



# Universidad Austral de Chile

Facultad de Ciencias de la Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Mecánica

## “ANÁLISIS DE FALLA DE FATIGA POR FLEXIÓN EN LA RAIZ DE UN DIENTE DE ENGRANAJE RECTO CON PRO/ENGINEER”

Trabajo para optar al Título de:  
Ingeniero Mecánico

Profesor Patrocinante:  
Sr. Rolando Ríos Rodríguez  
M.Sc. Ingeniería Mecánica.

JUAN ESTEBAN PINOCHET ESPINOSA  
VALDIVIA-CHILE  
2007

**El presente Trabajo de Titulación ha sido sometido a la revisión y aprobación de la Comisión de Titulación. La tesis aprobada, junto con la nota del Examen de Titulación, le permite al alumno obtener el título de Ingeniero Mecánico.**

Nota ponderada del Trabajo de Titulación : \_\_\_\_\_

Nota promedio del Examen de Titulación : \_\_\_\_\_

**Comisión de Titulación:**

La comisión de titulación ha sido integrada por los académicos:

**Profesor patrocinante: Sr. Rolando Ríos R. \_\_\_\_\_**

**Profesores Informantes: Sr. Héctor Noriega F. \_\_\_\_\_**

**Sr. Milton Lemarie O. \_\_\_\_\_**

**V<sup>o</sup> B<sup>o</sup> Director de Escuela: Sr. Milton Lemarie O. \_\_\_\_\_**

**Fecha de Examen de Titulación:**

## INDICE DE CONTENIDOS

<b>CONTENIDO</b>	<b>Página</b>
<b>Resumen</b>	1
<b>Summary</b>	2
<b>Introducción</b>	3
<b>Objetivo General</b>	5
<b>Objetivos Específicos</b>	5
<b>Metodología</b>	5
<b>Capítulo I: Marco Teórico</b>	<b>7</b>
1.1. Engranajes	7
<i>1.1.1. Especificaciones para un Engranaje de Profundidad Total</i>	8
<i>1.1.2. Ley del Engranaje. Acción Conjugada</i>	11
<i>1.1.3. Relación de Contacto</i>	13
<i>1.1.4. Falla en Dientes de Engranajes</i>	14
1.2. Métodos de Solución en Ingeniería	15
<i>1.2.1. Solución Analítica</i>	15
<i>1.2.2. Solución Aproximada</i>	16
<i>1.2.3. Método de las Diferencias Finitas</i>	16
<i>1.2.4. Métodos de Funciones de Prueba</i>	16
<i>1.2.5. Método de los Elementos Finitos</i>	17
<b>Capítulo II: Método de Elementos Finitos</b>	<b>18</b>
2.1. Grados de Libertad y Desplazamiento Nodal	18
2.2. Conectividad de los Elementos	18
2.3. Energía Potencial del Modelo Continuo	20
2.4. Ecuaciones de Equilibrio	22
2.5. Condiciones de Frontera	22

### III

2.6.	Notación Matricial	24
	2.6.1. <i>Funciones de Forma</i>	24
	2.6.2. <i>Deformación Unitaria – Desplazamiento</i>	25
	2.6.3. <i>Relación Esfuerzo – Deformación</i>	25
2.7.	Energía Potencial en Modelo Discretizado	26
2.8.	Principio de Trabajo Virtual	28
2.9.	Teoría de la Energía Potencial Mínima	30
	<b>Capítulo III: Generalidades sobre Fatiga de Material</b>	<b>31</b>
3.1.	Introducción al Fenómeno de Fatiga	31
3.2.	Mecanismos de Falla por Fatiga	33
	3.2.1. <i>Periodo de Iniciación de la Grieta</i>	33
	3.2.2. <i>Período de Propagación de la Grieta</i>	35
	3.2.3. <i>Rotura</i>	36
3.3.	Condición de Carga	37
	3.3.1. <i>Totalmente Reversible de Amplitud Constante</i>	37
	3.3.2. <i>Amplitud Constante con Esfuerzo Promedio</i>	38
	3.3.3. <i>Amplitud Variable</i>	40
3.4.	Modelos de Falla por Fatiga	40
	3.4.1. <i>Procedimiento Esfuerzo – Vida (<math>S - N</math>)</i>	40
	3.4.1.1. <i>Límite de Resistencia a la Fatiga del Material</i>	41
	3.4.1.2. <i>Diagrama (<math>S - N</math>)</i>	42
	3.4.1.3. <i>Diagrama (<math>S - N</math>) para Esfuerzos Promedios</i>	43
	3.4.2. <i>Procedimiento Deformación – Vida (<math>\varepsilon - N</math>)</i>	44
	3.4.2.1. <i>Concentración Geométrica de Tensiones</i>	45
	3.4.2.2. <i>Comportamiento Esfuerzo – Deformación</i>	46
	3.4.2.3. <i>Relación Deformación – Vida</i>	47

