3 considerados para una fuente de frecuencia de 1 *KHz* son expresados a continuación.

Velocidad de propagación sonora	$c = 1500\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 0.15\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 3.5355 \times 10^{-5}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 200 \times 200\ \ puntos$

$$d = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Para una atenuación $\alpha = 0$, se obtiene la simulación sin absorción del medio. Las imágenes de dicha simulación son ilustradas en la figura 7.1.

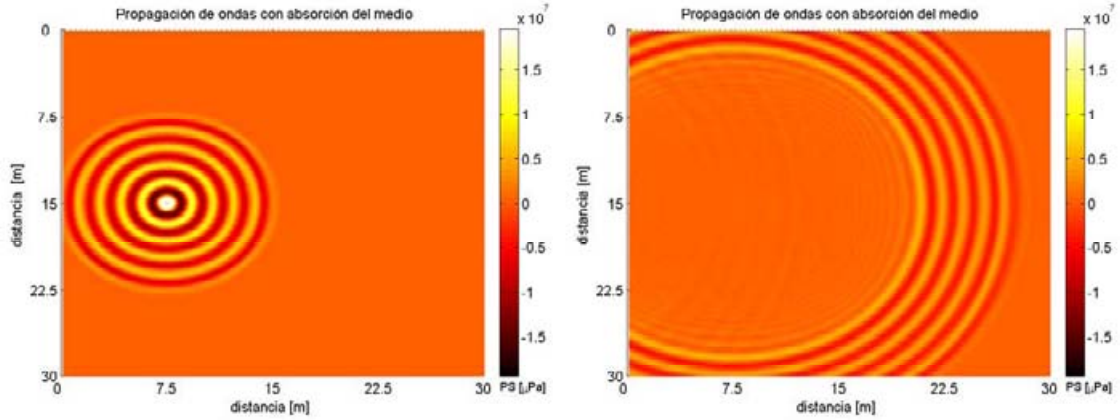


a) b)

Figura 7.1. *Imágenes de simulación de campo sonoro producido por fuente de* 1 *KHz para atenuación del medio* α = 0. *a) Campo sonoro a tiempo t =* 5,3 *ms. b) Campo sonoro a tiempo t =* 14,1 *ms.*

Las figuras 7.1.a y 7.1.b muestran el campo sonoro producido por una fuente puntual de 1*KHz* en un medio sin atenuación para distintos instantes de tiempo.

Para el caso con atenuación en el medio se realizó una simulación con una atenuación $\alpha = 0.06 \times 10^{-3}$ dB/m (atenuación específica para 1 *KHz,* Anexo 2). Las imágenes son detalladas en la figura 7.2.



a) b)

Figura 7.2. *Imágenes de simulación de campo sonoro producido por fuente de* 1 *KHz para atenuación del medio* $\alpha = 0.06 \times 10^{-3}$ dB/m. *a) Campo sonoro a un tiempo t* = 5,3 *ms. b) Campo sonoro a un tiempo t* = 14,1 *ms.*

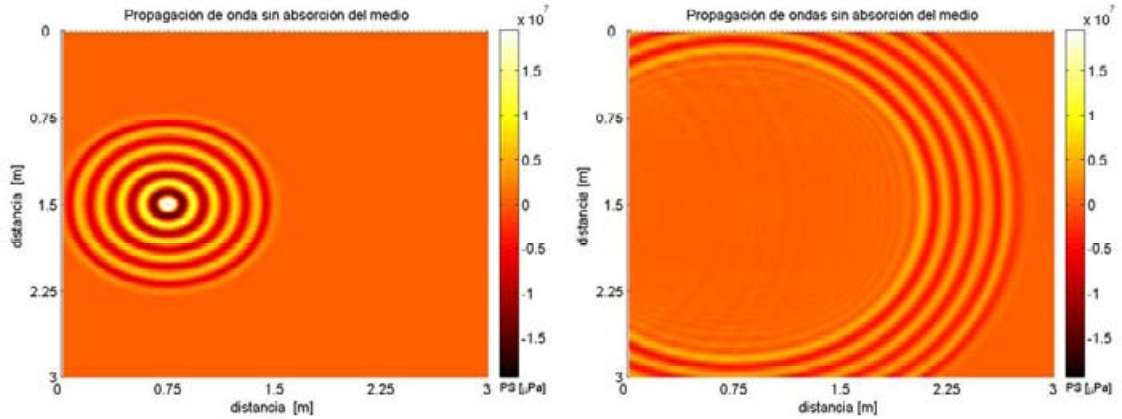
Las imágenes de las figuras 7.2.a y 7.2.b muestran el campo sonoro producido por una fuente puntual de 1 *KHz* para distintos instantes de tiempo. La señal sonora emitida por la fuente se propaga a través de un medio con atenuación, con un valor de coeficiente de atenuación α específico para la frecuencia de la señal emitida.

Para la simulación del campo sonoro producido por una fuente de frecuencia de 10*KHz*, se consideraron los siguientes valores para los parámetros de la ecuación 7.3.

Velocidad de propagación sonora	$c = 1500\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 0.015\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 3.5355 \times 10^{-6}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 200 \times 200\ \ puntos$

$$d = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Las imágenes ilustradas en la figura 7.3 detallan el campo sonoro producido por la fuente en un medio con atenuación $\alpha = 0$.

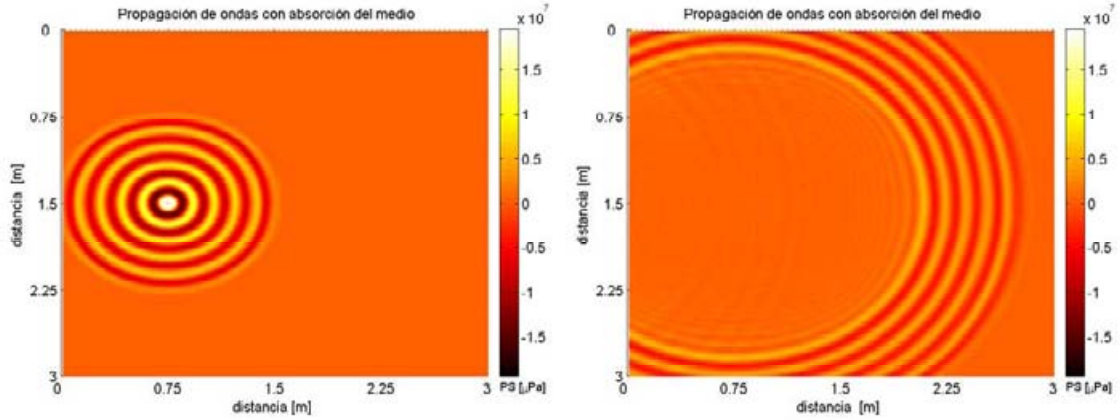


a) b)

Figura 7.3. *Imágenes de simulación de campo sonoro producido por fuente de* 10 *KHz para atenuación del medio* $\alpha = 0$. *a) Campo sonoro a tiempo t* = 0,53 *ms. b) Campo sonoro a tiempo t* = 1,4 *ms.*

Las figuras 7.3.a y 7.3.b muestran el campo sonoro producido por una fuente puntual de 10 *KHz* en un medio sin atenuación para dos instantes de tiempo distintos.

Las imágenes de la figura 7.4 representan el campo sonoro para un medio con coeficiente de atenuación $\alpha = 1 \times 10^{-3}\, dB/m$ especificado para una frecuencia de 10 *KHz* (Anexo 2).



a) b)

Figura 7.4. *Imágenes de simulación de campo sonoro producido por fuente de* 10 *KHz para atenuación del medio* $\alpha = 1\times10^{-3}\ dB/m$. *a) Campo sonoro a tiempo t =* 0,53 *ms. b) Campo sonoro a tiempo t =* 1,4 *ms.*

Las imágenes de las figuras 7.4.a y 7.4.b muestran el campo sonoro producido por una fuente puntual de 10 *KHz* localizada en el medio para dos instantes de tiempo distintos. En ésta simulación, la onda sonora se propaga en un medio con un coeficiente de atenuación específico para la frecuencia de la señal emitida.

Para conocer las diferencias entre el campo sonoro de un medio sin atenuación y en un medio con atenuación se tomaron valores de presión en dos posiciones distintas del dominio espacial en función del tiempo. Una de estas posiciones fue la posición de la fuente mientras que la otra fue a una determinada distancia *D* de dicha fuente. Esto fue realizado para evaluar el *nivel sonoro equivalente* (*LEQ*) en cada posición. Dicho valor puede ser obtenido a través de la siguiente expresión.

$$LEQ = 10\log\left(\frac{1}{(n_f - n_i)}\sum_{j=i}^{f}\frac{p_j^2}{p_{ref}^2}\right) \qquad (4)$$

donde

P_j : Presión instantánea

P_{ref} : Presión de referencia (1 μPa en agua de mar)

n_i : número de muestra en el tiempo inicial

n_f : número de muestra en el tiempo final

Luego, a partir de la diferencia entre los *LEQ* de las dos posiciones es posible obtener un valor de atenuación total *AT* de la señal. El valor *AT* representa las pérdidas por expansión más absorción del medio para la simulación del campo sonoro producido en un medio con atenuación. Por otro lado, el valor de *AT* sólo representa las pérdidas por expansión para la simulación del campo sonoro en un medio sin atenuación. La diferencia entre el valor *AT* de la simulación con atenuación en el medio ($AT_{c_absorción}$) y el valor *AT* de la simulación sin atenuación del medio ($AT_{s_absorción}$) entrega el valor en *dB* de atenuación por absorción del medio para la distancia que separa los puntos.

$$Att_D = AT_{c_absorción} - AT_{s_absorción} \tag{7.5}$$

Este valor se debe aproximar a la atenuación que debería sufrir la señal al recorrer dicha distancia

$$Att_D \approx \alpha D \tag{7.6}$$

donde

$$D = nh$$

D: Distancia entre los dos puntos

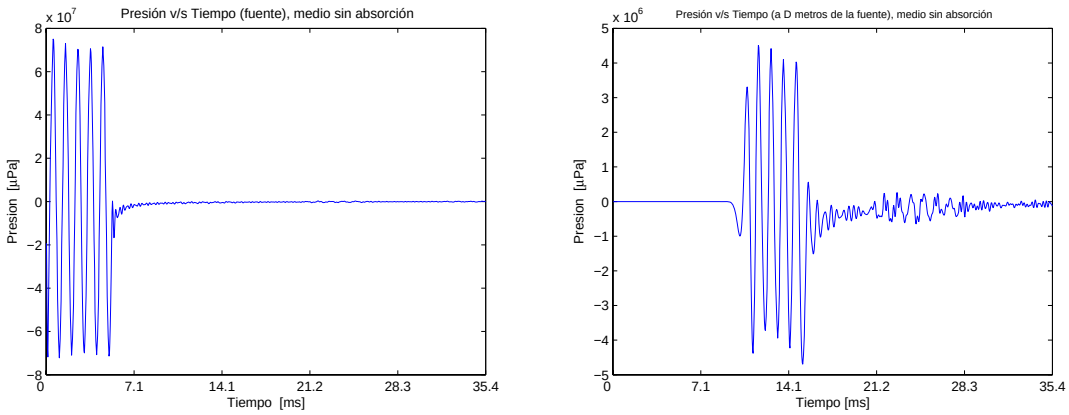
h: Espaciamiento de grilla

n: Número de puntos entre las dos posiciones medidas

Los puntos de medición fueron la posición de la fuente y a 100 puntos de la fuente. De acuerdo a esto, para la simulación del campo sonoro emitido por una fuente de 1 *KHz*, se tiene que

$$\begin{aligned} D &= nh \\ &= 100 \times 0.15 \\ &= 15\ m \end{aligned}$$

Las gráficas de la presión sonora versus el tiempo para cada posición de la simulación de propagación de ondas en un medio sin absorción para la señal de 1 *KHz* son ilustradas en la figura 7.5.



a) b)

Figura 7.5. *Presión sonora en dos posiciones distintas del dominio espacial para una fuente de* 1 *KHz en un medio con atenuación* α=0. *a) Presión sonora instantánea en la fuente versus tiempo. b) Presión sonora instantánea a* 15 *m de la fuente versus tiempo.*

La figura 7.5 muestra las gráficas de la presión sonora instantánea versus el tiempo para las dos posiciones elegidas del dominio espacial correspondientes a la simulación del campo sonoro emitido por una fuente de 1 *KHz* en un medio sin atenuación.

A partir de los valores mostrados en la figura 7.5 es posible conocer el valor del *LEQ* para cada posición tomando un determinado número de muestras de cada gráfica. De la figura 7.5.a se tomaron las primeras 150 muestras debido a que estas corresponden al tiempo en que la fuente se encuentra activa. Por otra parte, de la figura 7.5.b, se consideraron 150 muestras desde cuando se comienza a visualizar la perturbación.

Para la simulación sin absorción, los *LEQ* fueron los siguientes.

LEQ_f = 154.0102 *dB*
LEQ_p = 128.7583 *dB*

LEQ_f: Nivel sonoro equivalente en la fuente
LEQ_p: Nivel sonoro equivalente a una distancia *D* de la fuente

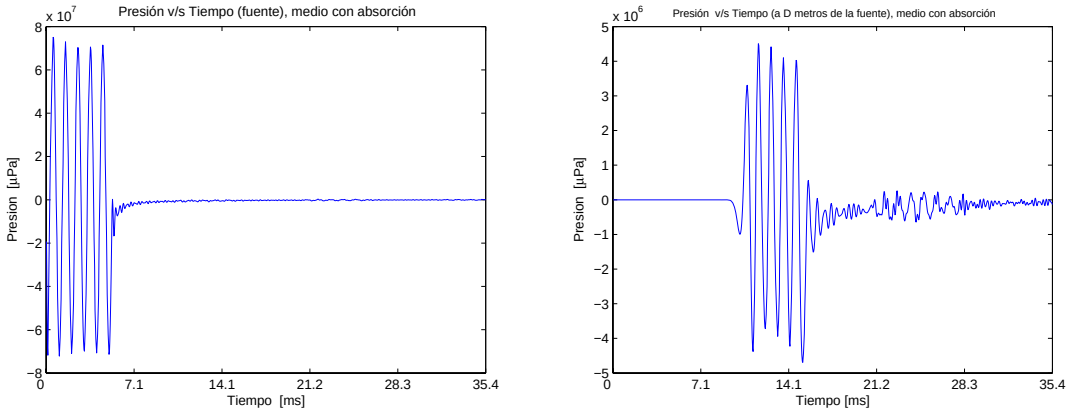
Luego se obtiene el valor de atenuación

$AT_{s_absorción}$= 25.2518 *dB*

Las gráficas de la figura 7.6 representan la presión sonora versus el tiempo para los puntos nombrados anteriormente en la simulación del campo sonoro producido por una fuente de 1*KHz* a través de un medio con absorción $\alpha = 0.06 \times 10^{-3} \quad dB/m$.

En la figura 7.6 se muestran las gráficas de la presión sonora instantánea versus el tiempo para las dos posiciones elegidas del dominio espacial correspondientes a la simulación del campo sonoro emitido por una fuente de 1 *KHz* en un medio con atenuación.

Los valores de los *LEQ* de cada punto de medición para la propagación de ondas en un medio con absorción fueron obtenidos de igual forma que los valores anteriores. Estos más el valor de $AT_{c_absorción}$ son detallados a continuación.



a) b)

Figura 7.6. *Presión sonora en dos posiciones distintas del dominio espacial para una fuente de* 1 *KHz en un medio con atenuación* $\alpha = 0.06 \times 10^{-3}$ dB/m. *a) Presión sonora en la fuente versus tiempo. b) Presión sonora a* 15 *m de la fuente versus tiempo.*

$LEQ_f = 154.0102\ dB$

$LEQ_p = 128.7574\ dB$

$AT_{c_absorción} = 25.2528\ dB$

Con los datos anteriores es posible determinar un valor aproximado de la absorción que sufre una señal de 1 *KHz* que recorre una distancia *D*.

$Att_D = 9.3995 \times 10^{-4}\ dB$

Por otro lado, el valor calculado de atenuación por absorción del medio para una distancia *D* es el siguiente

$ATT_c = nh\alpha$

$= 9 \times 10^{-4}\ dB$

Al comparar estos dos últimos valores, se observa que el valor de atenuación extraído *Att_D* de la simulación se aproxima al valor de atenuación *ATT_c* por distancia calculado a partir de la ecuación 7.6.

De igual forma que en el caso anterior, para la simulación del campo sonoro emitido por una fuente de 10 *KHz* en un medio con atenuación, los puntos de medición elegidos fueron la posición de la fuente y a 100 puntos de dicha fuente. De acuerdo a esto se tiene que la distancia entre los dos puntos de medición es,

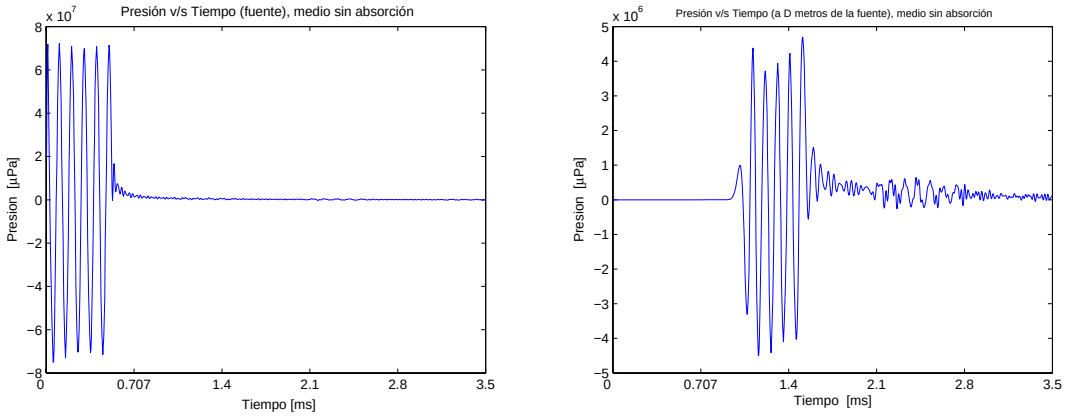
$$\begin{aligned} D &= nh \\ &= 100 \times 0.015 \\ &= 1.5\ m \end{aligned}$$

Las gráficas de presión sonora versus tiempo de las distintas posiciones elegidas para los casos con atenuaciones del medio $\alpha = 0$ y $\alpha = 1 \times 10^{-3}$ dB/m son ilustradas en la figura 7.7 y en la figura 7.8 respectivamente. El campo sonoro para ambas representaciones fue emitido por una fuente de 10 *KHz*.

Los datos de *LEQ* y *AT* para cada caso son detallados en la siguiente tabla.

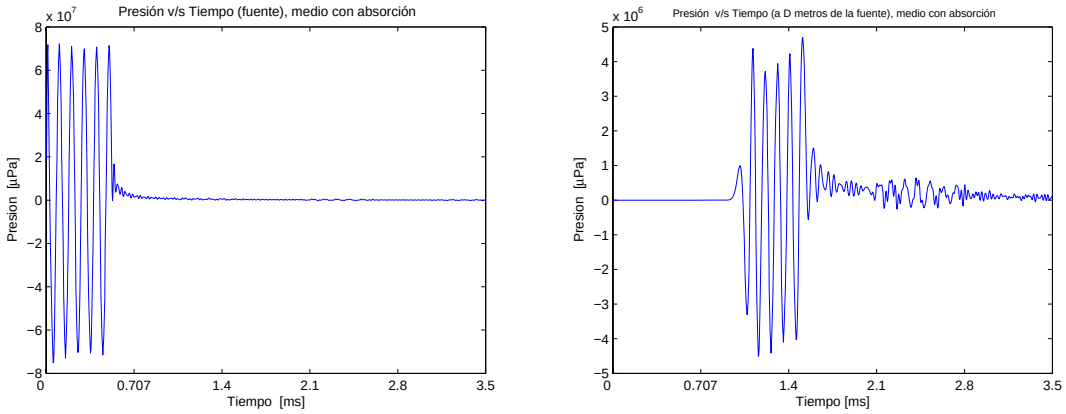
	LEQ_f (dB)	LEQ_p (dB)	$AT_{s_absorción}$ (dB)	$AT_{c_absorción}$ (dB)
Medio sin absorción	154.0102	128.7583	25.2518	-
Medio con absorción	154.0102	128.7568	-	25.2534

Tabla 7.1. *Valores de LEQ en las dos distintas posiciones del dominio espacial elegidas y atenuaciones totales en medios con y sin absorción para fuente de 10 KHz.*



a) b)

Figura 7.7. *Presión sonora en dos posiciones distintas del dominio espacial para una fuente de* 10 *KHz en un medio con atenuación* $\alpha = 0$. *a) Presión sonora en la fuente versus tiempo. b) Presión sonora a* 1,5 *m de la fuente versus tiempo.*



a) b)

Figura 7.8. *Presión sonora en dos posiciones distintas del dominio espacial para una fuente de* 10 *KHz en un medio con atenuación* $\alpha = 1\times10^{-3}$ dB/m. *a) Presión sonora en la fuente versus tiempo. b) Presión sonora a* 1,5 *m de la fuente versus tiempo.*

A partir de estos datos es posible determinar un valor aproximado de la absorción que sufre una señal de 1 *KHz* que recorre una distancia *D*.