## IV

3.4.2.4. <i>Efectos de Esfuerzos Promedios</i>	48
3.4.3. <i>Procedimiento de la Mecánica de Fracturas Elásticas Lineales</i>	49
3.5. <i>Ley de los Materiales Uniformes</i>	49
<b>Capítulo IV: Pro/Mecánica Fatigue Advisor</b>	<b>51</b>
<b>Capitulo V: Fallas por Fatiga en Engranajes</b>	<b>53</b>
5.1. Falla de Fatiga por Contacto	53
5.1.1. <i>Falla por Formación de Grietas en la Superficie del Diente</i>	53
5.1.2. <i>Falla por Soldado Momentáneo de las Superficies de Trabajo</i>	54
5.1.3. <i>Falla de Remoción de Partículas de la Superficie por Abrasión</i>	54
5.2. Falla de Fractura por Flexión	54
5.2.1. <i>Procedimiento Analítico de Diseño por Esfuerzos a Flexión</i>	56
<b>Capitulo VI: Análisis de falla por flexión en un diente de engranaje</b>	<b>59</b>
6.1. Análisis Estático	59
6.1.1. <i>Calculo de la Ecuación de AGMA de Esfuerzos a Flexión</i>	60
6.1.2. <i>Análisis Estático en Elementos Finitos con Pro/Structure</i>	61
6.2. Análisis de Fatiga	64
6.2.1. <i>Simulación de la Superficie</i>	64
6.2.2. <i>Modelamiento en Fatigue Advisor</i>	65
6.2.3. <i>Determinación de la Curva <math>(\varepsilon - N)</math> de Iniciación de Grieta</i>	67

<b>Capitulo VII: Ensayo de Fatiga en Probetas CT</b>	<b>71</b>
7.1. Ensayo Estático de Tracción	72
7.1.1. <i>Ensayo Empírico</i>	72
7.1.2. <i>Simulación en Pro/Structure</i>	73
7.1.2.1. <i>Convergencia</i>	73
7.1.2.2. <i>Gráfico de Colores</i>	74
7.1.3. <i>Cálculo Analítico</i>	76
7.1.4. <i>Resumen de Resultados</i>	77
7.2. Ensayo de Fatiga	78
7.2.1. <i>Ensayo Empírico</i>	78
7.2.2. <i>Simulación en Fatigue Advisor</i>	78
7.2.3. <i>Resumen de Resultados</i>	79
<b>Conclusiones</b>	<b>80</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>84</b>
<b>Anexos 1</b>	<b>85</b>
<b>Anexos 2</b>	<b>90</b>

## GLOSARIO DE TERMINOS POR CAPITULO

**Capítulo 2**

$b$  : Exponente de resistencia a la fatiga

$B$  : Ancho de cara

$c$  : Holgura

$d$  : Diámetro primitivo

$d_b$  : Diámetro base

$d_f$  : Diámetro de fondo

$d_g$  : Diámetro del engrane

$d_k$  : Diámetro de cabeza

$d_p$  : Diámetro de pie o de fondo

$e$  : Espesor circular del diente

$h_a$  : Addendum o altura de cabeza

$h_b$  : Dedendum o altura de fondo

$h_t$  : Altura total

$m$  : Módulo

$M_G$  : Relación de engranajes

$M_v$  : Relación de velocidades

$P_c$  : Paso circular

$r_f$  : Radio de entalle o de filete

$W$  : Carga

$Z$  : Numero de dientes del engranaje

$Z_g$  : Numero de dientes del engrane

$Z_p$  : Numero de dientes del piñón

$\alpha$  : Ángulo de presión

$\omega_g$  : Velocidad angular del engrane

$\omega_p$  : Velocidad angular del piñón

**Capítulo 3**

**B** : Matriz de deformación unitaria – desplazamiento

*c* : Exponente de ductibilidad a la fatiga

**D** : Matriz simétrica del material

*E* : Módulo de elasticidad

**f** : Vector de carga distribuida por unidad de volumen

**F** : Vector de carga global

**k** : Matriz de rigidez

**K** : Matriz de rigidez estructural

**n** : Normal unitaria a la superficie

**N** : Vector de funciones de interpolación

**P<sub>i</sub>** : Vector de carga puntual en un punto *i*

**q** : Vector de desplazamientos nodales

**Q** : Vector de desplazamientos globales

**T** : Vector de carga distribuida por unidad de área

**u** : Vector de desplazamientos

*U* : Energía de deformación unitaria

*W<sub>ext</sub>* : Trabajo externo

*W<sub>int</sub>* : Trabajo interno

*W<sub>p</sub>* : Potencial de trabajo

**x** : Punto en un cuerpo

**ε** : Vector de deformaciones

*Π* : Energía potencial

**σ** : Vector de esfuerzos

*ν* : Relación de Poisson

**Capítulo 4**

*C<sub>carga</sub>* : Factor de corrección para tipo de carga

*C<sub>superficie</sub>* : Factor de corrección para acabado y tratamiento superficial

*C<sub>tamaño</sub>* : Factor de corrección para tamaño del componente

*C<sub>temperatura</sub>* : Factor de corrección para temperatura de operación

## VIII

$\Delta e$  : Rango de deformaciones nominales

$F_R$  : Factor de reducción de resistencia a la fatiga para un 50% de confiabilidad