$Att_D = 0.0016\ dB$

Por otro lado, el valor de atenuación calculado a partir de la ecuación 7.6 para una distancia *D* es el siguiente

$$ATT_c = nh\alpha$$
$$= 0.0015\ dB$$

Como se puede ver, el valor de atenuación de la simulación se aproxima al valor calculado a partir de la expresión de la ecuación 7.6.

7.2 Simulación de campo sonoro emitido por arreglos lineales en medio homogéneo.

Los arreglos lineales son utilizados en distintos tipos de equipamiento acústico de percepción remota asociados a disciplinas como la oceanografía física y medicina entre otras. Es por dicha razón que la simulación del campo sonoro emitido por ésta clase de arreglos es de gran ayuda a la hora de diseñar equipamiento vinculado a éstas áreas.

La simulación de los arreglos lineales fue realizada para los distintos casos analizados en la sección 4 con el fin de comprobar los efectos resultantes al cambiar las propiedades de dichos arreglos.

7.2.1 Directividad del arreglo en función de espacio entre elementos

El primer caso muestra los cambios en la directividad del arreglo lineal en función de cambios en el espaciamiento entre elementos.

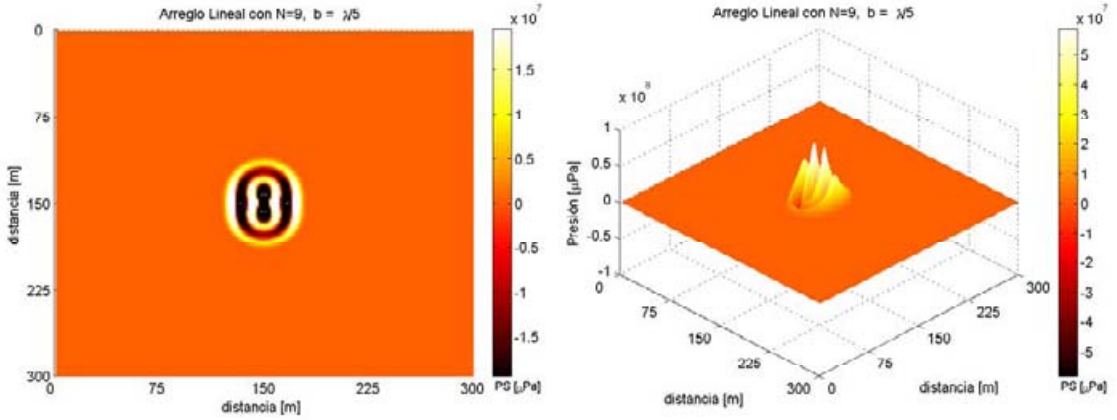
A continuación son detalladas las imágenes de la simulación de un campo sonoro emitido por un arreglo lineal conformado por nueve elementos situados en un medio homogéneo. Cada elemento del arreglo emitió una señal de 100 *Hz* en fase.

Para dicha simulación fueron considerados los siguientes valores para los parámetros de la aproximación de la ecuación de onda.

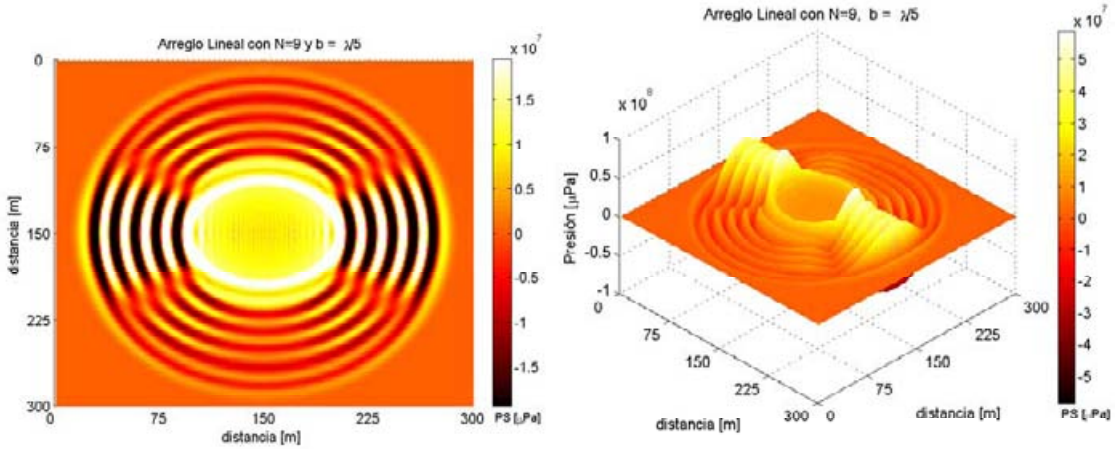
Velocidad de propagación sonora	$c = 1500\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 1.5\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 3.5355 \times 10^{-4}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 200 \times 200\ \ puntos$
Número de fuentes	$N = 9$

$$d = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Las imágenes ilustradas en la figura 7.9 detallan el campo sonoro emitido por el arreglo para una separación b de $\lambda/5$ m entre los elementos que lo conforman. Los elementos del arreglo emitieron una señal de 100 Hz y se encontraban en fase. En la figura se muestra el campo en distintos instantes de tiempo. Las imágenes de la derecha de cada figura exponen en forma detallada las amplitudes de presión del campo sonoro. A partir de tal representación se logra apreciar que los lóbulos principales se forman a lo largo del eje perpendicular a la línea del arreglo.



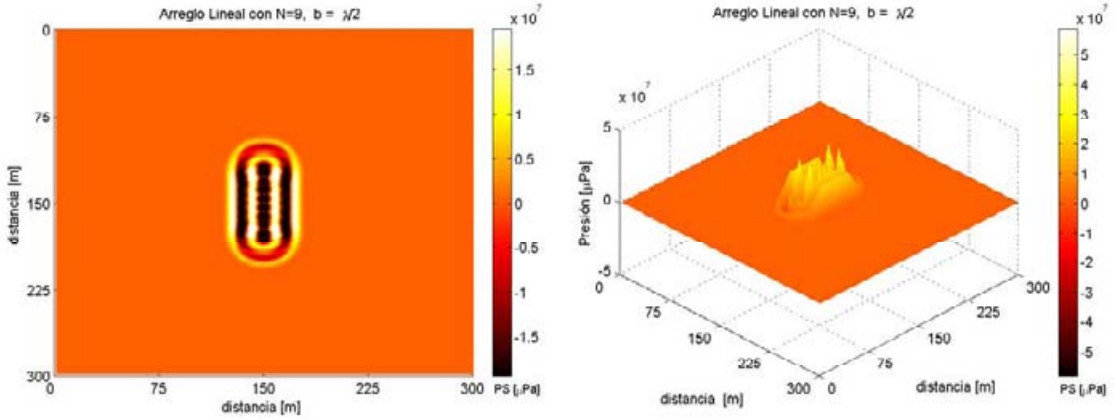
a)



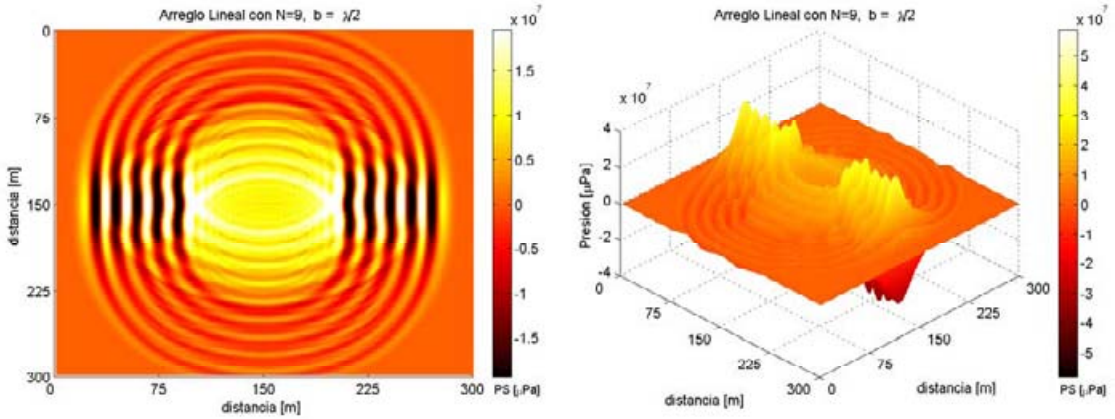
b)

Figura 7.9. *Imágenes de simulación de arreglo lineal conformado por nueve fuentes de* 100 *Hz para una separación b*= λ/5 *m entre elementos. a) Imagen de campo sonoro a un tiempo t* = 17,4 *ms. b) Imagen de campo sonoro a un tiempo t* = 88,4 *ms.*

Las imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por el arreglo para una separación $b = \lambda/2$ entre las fuentes puntuales del arreglo son presentadas en la figura 7.10. Cada elemento del arreglo emitió una señal de 100 *Hz*, donde dichos elementos se encontraban en fase



a)



b)

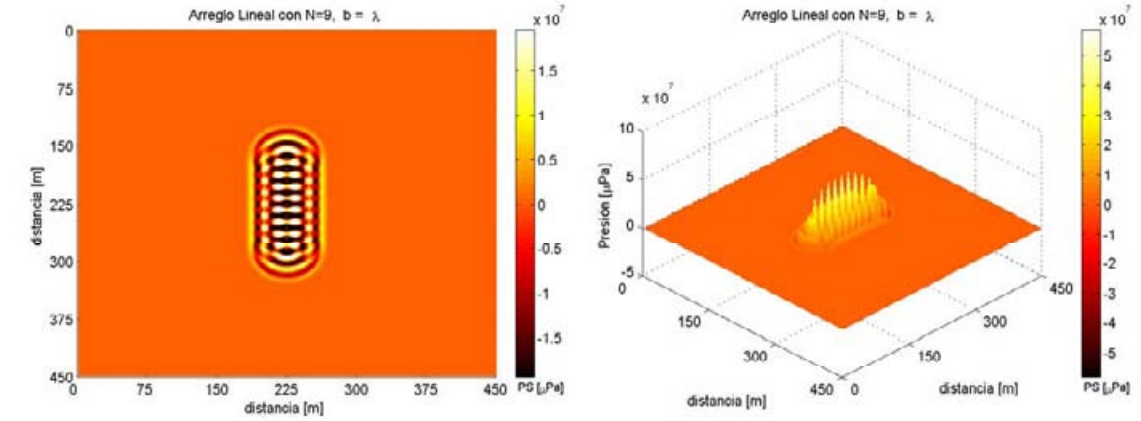
Figura 7.10. *Imágenes de simulación de arreglo lineal conformado por nueve fuentes de* 100 *Hz para una separación b =* λ/2 *m entre elementos. a) Imagen de campo sonoro a un tiempo t =*17,4 *ms. b) Imagen de campo sonoro a un tiempo t =* 88,4 *ms.*

En las figuras 7.10.a y 7.10.b se muestra el campo sonoro emitido por el arreglo en distintos instantes de tiempo. Las imágenes de la derecha de cada figura permiten ver en forma más detallada la amplitud de la señal. En dichas imágenes se logra observar que los lóbulos principales se presentan a lo largo del eje perpendicular al arreglo. Estos lóbulos, en

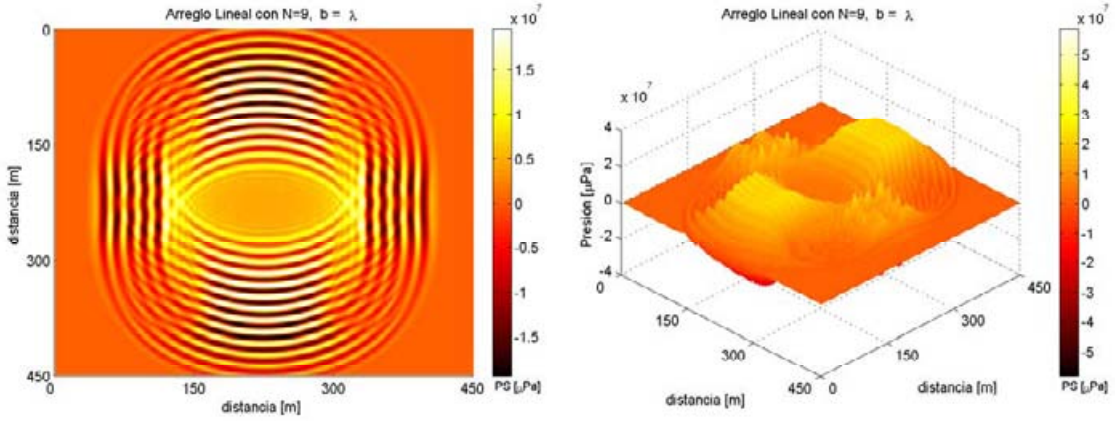
comparación con los de la simulación del arreglo con separación $b = \lambda/5$, son más estrechos.

La figura 7.11 muestra las imágenes del campo sonoro emitido por el arreglo lineal para una separación de $b = \lambda$ *m* entre cada elemento del arreglo. A diferencia de los dos casos anteriores, se consideró el siguiente tamaño de grilla

Tamaño de grilla $m \times n = 300 \times 300$ *puntos*



a)



b)

Figura 7.11. *Imágenes de simulación de arreglo lineal conformado por nueve fuentes de* 100 *Hz para una separación b= λ m entre elementos. a) Imagen de campo sonoro a un tiempo t =* 28,3 *ms. b) Imagen de campo sonoro a un tiempo t =* 123,7 *ms.*

En las figuras 7.11.a y 7.11.b se detallan las imágenes de la simulación de un campo sonoro producido por el arreglo lineal para dos distintos instantes de tiempo. Las imágenes de la derecha de cada figura permiten un mejor análisis de las amplitudes de la señal.

A diferencia que en los casos anteriores, los lóbulos principales se encuentran a lo largo de la línea del arreglo. Por otro lado existe un aumento en la presencia de lóbulos secundarios.

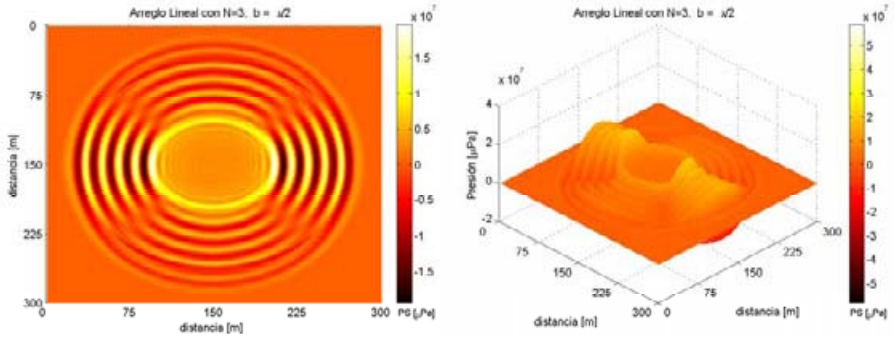
7.2.2 Directividad del arreglo en función del número de elementos

El segundo caso analizado detalla los cambios en la directividad del arreglo en función de la variación de los números de elementos. En la simulación se consideraron los siguientes valores para los parámetros de la aproximación por diferencias finitas.

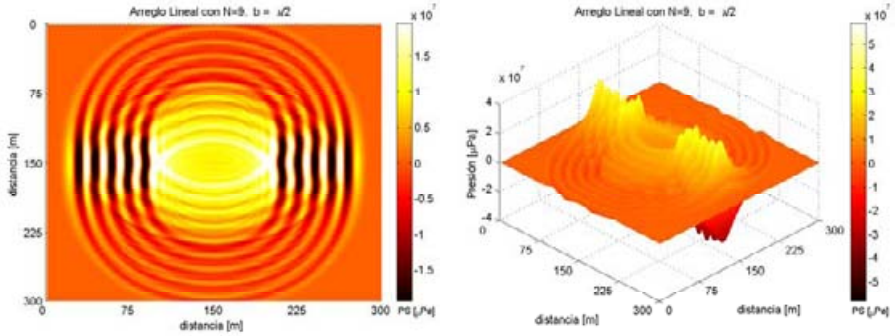
Velocidad de propagación sonora	$c = 1500\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 1.5\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 3.5355 \times 10^{-4}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 200 \times 200\ \ puntos$
Distancia entre fuentes	$b = \lambda/2\ \ m$

$$d = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

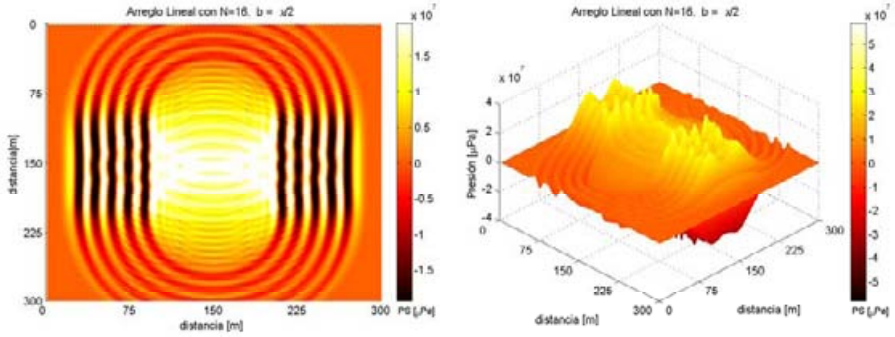
Las imágenes de las simulaciones para arreglos lineales conformados por 3, 9 y 16 elementos son ilustradas en la figura 7.12. En la figura 7.12.a se presenta la simulación del campo sonoro emitido por un arreglo conformado por 3 fuentes. La figura 7.12.b detalla imágenes de una simulación de un arreglo lineal conformado por 9 fuentes. Por último, la figura 7.12.c muestra el campo sonoro producido por una arreglo lineal de 16 fuentes. Todas las imágenes representan el mismo instante tiempo para los distintos arreglos. Las imágenes de la derecha de cada figura, permiten observar en forma más detallada la amplitud del campo sonoro.



a)



b)



c)

Figura 7.12. *Imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por arreglos lineales con distinto número de elementos. a) Campo sonoro emitido por arreglo lineal de* 3 *elementos. b) Campo sonoro emitido por arreglo lineal de* 9 *elementos. b) Campo sonoro emitido por arreglo lineal de* 16 *elementos.*

Las imágenes de las figuras mostradas anteriormente muestran que para las tres simulaciones, los lóbulos principales se producen a lo largo del eje perpendicular a la línea

del arreglo. También se puede apreciar que a medida que crece el número de elementos, la directividad del arreglo se ve mejorada ya que los lóbulos principales se vuelven más estrechos.

7.2.3. Directividad del arreglo en función del desfase entre elementos

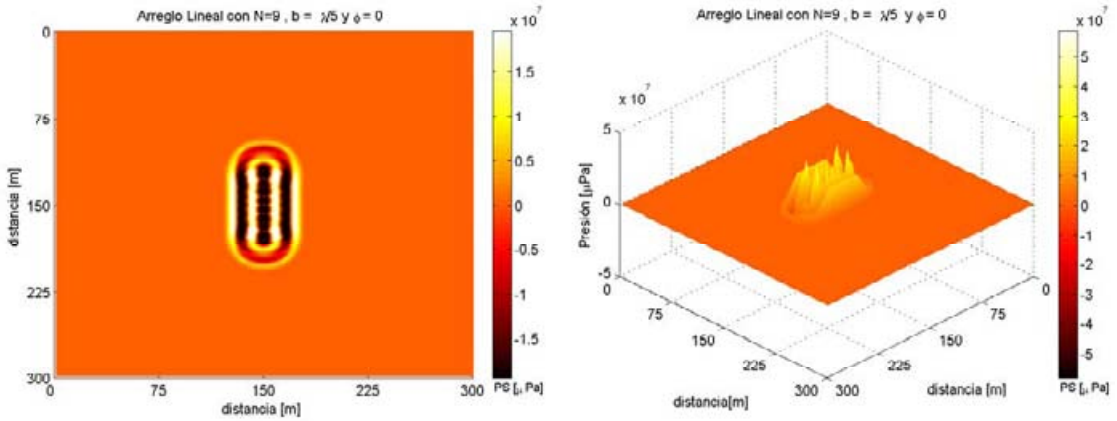
En el tercer caso se realizaron simulaciones de arreglos lineales para distintos valores de desfase entre elementos. Los valores de los parámetros utilizados en dichas simulaciones fueron los siguientes.

Velocidad de propagación sonora	$c = 1500\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 1.5\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 3.5355 \times 10^{-4}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 200 \times 200\ \ puntos$
Distancia entre fuentes	$b = \lambda/2\ \ m$
Número de fuentes	$N = 9$

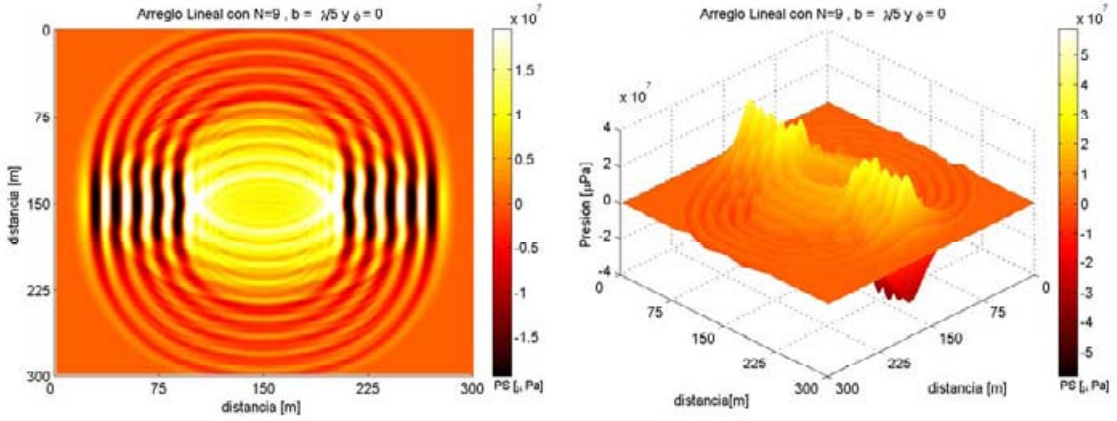
$$d = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

A continuación se detallan las imágenes de simulaciones con distintos valores de desfase ϕ entre elementos.