$F'_R$  : Factor de reducción de resistencia a la fatiga para engranajes

$J$  : Factor geométrico de resistencia a flexión

$K_a$  : Factor de aplicación de carga

$K_B$  : Factor de espesor del aro

$K_f$  : Factor de concentración de tensiones cíclicas

$K_I$  : Factor de engrane intermedio o loco

$K_m$  : Factor de distribución de carga

$K_s$  : Factor de tamaño

$K_t$  : Factor de concentración de tensiones estáticas

$K_v$  : Factor dinámico

$K'$  : Coeficiente de resistencia cíclica

$n'$  : Exponente de endurecimiento por deformaciones cíclicas

$N$  : Vida completa de servicio

$N_i$  : Ciclos de iniciación de la grieta

$N_p$  : Ciclos de propagación de la grieta

$S_a$  : Límite de resistencia a la fatiga para cualquier  $N$

$S_e$  : Límite de resistencia a la fatiga corregido

$S'e$  : Límite de resistencia a la fatiga para  $10^6$

$S_m$  : Límite de resistencia a la fatiga para  $10^3$

$S_U$  : Resistencia última a la tracción del material

$S_Y$  : Límite de fluencia del material

$\Delta S$  : Rango de tensiones nominales

$W_r$  : Componente radial de la carga

$W_t$  : Componente tangencial de la carga

$\varepsilon$  : Deformación local

$\varepsilon_e$  : Deformación elástica local

$\varepsilon'_f$  : Coeficiente de ductibilidad a la fatiga

$\varepsilon_p$  : Deformación plástica local

$\Delta\varepsilon$  : Rango de deformaciones locales

$\sigma$  : Esfuerzo local

$\sigma_a$  : Esfuerzo alternante

$\sigma'_f$  : Coeficiente de resistencia a la fatiga

$\sigma_m$  : Esfuerzo promedio

$\sigma_{MAX}$  : Esfuerzo máximo

$\sigma_{MIN}$  : Esfuerzo mínimo

$\Delta\sigma$  : Rango de tensiones locales

### **Capítulo 8**

$A$  : Sección transversal

$b$  : Brazo del momento al eje neutro de la sección transversal

$c$  : Distancia al eje neutro

$e$  : Ancho de la sección transversal

$F$  : Fuerza de tracción

$h$  : Largo de la sección transversal

$M$  : Momento generado en el eje neutro de la sección transversal

$S$  : Esfuerzo combinado

## INDICE DE FIGURAS

<b>FIGURA</b>	<b>Página</b>
1.1. Par de engranajes cilíndricos rectos	7
1.2. Nomenclatura de los dientes de engranajes	8
1.3. Línea de acción, punto de paso y ángulo de presión	12
1.4. Dientes de baja calidad	13
2.1. Grados de libertad	18
2.2. Números locales	19
2.3. Números globales	19
2.4. Cuerpo tridimensional	23
2.5. Interpolación usando funciones de forma	24
3.1. Período de iniciación y propagación de la grieta de fatiga	32
3.2. Nucleación de la microgrieta	34
3.3. Iniciación de la grieta	35
3.4. Propagación de la grieta	36
3.5. Generación de estrías	36
3.6. Condición de carga totalmente reversible	38
3.7. Curva de iniciación de grietas con esfuerzo promedio	39
3.8. Condición de carga con esfuerzos promedios	39
3.9. Condición de carga de amplitud variable	40
3.10. Curva S-N para esfuerzos totalmente reversibles	43
3.11. Curvas S-N corregidas con el criterio de Goodman	44
3.12. Esfuerzos y deformaciones nominales y locales	45
3.13. Curva de deformación – vida	48
5.1. Superficie desintegrada	53
5.2. Condición de máximos esfuerzos en la raíz del diente	55
5.3. Trayectoria de la grieta de fatiga	56
6.1. Modelo simplificado del piñón	61
6.2. Convergencia del análisis estático en el diente	62
6.3. Determinación FEM de esfuerzos Von – Misses	63
6.4. Resumen de esfuerzos estáticos	64
6.5. Elementos shell en la superficie	65
6.6. Definición del tipo de material	65

6.7. Definición del acabado superficial	66
6.8. Definición del factor de reducción de resistencia a la fatiga	67
6.9. Deformaciones lineales y cíclicas	68
6.10. Ciclos de iniciación de grieta para una intensidad de carga	69
6.11. Curva $(\xi - N)$ de iniciación de grieta	70
6.12. Curva de iniciación de grieta en función de la carga	70
7.1. Probeta CT	71
7.2. Probeta CT simulada en Pro/E	71
7.3. Máquina de fatiga	72
7.4. Ensayos de tracción	72
7.5. Gráfico carga – deformación	72
7.6. Convergencia del análisis estático en probeta CT	73
7.7. Gráfico de colores	74
7.8. Probeta CT ensayada	74
7.9. Zonas principales de concentración de esfuerzos	75
7.10. Concentración de esfuerzos en la entalladura	76
7.11. Calculo analítico de esfuerzos en la probeta	77
7.12. Configuración de la carga	78
7.13. Gráficos de vida a fatiga	79

**INDICE DE TABLAS**

<b>Tabla</b>		<b>Página</b>
2.1.	Conectividad de los elementos	20
3.1.	Ley de los materiales uniformes	49
6.1.	Especificaciones del par de engranajes utilizado	59
6.2.	Resumen de esfuerzos estáticos	63
7.1.	Resumen de resultados estáticos	77
7.2.	Ciclos de vida en probetas ensayadas	78
7.3.	Resumen de resultados de fatiga	79

## RESUMEN

Este estudio presenta una simulación computacional de una falla de fatiga por flexión en la raíz de un diente de engranaje recto de material y propiedades superficiales definidas. La simulación se realiza con un modelo tridimensional en el módulo Pro/Mechanica del software Pro/Engineer Wildfire.

Este trabajo tiene como principal objetivo obtener de la simulación del diente, la curva de iniciación de la grieta de fatiga para distintas condiciones de carga.

Se realiza un previo análisis estático en Pro/Mechanica Structure, cuyos resultados se comparan con los métodos tradicionales de diseño de engranajes.

Basándose en este previo análisis estático, se realizan los análisis de fatiga en Pro/Mecánica Fatigue Advisor. El software utiliza el método de deformación – vida ( $\epsilon$ -N) en el marco del método de elementos finitos para determinar el número de ciclos de carga requeridos para la iniciación de la grieta de fatiga. El análisis de fatiga se realiza sobre la superficie del empalme de la raíz del diente.

Para validar los resultados obtenidos del software Pro/Engineer se realizan ensayos empíricos con probetas compactas de tracción y se comparan los resultados.

## **SUMMARY**

This study presents computer simulation results for bending fatigue failure in the base of a gear tooth with pre-specified surface properties. The results are derived using a 3D model of the gear tooth and with aid of Pro/Mechanica module of Pro/Engineer Wildfire.

The main objective of this work is to obtain the main simulation results, together with crack initiation curves for different load conditions.

In the first stage, a static analysis is done with aid of Pro/Mechanica Structure, and the results are compared with standard gear design methodologies.

The results of this first stage are the base for the fatigue analysis performed in Pro/Mechanica Fatigue Advisor. In order to determine the number of duty cycles required for the failure initiation, the software uses the deformation - life method within a finite - element approach.

The results are validated by comparison with experimental measurements taken from compact tension (CT) specimens.

## Introducción

Los engranajes son elementos mecánicos de mucha importancia ya que constituyen uno de los principales medios para transmitir movimiento rotativo de un eje a otro y por ende se encuentran presentes en prácticamente todas las máquinas rotativas.

Los materiales sometidos a tensiones repetitivas o fluctuantes fallan a una tensión mucho más baja que la necesaria para producir la misma falla bajo una carga estática. Esta falla es conocida como falla por fatiga.

El proceso completo de fatiga en elementos mecánicos se divide generalmente en tres etapas: el período de iniciación de la grieta, el período de propagación de la grieta y la fractura final del elemento. Los procedimientos clásicos de diseño de engranajes habitualmente solo consideran la etapa final (fractura) del proceso de fatiga. Estos procedimientos basan sus cálculos en el límite de resistencia a la fatiga que, junto a un factor de seguridad, debería asegurar una vida infinita del engranaje. Sin embargo, ante la presencia de sobrecargas periódicas, este límite puede desaparecer y generarse la falla del engranaje de manera inesperada.

Comúnmente ocurren dos tipos de daños en dientes de engranajes bajo cargas repetitivas: el daño o destrucción de la superficie de trabajo del diente producto de esfuerzos de contacto y la fractura completa del diente que se quiebra en la raíz, a todo lo ancho de su sección, producto de los esfuerzos a flexión.

Este análisis estima a través de una simulación computacional en el software Pro/Engineer, los ciclos de vida o de carga que generarán la iniciación de la grieta en la raíz de un diente de engranaje producto de esfuerzos cíclicos

a flexión. Esta información es de gran importancia, dado que permite planificar la oportuna inspección del engranaje.

El software trabaja en base al método de elementos finitos y en él se realizan tanto análisis estáticos como análisis de fatiga.

Para validar esos resultados se realizan ensayos empíricos con probetas compactas de tracción y se comparan resultados.

## **Objetivo General**

Determinar la curva de iniciación de grieta por fatiga en la raíz de un diente de engranaje recto de material y propiedades superficiales definidas.

## **Objetivos Específicos**

- a. Modelar el diente de un engranaje en el módulo Standard del software Pro/Engineer.
- b. Simular condiciones de operación del diente en Pro/Mechanica Structure, basándose en criterios tradicionales de diseño de engranajes.
- c. Determinar los ciclos de vida del diente, para distintas intensidades de carga, mediante un análisis de fatiga en Pro/Mechanica Fatigue Advisor.
- d. Comparar los resultados de un análisis de fatiga en Pro/Engineer con ensayos empíricos en laboratorio.