La figura 7.13 muestra el campo sonoro producido por un arreglo de nueve fuentes para un desfase entre elementos de $\phi = 0$. En dichas imágenes se muestra la simulación del campo sonoro emitido por un arreglo lineal conformado por nueve fuentes puntuales con desfase nulo entre elementos para dos instantes de tiempo distintos. A partir de las imágenes que están a la derecha de cada figura es posible visualizar en forma más detallada las amplitudes de presión sonora de la señal.



a)

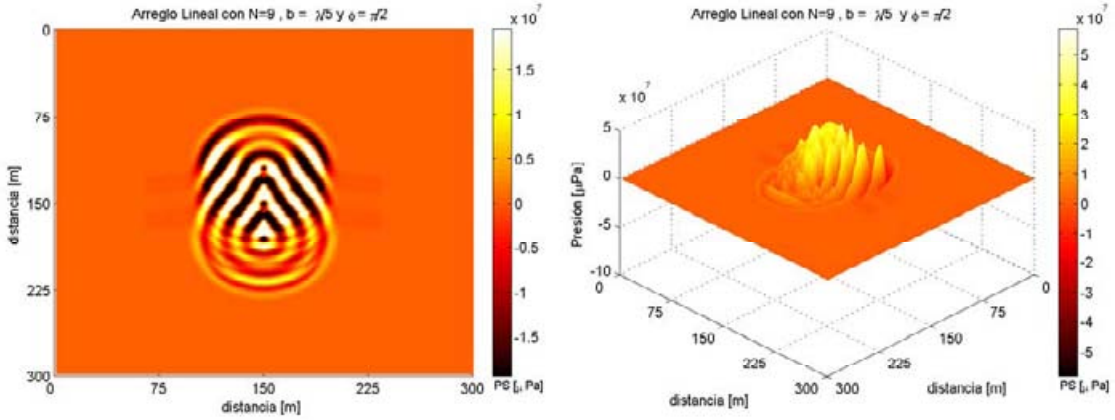


b)

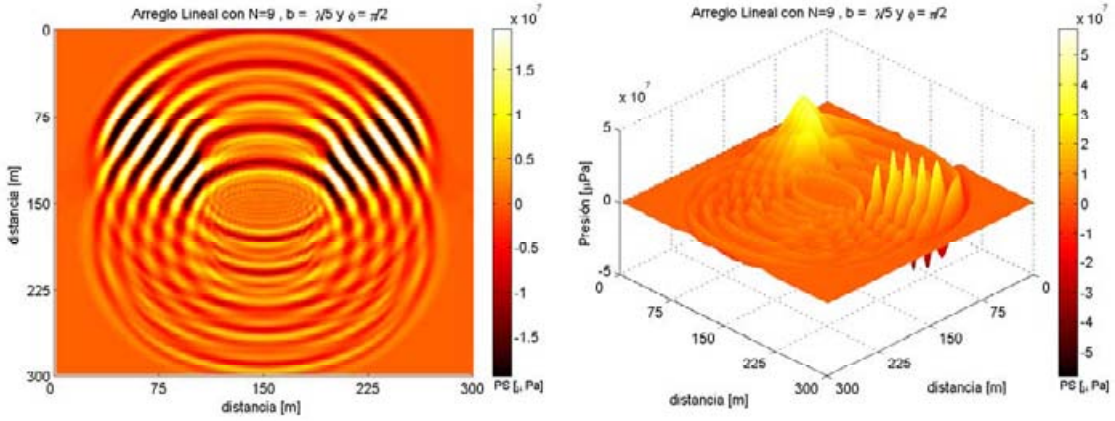
Figura 7.13. *Imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por un arreglo lineal de* 9 *fuentes con un desfase* $\phi = 0$ *entre fuentes. a) Imagen de campo sonoro a tiempo t*=17,7 *ms. b) Imagen de campo sonoro a tiempo t* = 88,4 *ms.*

Las imágenes anteriores muestran que los lóbulos principales se forman a lo largo del eje perpendicular a la línea del arreglo.

Las imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por el arreglo de nueve fuentes con desfase $\phi = \pi/2$ entre elementos es ilustrada en la figura 7.14.



a)



b)

Figura 7.14. *Imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por un arreglo lineal de* 9 *fuentes con un desfase* $\phi = \pi/2$ *entre fuentes. a) Imagen de campo sonoro a tiempo* t=35,4 *ms. b) Imagen de campo sonoro a tiempo* t = 88,4 *ms.*

En las figuras 7.14.a y 7.14.b se muestran imágenes del campo sonoro emitido por un arreglo lineal conformado por nueve fuentes puntuales con desfase $\phi = \pi/2$ entre cada elemento del arreglo para instantes de tiempo distintos. En las imágenes de la derecha de cada figura se tiene una mejor visualización de las amplitudes de la presión sonora de la señal.

A partir de las imágenes presentadas anteriormente es posible observar que los lóbulos principales se producen a lo largo de una línea que no se encuentra en cuadratura con el eje del arreglo.

Las imágenes de la simulación del mismo arreglo lineal para un desfase $\phi = \pi/1.2$ son ilustradas en la figura 7.15.

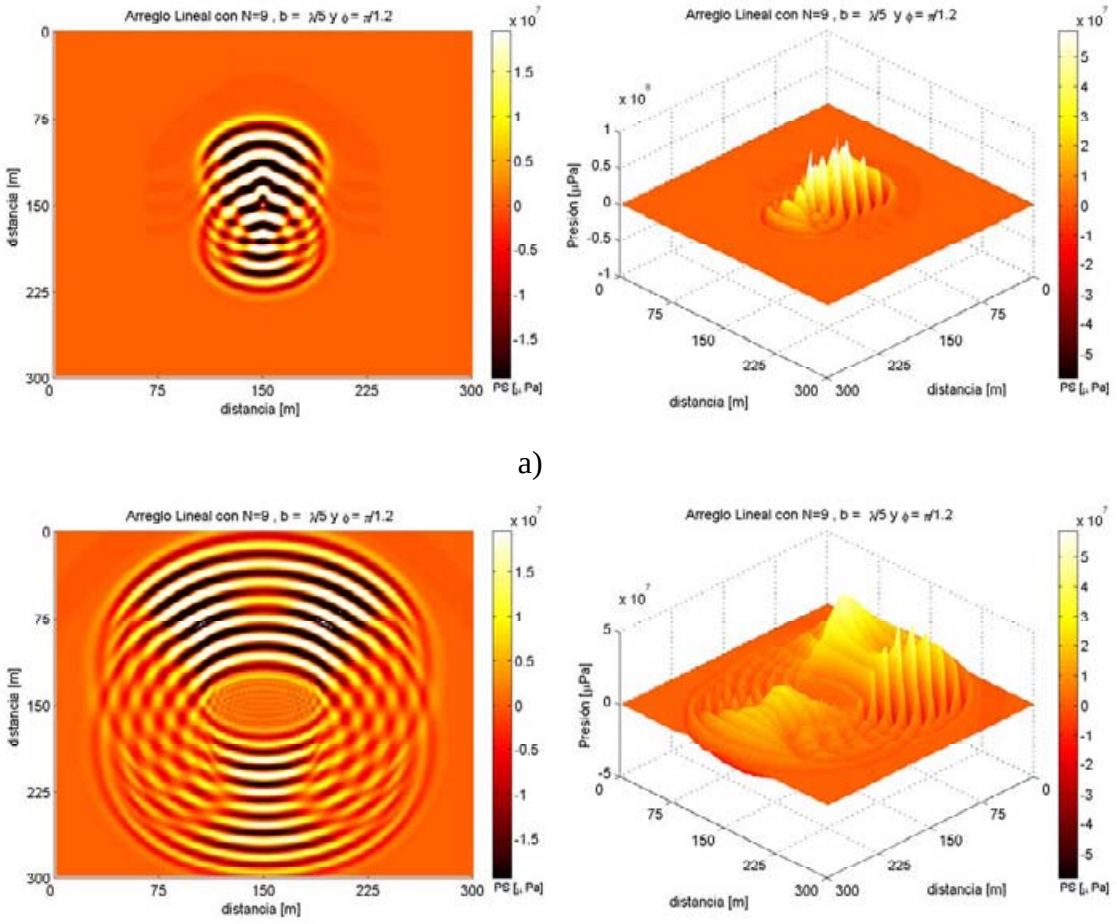


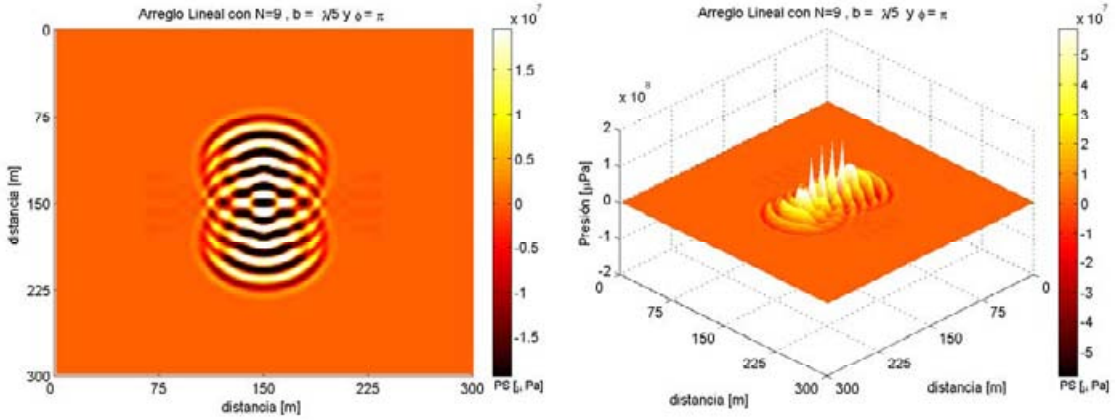
Figura 7.15. *Imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por un arreglo lineal de* 9 *fuentes con un desfase* $\phi = \pi/1.2$ *entre fuentes. a) Imagen de campo sonoro a tiempo* t=35,4 *ms. b) Imagen de campo sonoro a tiempo* t = 88,4 *ms.*

En las figuras 7.15.a y 7.15.b se muestra la simulación del campo sonoro producido por un arreglo lineal con desfase $\phi = \pi/1.2$ entre las fuentes que lo conforman, a distintos instantes de tiempo. A la derecha de cada figura se detallan imágenes que exponen con mayor claridad las amplitudes de presión del campo sonoro.