## **Metodología**

- a. Selección de un engranaje recto de material y propiedades superficiales definidas para ser modelado.
- b. Cálculo de la geometría del engranaje seleccionado.
- c. Modelamiento de un diente del engranaje seleccionado en Pro/Engineer Standard.

- d. Simulación de las condiciones de operación del diente en Pro/Mechanica Structure basándose en criterios tradicionales de diseño de engranajes.
- e. Determinación del rango de operación a analizar.
- f. Determinación de los esfuerzos máximos en la raíz del diente mediante un análisis estático en Pro/Mechanica Structure.
- g. Cálculo analítico de las deformaciones cíclicas en base a los resultados del análisis estático lineal.
- h. Determinación de los ciclos de iniciación de grieta en la raíz del diente mediante un análisis de fatiga en Pro/Mechanica Fatigue Advisor.
- i. Confección de la curva de iniciación de grieta por fatiga en la raíz del diente para las distintas intensidades de carga del rango de operación.
- j. Elaboración de ensayos de fatiga en probetas compactas de tracción.
- k. Modelamiento, simulación y análisis de la probeta en Pro/Engineer
- l. Comparación de los resultados obtenidos de los ensayos empíricos y los del análisis de fatiga en Pro/Engineer.

## Capítulo I: Marco Teórico

### 1.1. Engranajes

Los engranajes son elementos mecánicos de gran importancia ya que constituyen uno de los mejores medios para transmitir movimiento rotatorio de un eje a otro y por ende se encuentran presentes en prácticamente todas las máquinas rotativas.

Un engranaje se define como un órgano dentado destinado a mover otro, o a ser movido por él, por la acción de los dientes al venir en contacto sucesivo [1]. El mecanismo elemental constituido por dos engranajes se denomina “par de engranajes”. De este par de engranajes se puede diferenciar el piñón (aquel con menor número de dientes), de la corona (aquel con mayor número de dientes).

Los engranajes cilíndricos rectos son el tipo más simple de engranajes [2]. Estos transmiten movimiento entre ejes paralelos, son generalmente cilíndricos y sus dientes son rectos y paralelos al eje de rotación (Figura 1.1.).



Figura 1.1. Par de engranajes cilíndricos rectos.

### 1.1.1. Especificaciones para un Engranaje de Profundidad Total

Las siguientes especificaciones se encuentran representadas en la Figura 1.2:

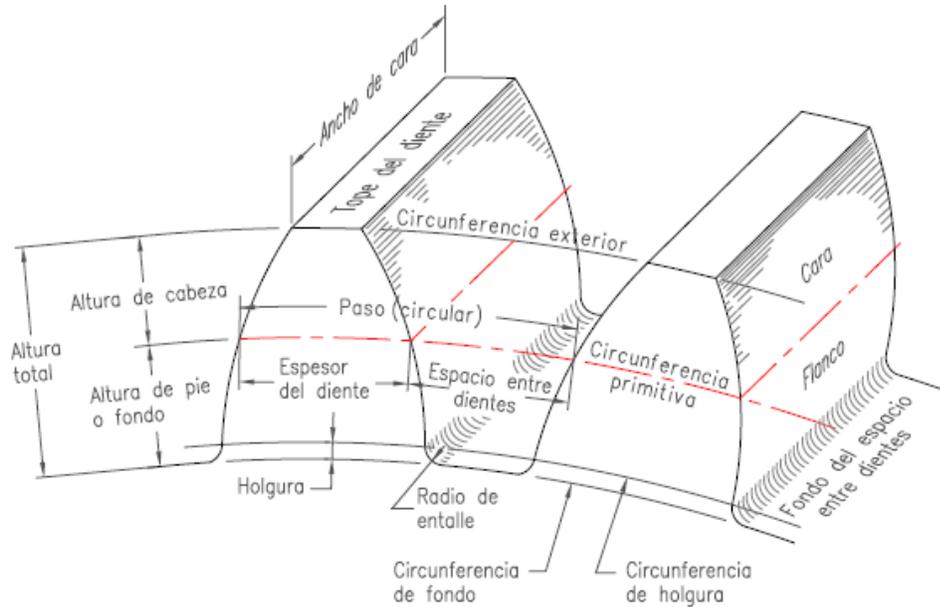


Figura 1.2. Nomenclatura de los dientes de engranajes [3].

**Circunferencia primitiva de un engranaje:** Es un círculo teórico sobre el que generalmente se basan todos los cálculos. Las circunferencias primitivas de un par de engranajes conjugados son tangentes entre sí. El diámetro de la circunferencia primitiva se denomina diámetro primitivo  $d$ .

**Paso circular  $P_c$ :** Es la distancia medida sobre la circunferencia primitiva, que va desde un punto sobre uno de los dientes, hasta un punto correspondiente sobre un diente adyacente. Se calcula mediante la razón entre el perímetro del círculo primitivo y el número de dientes  $Z$ .

$$P_c = \frac{\pi d}{Z} = \pi m \text{ (mm)} \quad (1)$$

*Módulo  $m$*  : Es la razón entre el diámetro primitivo y el número de dientes. El módulo es el índice de tamaño del diente en el Sistema Internacional de Unidades (SI).

$$m = \frac{d}{Z} \quad (\text{mm}) \quad (2)$$

*Addendum o altura de cabeza  $h_a$*  : Es la distancia radial entre la circunferencia exterior y la circunferencia primitiva del engranaje.

$$h_a = m \quad (3)$$

*Deddendum o altura de fondo  $h_b$*  : Es la distancia radial entre la circunferencia de fondo y la circunferencia primitiva del engranaje.

$$h_b = 1,25 m \quad (4)$$

*Altura total  $h$*  : Es la suma del addendum y el dedendum.

$$h = h_a + h_b \quad (5)$$

*Diámetro de cabeza  $d_k$*  : Corresponde al diámetro de la circunferencia exterior.

$$d_k = d + 2 m \quad (6)$$

*Diámetro de fondo  $d_f$*  : Corresponde al diámetro de la circunferencia de fondo.

$$d_f = d - 2,5m \quad (7)$$

*Holgura  $c$*  : Es la distancia radial entre la circunferencia de holgura y la circunferencia de fondo. La circunferencia de holgura es tangente a la circunferencia exterior del engranaje conjugado.

$$c = 0,25m \quad (8)$$

*Ancho de cara  $B$*  : Corresponde a la longitud de la cara del diente.

$$5m \leq B \leq 12m \quad (9)$$

*Círculo base  $d_b$*  : Es un círculo teórico a partir del cual se originan las cuerdas que generan el perfil de envolvente del diente.

$$d_b = d \cos(\alpha) \quad (10)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de presión.

*Radio de filete  $r_f$*  : Corresponde al radio de la raíz del diente.

$$r_f = 0,3 \cdot m \quad (11)$$

*Espesor circular del diente  $e$* : Corresponde al espesor del diente medido sobre el diámetro primitivo.

$$e = 1,571 \cdot m \quad (12)$$

*Relación de engranajes  $M_G$* : Cuociente entre el número de dientes de la corona  $Z_g$  y los del piñón  $Z_p$ .

$$M_G = \frac{Z_p}{Z_g} \quad (13)$$

*Relación de velocidades  $M_v$* : Corresponde a la relación entre las velocidades angulares de la corona  $\omega_g$  y del piñón  $\omega_p$ .

$$M_v = \frac{\omega_g}{\omega_p} \quad (14)$$

### 1.1.2. Ley del Engranaje. Acción Conjugada.

Los perfiles de dientes de engranajes se diseñan para que la relación de velocidades angulares, en un par de engranajes conjugados, sea constante. Si esto no se cumpliera, se generarían vibraciones muy serias incluso a bajas velocidades. Normalmente se utilizan perfiles de evolvente para satisfacer esta condición [3].

Al utilizar perfiles de evolvente se cumple lo siguiente (Figura 1.3):

1. La posición del *punto de paso*, punto tangente a los círculos primitivos de un par de engranajes acoplados, permanecerá constante para una relación constante de velocidades.
2. El *punto de contacto* que se genera entre dos perfiles conjugados se desplazará, conforme gire el engranaje, siguiendo la trayectoria de una línea normal a la tangente común a esos perfiles. Esta línea, que además es tangente a ambos círculos bases y pasa por el punto de paso se denomina *línea de acción*.
3. Las fuerzas que se generan en el punto de contacto, en cualquier instante, tendrán la misma dirección que la línea de acción, formando un ángulo con la línea tangente a las circunferencias primitivas denominado *ángulo de presión* ( $\alpha$ ).

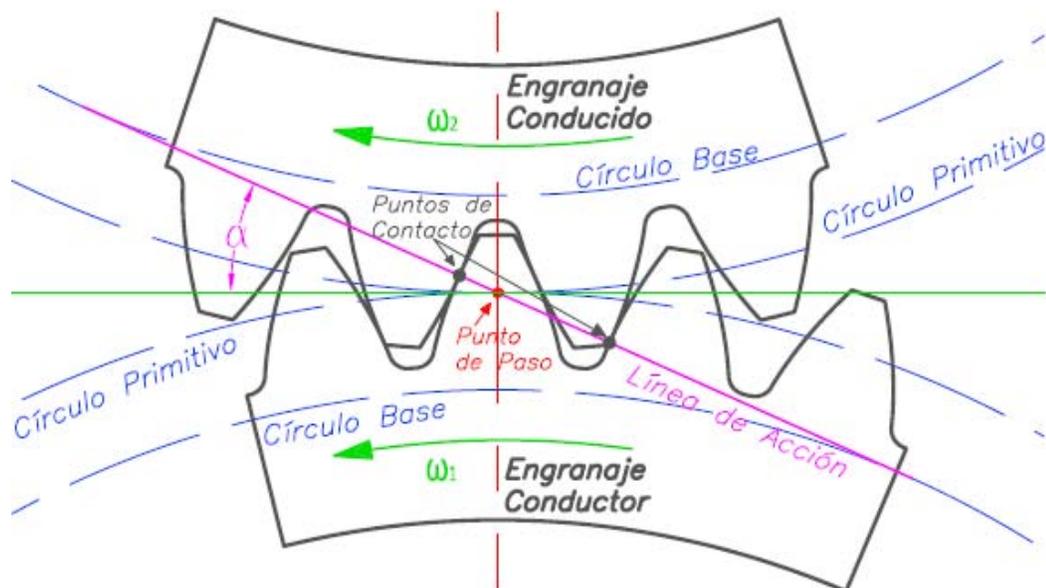


Figura 1.3. Línea de acción, punto de paso y ángulo de presión.