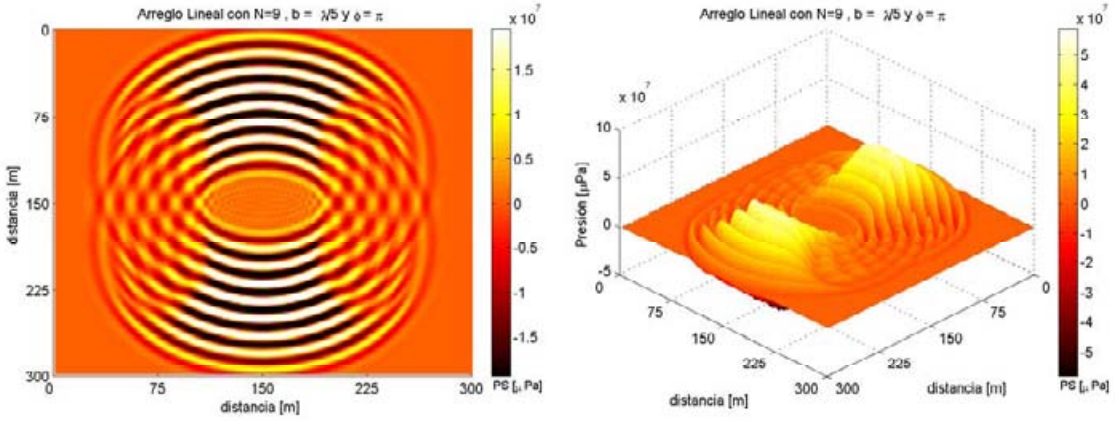
Al igual que en la simulación anterior, las imágenes de la figura 7.15 muestran que los lóbulos principales se producen a lo largo de líneas que no se encuentran en cuadratura con el eje del arreglo. La diferencia con la simulación anterior es que el ángulo es más pequeño. También se comienza a visualizar un lóbulo a lo largo del eje del arreglo.

La figura 7.16 muestra imágenes de las simulaciones del arreglo de nueve fuentes con un desfase de $\phi = \pi$ entre elementos. En dicha figura las imágenes representan al campo sonoro a distintos instantes de tiempo. Las imágenes de la derecha de cada figura muestran con más detalle las amplitudes de señal. A partir de dichas figuras es posible notar que los lóbulos principales se producen a lo largo del eje del arreglo

Las imágenes de las figuras 7.13, 7.14, 7.15 y 7.16 ilustran la transición existente entre un sistema de radiación transversal (broadside array) a un sistema de radiación longitudinal (end-fire array).



a)



b)

Figura 7.16. *Imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por un arreglo lineal de* 9 *fuentes con un desfase* $\phi = \pi$ *entre fuentes. a) Imagen de campo sonoro a tiempo t*=35,4 *ms. b) Imagen de campo sonoro a tiempo t* = 88,4 *ms.*

7.3 Simulación de propagación de ondas sonoras en dos medios con distinto valor de propagación del sonido.

El fenómeno de propagación de ondas sonoras a través de dos medios distintos fue representado a partir de la aproximación por diferencias finitas de la ecuación de ondas. En dicha aproximación se consideraron dos medios con distintos valores de velocidad de propagación sonora. Para el medio 1 se consideró la siguiente expresión.

$$p_{i,j}^{n+1} = 2p_{i,j}^{n} - p_{i,j}^{n-1} + \frac{c_1^2 \Delta t^2}{h^2}\left(p_{i+1,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n} + p_{i,j+1}^{n} + p_{i,j-1}^{n} - 4p_{i,j}^{n}\right) \qquad (7.7)$$

donde c_1 representa la velocidad de propagación del sonido en el medio 1.De forma análoga, para el medio 2 se consideró la siguiente ecuación.

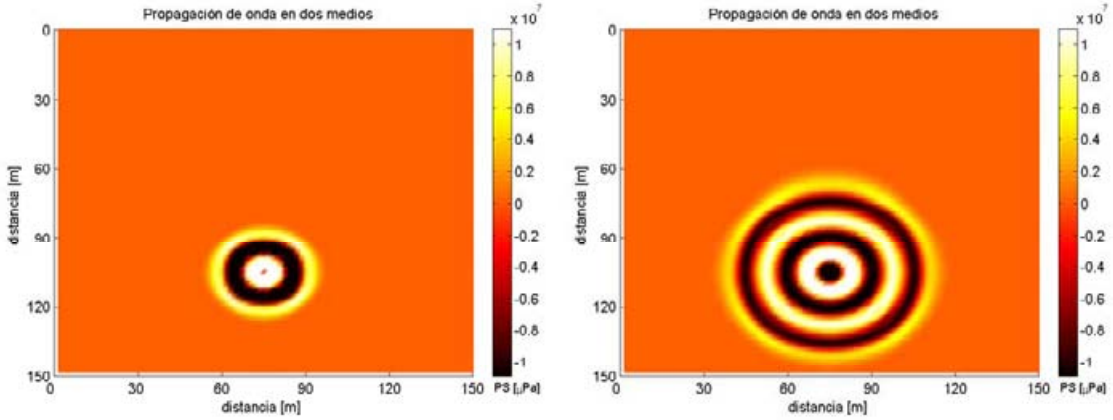
$$p_{i,j}^{n+1} = 2p_{i,j}^{n} - p_{i,j}^{n-1} + \frac{c_2^2 \Delta t^2}{h^2}\left(p_{i+1,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n} + p_{i,j+1}^{n} + p_{i,j-1}^{n} - 4p_{i,j}^{n}\right) \qquad (7.8)$$

donde c_2 representa la velocidad de propagación del sonido en el medio 2.

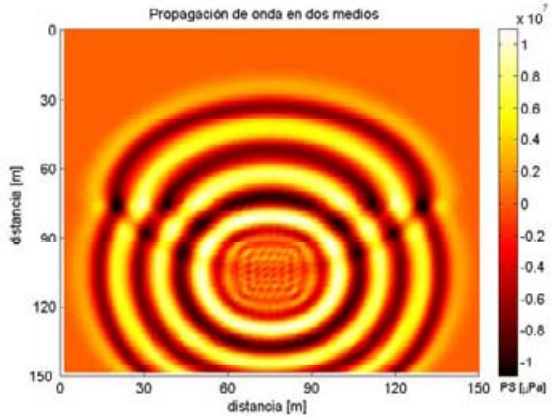
Las imágenes de la figura 7.17 representan la simulación del campo sonoro producido por una fuente de 100 *Hz* situada en un dominio con medios distintos. Los valores de los parámetros de la aproximación discreta de la ecuación de onda son dados a continuación.

Velocidad Medio 1	$c_1 = 1500\, m/s$
Velocidad Medio 2	$c_2 = 2000\, m/s$
Espaciamiento de grilla	$h = 1.5\ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 2.6517 \times 10^{-4}\ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 100 \times 100$ *puntos*

$$d_{\max} = c_{\max}\frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



a) b)



c)

Figura 7.17. *Imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por una fuente de* 100*Hz situada en la posición* x_0=75 *m,* y_0=115 *m para un medio con distintas velocidades de propagación sonora. a) Imagen de campo sonoro a tiempo t =* 13,3 *ms. b) Imagen de campo sonoro a tiempo t =* 26,5 *ms. c) Imagen de campo sonoro a tiempo t =*47,7 *ms.*

Las figuras 7.17.a, 7.17.b y 7.17.c muestran el campo sonoro en distintos instantes de tiempo. El dominio espacial está dividido en dos partes donde la mitad inferior

representa al medio con velocidad del sonido c_1 y la mitad superior al medio con velocidad del sonido c_2. A partir de dichas imágenes es posible visualizar el fenómeno de refracción sonora producto del cambio de medio. También se pueden observar los cambios en tamaño de longitud de onda que sufre la señal emitida.

7.4 Simulación de propagación de ondas sonoras en medio estratificado.

La propagación de ondas a través de un medio estratificado fue representada a partir de la siguiente aproximación por diferencias finitas.

$$p_{i,j}^{n+1} = 2p_{i,j}^{n} - p_{i,j}^{n-1} + \frac{c_i^2 \Delta t^2}{h^2}\left(p_{i+1,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n} + p_{i,j+1}^{n} + p_{i,j-1}^{n} - 4p_{i,j}^{n}\right) \qquad (7.9)$$

donde c_i es la velocidad del sonido que varía en función de la profundidad.

Las imágenes de la figura 7.19 detallan la simulación del campo sonoro emitido por una fuente de 100 *Hz* en un medio estratificado. Los valores de los parámetros de la aproximación por diferencia finita utilizada son dados a continuación.

Espaciamiento de grilla	$h = 1.5\ \ m$
Periodo de muestreo	$\Delta t = 1.7678 \times 10^{-4}\ \ s$
Tamaño de grilla	$m \times n = 100 \times 300$ *puntos*
Velocidad de propagación sonora mínima	c_{min} = 1500 m/s
Velocidad de propagación sonora máxima	c_{max} = 3000 m/s