### 1.1.3. Relación de Contacto

La relación de contacto corresponde al número promedio de dientes en contacto en un par de engranajes conjugados. Los engranajes generalmente se diseñan con relaciones de contacto de 1,2 a 1,6. Una relación de contacto de 1,2 por ejemplo, significa que un 80% del ciclo de engrane, solo habrá un par de dientes en contacto y en el otro 20% restante habrán dos pares en contacto. Los engranajes de alta relación de contacto son aquellos con una relación de contacto mayor a 2. Un par de estos engranajes nunca tienen menos de dos pares de dientes en contacto en un ciclo de engrane. Una relación de contacto de 2,2 significa que un 80% del ciclo de engrane habrán dos pares de dientes en contacto y en el otro 20% restante habrán tres pares en contacto [4].

Dependiendo de la razón de contacto, los dientes pueden tomar todo o parte de la carga  $W$ . Obviamente la peor condición de carga es cuando la totalidad de  $W$  actúa en la punta del diente. Para una razón de contacto  $>1$  y engranajes con precisiones lo suficientemente buenas, nunca se presentará esta condición ya que siempre habrá mas de un par de dientes en contacto cuando la carga se aplique en la punta. Si los dientes son de baja calidad, entonces habrá carga en la punta con valor completo de  $W$ , independientemente de la razón de contacto (Figura 1.4) [2].

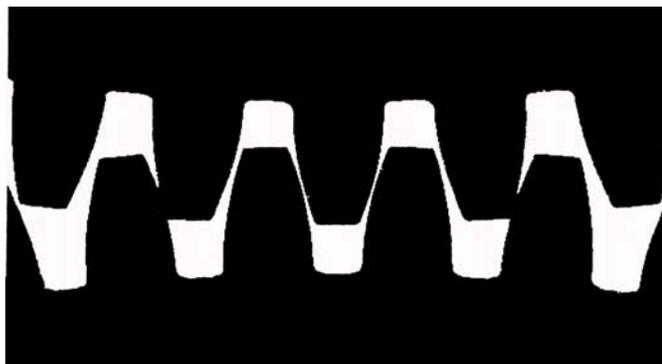


Figura 1.4. Dientes de baja calidad.

#### 1.1.4. *Falla en Dientes de Engranajes*

Comúnmente ocurren dos tipos de daños en dientes de engranajes bajo cargas repetitivas:

1. Daño o destrucción de la superficie de trabajo del diente producto de esfuerzos de contacto.
2. Fractura completa del diente que se quiebra en la raíz, a todo lo ancho de su sección, producto de esfuerzos a flexión.

Cualquiera de estos tipos de fallas puede ser el resultado de una o de una combinación de cualquiera de los siguientes factores [5]:

- Sobrecarga del diente
- Esfuerzos iniciales
- Diseño deficiente del diente
- Uso de materiales incorrectos
- Materiales defectuosos
- Tratamiento térmico incorrecto para el material seleccionado
- Superficie dañada en rectificado o maquinado final
- Lubricación incorrecta, tanto falta de lubricación como lubricación excesiva
- Temperatura excesiva de operación
- Desalineamiento de los soportes
- Inadecuada protección a las condiciones físicas y atmosféricas

## 1.2. Métodos de Solución en Ingeniería

Un problema de contorno es aquel que está gobernado por una o más ecuaciones diferenciales o integrales dentro de un dominio, y por condiciones de contorno en la frontera de dicho dominio. La solución puede obtenerse buscando la condición extrema u óptima de un funcional, o de un conjunto de funcionales, sobre el dominio completo.

Como ejemplo, los problemas de análisis estructural están gobernados por las siguientes ecuaciones:

- Relaciones deformaciones-desplazamientos.
- Relaciones tensiones-deformaciones.
- Ecuaciones de equilibrio.

La solución puede obtenerse minimizando el funcional de la energía potencial generado con estas relaciones.

En general, para resolver un problema de contorno, se debe utilizar uno de los siguientes métodos:

### 1.2.1. Solución Analítica

- El primer intento de resolver un problema es encontrar su solución exacta mediante integración directa.