$$d_{\max} = c_{\max}\frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

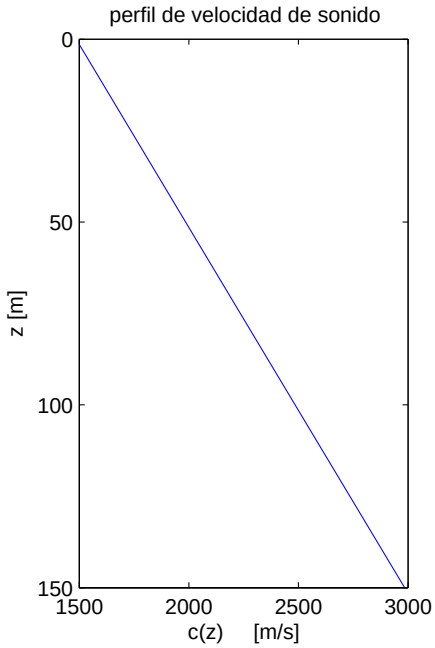
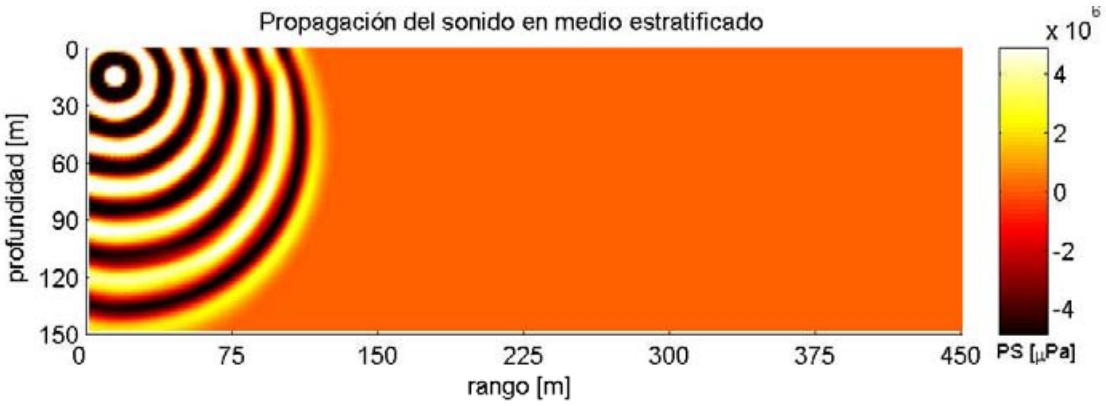
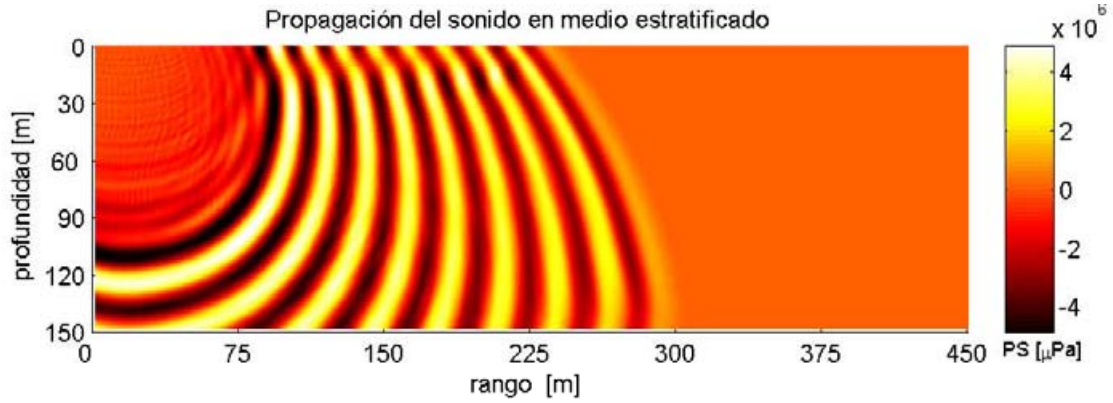


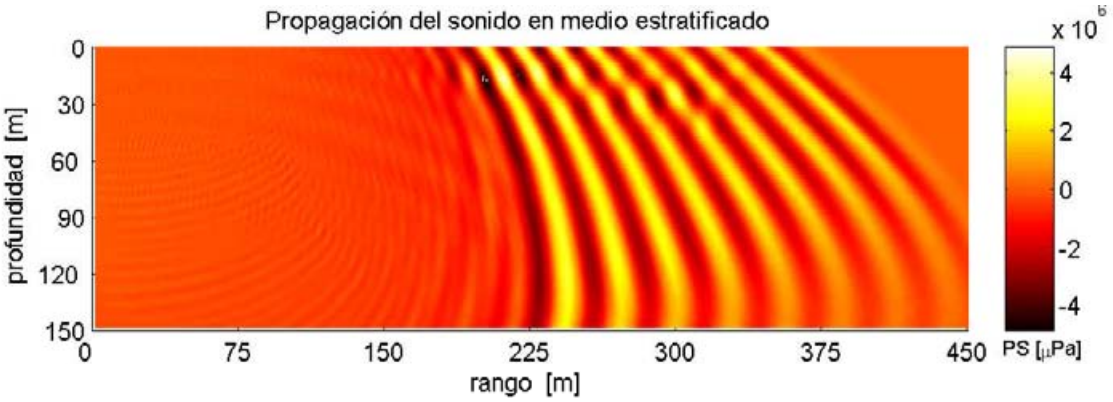
Figura 7.18. *Perfil de velocidad sonora utilizado en la simulación*



a)



b)



c)

Figura 7.19. *Imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por una fuente de* 100 *Hz en un medio estratificado. a) campo sonoro a tiempo t* =61,9 *ms. b) Campo sonoro a tiempo t* =132,6 *ms. c) Campo sonoro a tiempo t* =194,5 *ms.*

En la figura 7.18 se detalla el perfil de velocidad del sonido utilizado en la simulación. Por otro lado, la figura 7.19 muestra imágenes de la simulación del campo sonoro emitido por una fuente de 100 *Hz* en un medio estratificado a distintos instantes de tiempo. En estas últimas imágenes se aprecia claramente el fenómeno de refracción de la señal producido por los cambios de velocidad de propagación sonora en el medio.

Para realizar una simulación de la propagación del sonido en medio marino se deben seguir los mismos pasos que en la simulación anterior, pero la ecuación de ondas debe incorporar el término disipativo que representa a la atenuación del medio (sección 2.5). En éste caso es necesario conocer el perfil de velocidad de sonido a través del medio en el cual se desea representar la propagación de la señal sonora. Dicho perfil debe ser ingresado a los algoritmos de diferencia finita.

Las complicaciones surgen a la hora de representar el fenómeno de refracción sonora que ocurre en aguas profundas. Esto se debe a que las diferencias entre las velocidades mínima y máxima dentro de un perfil de velocidad común para aguas profundas no son demasiado grandes (menores a 100 m/s). Como consecuencia, el fenómeno de refracción del sonido se hace notorio a extensos rangos desde la fuente emisora (20 a 40 *Km*). Esto acarrea un problema en la representación del fenómeno debido a que el costo computacional crece con el incremento del dominio espacial para una misma frecuencia. El aumento de dicho costo es producido porque la discretización del dominio espacial produce un mayor número de puntos de grilla y como resultado un incremento en el número de cálculos.

Por otro lado, como se dijo en la sección 6.5, se deben considerar por lo menos diez puntos de grilla por longitud de onda para evitar la dispersión por grilla. Como resultado a dicho hecho, el costo computacional aumenta considerablemente a la hora de representar la propagación de señales de alta frecuencia en dominios extensos.

Conclusiones y comentarios

En el trabajo expuesto se ha mostrado una forma de representar el fenómeno de propagación de ondas a partir del método de diferencias finitas (*MDF*). Este método permitió obtener una aproximación discreta de la ecuación de ondas en dos dimensiones, la cual fue utilizada para generar datos puntuales de la distribución de presión sonora en un dominio espacial a distintos instantes de tiempo.

Debido a que por medio del *MDF* es necesario discretizar los dominios asociados al fenómeno que se desea representar, la exactitud de los resultados extraídos a partir de algoritmos de diferencia finita es mayor mientras más discretizados sean estos dominios. Esto lleva a evaluar en forma detallada los valores de los parámetros de discretización, ya que tales valores se encuentran directamente relacionados con la estabilidad de la aproximación numérica y el costo computacional de la simulación.

La propagación del sonido a través de un medio con atenuación fue representada a partir de la ecuación de ondas más un término disipativo. Mediante este término fue posible incorporar al modelo matemático, valores de atenuación del medio por distancia (dB/m) para frecuencias específicas. Las simulaciones fueron realizadas a partir de la aproximación por diferencias finitas de dicho modelo. En los resultados obtenidos se mostraron datos del campo sonoro emitido por fuentes de 1 *KHz* y 10 *KHz*. Dichos resultados permitieron comprobar la validez del modelo a partir de la comparación del decaimiento de nivel de presión sonora entre dos puntos del dominio espacial y la atenuación por la distancia recorrida de la señal. Esta última extraída desde la multiplicación de la distancia entre los puntos con la atenuación α dada en dB/m.

En relación a la simulación del campo sonoro emitido por arreglos lineales, se obtuvieron resultados coherentes con la teoría. Se observó gráficamente que con el crecimiento del espacio entre elementos de un arreglo se produce una mejora en su directividad pero por otro lado un aumento de la presencia de lóbulos laterales. También se

logró visualizar que con el incremento del número de elementos del arreglo, los lóbulos principales se vuelven más estrechos y al igual que en el caso anterior, la directividad de dicho arreglo es mejorada. En la simulación del campo sonoro emitido por un arreglo lineal en función del incremento en el desfase entre elementos, se logró representar la transición desde un sistema de radiación transversal (broad-side array) a un sistema de radiación longitudinal (end-fire array).

La simulación de la propagación de ondas en un medio estratificado fue realizada a partir de la aproximación por diferencias finitas de la ecuación de ondas. En dicha ecuación se consideró una velocidad de propagación sonora en función de la profundidad. A partir de los algoritmos de diferencia finita, se logró reproducir en forma gráfica la propagación del sonido a través de dos medios con distinto valor de velocidad del sonido y a través de un medio estratificado. Los resultados muestran claramente el fenómeno de refracción producto del cambio de velocidad del sonido.

Las aproximaciones de diferencia finita utilizadas en la simulación de propagación del sonido en un medio estratificado pueden ser utilizadas para representar el fenómeno de propagación sonora en medio marino. Para llevar a cabo dicha representación, es necesario ingresar a los algoritmos de diferencia finita el perfil de velocidad del sonido correspondiente al medio a través del cual se desea simular la propagación de la señal. Además de esto es necesario agregar el término de atenuación del medio a dichos algoritmos.

Debido a que en una aproximación por diferencia central de segundo orden es necesario considerar por lo menos 10 puntos de grilla por longitud de onda (para evitar dispersión por grillas), a medida que aumenta la frecuencia dentro de un mismo dominio espacial, también crece el costo computacional. Esto ocurre porque el número de cálculos aumenta con el incremento de puntos en dicho dominio.

Por otro lado, conforme crece el dominio espacial para una misma frecuencia, el costo computacional también se ve afectado. Esto es un problema a la hora de representar

el fenómeno de refracción sonora producido en aguas profundas, ya que dicho fenómeno comienza a ser notorio a rangos que van de los 20 *Km* a 40 *Km* desde la fuente emisora. Como consecuencia a esto, se tiene una gran cantidad de puntos de grilla y por lo tanto un número elevado de cálculos. Tal inconveniente, sumado al incremento del costo computacional en función de la frecuencia, muestran que la simulación de propagación de señales de alta frecuencia en dominios espaciales extensos a partir del *MDF* es poco eficaz.

Ante tal hecho, existen maneras de mejorar la problemática del costo computacional. Como en este trabajo los algoritmos de diferencia finita fueron desarrollados a partir de un lenguaje interpretado (*MATLAB*), una manera de disminuir dicho costo es implementando estos mismos algoritmos a partir de un lenguaje compilado (*C*, *FORTRAN*, etc). La razón fundamental es que en los algoritmos desarrollados se pueden encontrar varios ciclos en su estructura. Esto aumenta el costo computacional debido a que en la ejecución de un código escrito en lenguaje intérprete, el programa convierte a lenguaje máquina cada proposición del código conforme vaya siendo utilizada. Por lo tanto, un ciclo tendrá que volver a ser interpretado cada vez que este sea ejecutado.

A diferencia de esto, un lenguaje compilado tiene la característica traducir un programa en su totalidad a lenguaje máquina mediante un compilador y como consecuencia el tiempo de ejecución dicho programa es mucho menor. Por otro lado, es esencial tratar de optimizar al máximo los códigos utilizados. Otra de las formas de disminuir dicho costo es con el empleo directo de hardware de alto nivel (supercomputadores), o implementando redes de trabajo en paralelo en donde esta última opción es considerada como la más económica.

Para finalizar, es necesario decir que el *MDF* es una de las aproximaciones más directas para realizar una representación del fenómeno de propagación de ondas en un medio sea este homogéneo o complejo. Mediante dicho método es posible obtener una descripción completa de la distribución del campo de presión sonora generado por una fuente o un arreglo de fuentes. Esto es de gran ayuda para el desarrollo de equipos acústicos de percepción remota debido a que por medio de una simulación es posible crear y evaluar

los diseños antes de llevar a cabo la construcción de un equipo. Para disciplinas como la acústica subacuática, donde el sonido es utilizado para explorar el océano en forma remota, es esencial poseer una representación realista de la propagación de ondas acústicas en medio marino. Esto hace posible que dicha disciplina utilice de forma óptima la propagación de ondas sonoras en el medio marino para cumplir con los propósitos que se desee obtener.

Anexo 1

Aproximación de Franhoufer y de Fresnel

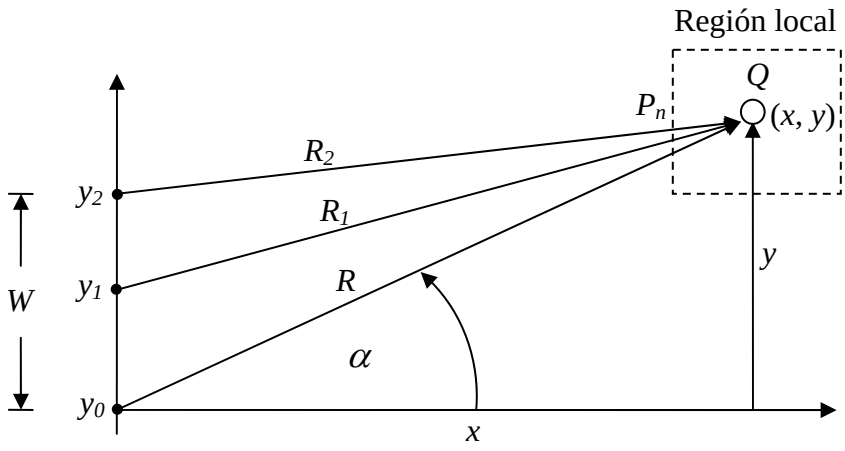
Para sumar las señales que provienen de varias fuentes puntuales, es necesario conocer las distancias de éstas fuentes hasta el punto de observación. La geometría de dicha situación puede ser observada en la figura A.1.

Las ondas de presión sonora incidentes en el punto *Q* son esféricas, y como consecuencia, las amplitudes de las presiones dependen de los rangos. Para el siguiente análisis son consideradas las amplitudes de presión sonora incidentes en la región local, tomando los valores de presión P_1, P_2, …, P_n. Estas amplitudes de presión incluyen en forma implícita la dependencia del rango recorrido de cada señal. La presión total *p* en la región local esta dada por la siguiente expresión.

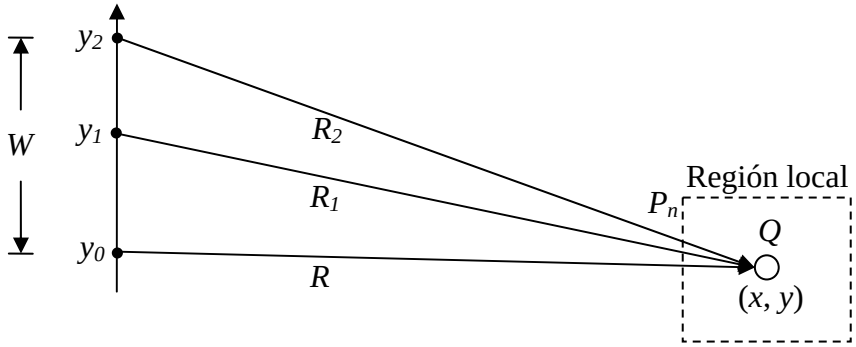
$$p = \sum_n P_n \sin(\omega t - kR_n) \tag{A.1}$$

donde P_n representa a las amplitudes de presión a los rangos R_n. Las fases relativas entre cada término son de gran importancia debido a que determinan el carácter de la interferencia entre las señales. Dicho de otra forma, las fases relativas expresan si la presión instantánea total es mayor o menor que las presiones individuales. Para separar la dependencia del tiempo de la sumatoria de la ecuación A.1, es realizada la expansión de la función *seno*.

$$p = \sin(\omega t)\sum_n P_n \cos(kR_n) - \cos(\omega t)\sum_n P_n \sin(kR_n) \tag{A.2}$$



a)



b)

Figura A.1. a) *Geometría para varias fuentes con receptor en Q. La región local con aproximación de onda plana se encuentra al interior del rectángulo de línea segmentada. Las presiones sonoras incidentes tienen amplitudes* P_n*. Las fuentes son* y_0, y_1, y_2 *y así en adelante. Las distancias desde las fuentes hasta el punto receptor Q son R,* R_1, R_2 *y así en adelante. La presión acústica en Q es la suma de la contribución de presiones por varias fuentes*. b) *Geometría similar a la anterior con* $\alpha = 0$.

Los términos $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ poseen una diferencia de fase igual a $\pi/2$, lo cual es conocido como *cuadratura de fase*.

Por otro lado, a partir de los esquemas de la figura A.1, es posible representar las expresiones de R y R_n de la siguiente forma.

$$R^2 = y^2 + x^2 \tag{A.3}$$

$$R_n^2 = (y - y_n)^2 + x^2 \tag{A.4}$$

$$R_n^2 = (R\sin\alpha - y_n)^2 + R^2\cos^2(\alpha) \tag{A.5}$$

Esto escrito de otra forma

$$R_n = R\left[1 - \frac{2y_n}{R}\sin(\alpha) + \frac{y_n^2}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{A.6}$$

Para rangos donde $(W/R) << 1$, es posible representar la ecuación A.6 a partir de una aproximación realizada por expansión binomial.

$$R_n \approx R\left[1 - \frac{y_n}{R}\sin(\alpha) + \frac{y_n^2}{2R^2}(1 - \sin^2(\alpha)) + ...\right] \tag{A.7}$$

Dependiendo de cuan pequeño sea el valor de W/R, pueden ser despreciados más términos en la ecuación A.7. Cuando sólo el término de primer orden es considerado, la expresión es conocida como *aproximación de Fraunhofer* (aproximación para grandes rangos).

$$R_n \approx R\left[1 - \frac{y_n}{R}\sin(\alpha)\right] \tag{A.8}$$

Por otra parte, cuando la expresión considera los términos de primer y segundo orden, la expresión es denominada como *aproximación de Fresnel.*

$$R_n \approx R\left[1-\frac{y_n}{R}\sin(\alpha)+\frac{y_n^2}{2R^2}\left(1-\sin^2(\alpha)\right)\right] \qquad \text{(A.9)}$$

Anexo 2

Coeficientes de atenuación sonora

Tabla A.1. Valores de atenuación sonora α en medio submarino

α (*dB* / *Km*)										
T(ºC)	0.5 *KHz*	1 *KHz*	2 *KHz*	5 *KHz*	10 *KHz*	20 *KHz*	50 *KHz*	100 *KHz*	200 *KHz*	500 *KHz*
5	0.02	0.06	0.14	0.33	1	3.8	15	30	55	120
10	0.02	0.06	0.14	0.29	0.82	3.3	16	35	60	125
15	0.02	0.06	0.14	0.26	0.68	2.8	17	40	65	130

Datos extraídos de A. D. Waite [17].

Referencias

[1] Athanassoulis G.A., Belibassakis K.A., Dougalis V.A., Kampanis N.A., Mitsoudis D.A., "Simulation of underwater sound propagation in a general stratified environment by a coupled mode and a finite element method," *Forum acousticum Sevilla 2002*, 16-20, (2002).

[2] Francois R. E. & Garrison G. R., "Sound absorption based on ocean measurements. Part I: Pure water and magnesium sulfate contributions," *J. Acoust. Soc. Am.* 72, 896-907, (1982).

[3] Francois R. E. & Garrison G. R., "Sound absorption based on ocean measurements. Part II: Boric acid contribution and equation for total absorption," *J. Acoust. Soc. Am.* 72, 1879-1890, (1982).

[4] Hoffman J. D., "Numerical methods for engineers and scientists," 2nd Edition, *Marcel Dekker Inc.*, 823 p., (2001).

[5] Holberg O., "Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena," *Geophys. Prospecting* 35, 629-655, (1987).

[6] Holm K., "Methods for the treatment of acoustic and absorptive/dispersive wave field measurements," *The University of British Columbia*, (1996). http://www.geop.ubc.ca/~kinnanen/thesis_innanen.pdf.

[7] Lax, P. D., "Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computation," *Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 2, pp., 159-193, (1954).

[8] Lynch D. R., "Numerical partial differential equations for environmental scientists and engineers: a first practical course," *Springer Science and Business Media, Inc.*, 388 p., (2005).

[9] Mackenzie, K. V., "Nine-term equation for sound speed in the oceans," *J. Acoust. Soc. Am.* 70, 807-12 (1981).

[10] Marfurt K., "Accuracy of finite-difference and finite-element modelling of the scalar and elastic wave equations," *Geophysics* 49, 533, (1984).

[11] Medwin H., " Speed of sound in water: a simple equation for realistic parameters," *J. Acoust. Soc. Am.* 58, 1318-19 (1975).

[12] Medwin H. & Clay Clarence S., "Fundamentals of acoustical oceanography," *Boston, Academic Press*, (1998).

[13] Mitchell. A. R.," Computational methods in partial differential equations," *New York. John Wiley and Sons*, (1969).

[14] Reynolds, A. C., "Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems," *Geophysics*, v.43, p. 1099-1110, (1978).

[15] Steward G. A. & James S. D., "Computer simulation of underwater sound propagation as a teaching aid," *European Journal of Physics*, 13, 264-267, (1992).

[16] Villareal A. & Scales J. A., "Distributed three-dimensional finite-difference modeling of wave propagation in acoustic media," *Computers in Physics*, 11, 388-399, (1997).

[17] Waite, A. D., "Sonar for practising Engineers," *Third edition, John Wiley and Sons Ltd*, (2002).