### 1.2.2. Solución Aproximada

Si el problema es difícil de resolver exactamente, o no puede encontrarse la solución exacta, puede buscarse una solución aproximada aceptable. Existen

muchos métodos aproximados útiles. Los más generales se pueden resumir en los siguientes:

#### *1.2.2.1. Método de las Diferencias Finitas*

El dominio de definición del problema se discretiza en una serie de puntos (nodos) y el valor de las funciones incógnitas en cualquier punto se determinan en términos de su valor en los puntos que lo circundan mediante su aproximación en diferencias finitas. Sustituyendo la aproximación de diferencias finitas en la ecuación diferencial para cada uno de los nodos de la malla obtendremos un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son el valor de la función en los nodos. El método se ha utilizado en la resolución de ciertos problemas de ingeniería, pero su principal desventaja es que resulta difícil su aplicación en geometrías o condiciones de contorno complejas.

#### *1.2.2.2. Métodos de Funciones de Prueba*

Se supone que la solución del problema se puede expresar en función de un número finito de parámetros incógnitos. El grado del polinomio a considerar, y en consecuencia el número de coeficientes incógnitos, determinará la precisión del resultado obtenido. Para encontrar tales parámetros se puede aplicar la condición de estacionariedad de un funcional (método de Raileigh-Ritz [6]) o minimizar el error ponderado sustituyendo la aproximación en las ecuaciones diferenciales (método de Galerkin [7]). De la aplicación de estos métodos resulta un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas corresponden a estos parámetros. La principal desventaja del método es que al suponer una única solución, válida para todo el dominio, esta pudiera requerir un número excesivo de términos, con un grado polinómico elevado, dando lugar posiblemente a elevados errores computacionales de redondeo.

### 1.2.2.3. *Método de los Elementos Finitos*

Se puede decir que este método se basa en los dos métodos antes descritos, pero evitando sus inconvenientes. Este método utiliza una discretización del problema en nodos (al igual que en el método de diferencias finitas), subdivide al dominio en un conjunto de subdominios (elementos finitos) definidos por los nodos que conecta y plantea las ecuaciones algebraicas de comportamiento considerando la condición de estacionariedad de un funcional o un método de residuos ponderados (método de funciones de prueba). Las incógnitas en este caso son el valor de la función en los nodos, por lo que en geometrías complejas, un análisis de este tipo lleva asociado usualmente un gran volumen de datos y la resolución requiere comúnmente de la ayuda de un computador. El método de elementos finitos asume ciertas condiciones como la linealidad de las propiedades del material (isotrópico), condiciones de carga idealizadas (estables) y puntos restringidos perfectamente fijos [7].

El software Pro/Engineer empleado en los análisis computacionales de este estudio, basa sus cálculos en el método de elementos finitos. Por ende, en el siguiente capítulo se hace necesaria una síntesis de este método cuya comprensión es básica para dilucidar la pertinencia de utilización del software y su eficacia en función de los resultados perseguidos.

## Capítulo II: Método de Elementos Finitos

### 2.1. Grados de Libertad y Desplazamiento Nodal

La Figura 2.1 representa una partícula ubicada en el espacio. Esta partícula puede desplazarse a través de los ejes, en las direcciones  $\pm x$ ,  $\pm y$ ,  $\pm z$ , además de poder girar en torno a cada uno de ellos. De este modo, la partícula puede desplazarse de seis formas diferentes o con seis grados de libertad. El concepto es válido también para los nodos descritos anteriormente, definiendo así el concepto de desplazamiento nodal [7]. En particular, cuando se considera un problema en el plano, existen tres grados de libertad: dos de desplazamiento y uno de rotación.

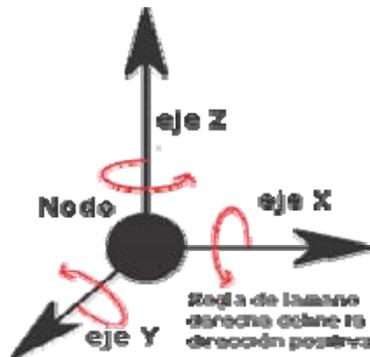


Figura 2.1. Grados de libertad.

### 2.2. Conectividad de los Elementos

Una geometría de apariencia complicada puede modelarse usando un número discreto de elementos, de geometrías simples. La similitud de los diversos elementos es una razón por la que el método de elementos finitos es muy adecuado para ser tratado en una computadora. Para su fácil implantación

debe adoptarse un esquema ordenado de numeración llamado conectividad de los elementos que puede representarse en una tabla de conectividad (Tabla 2.1). En esta tabla los encabezados se refieren a los números locales de los nodos de un elemento (Figura 2.2) y los números globales de los nodos correspondientes sobre el cuerpo (Figura 2.3). La conectividad establece así la correspondencia local – global [7].

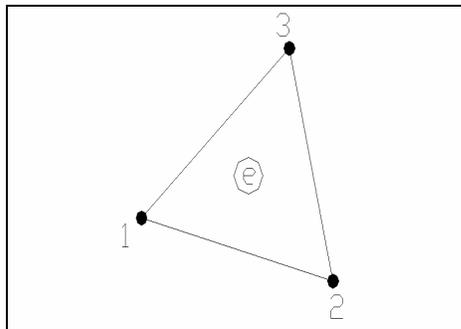


Figura 2.2. Números locales.

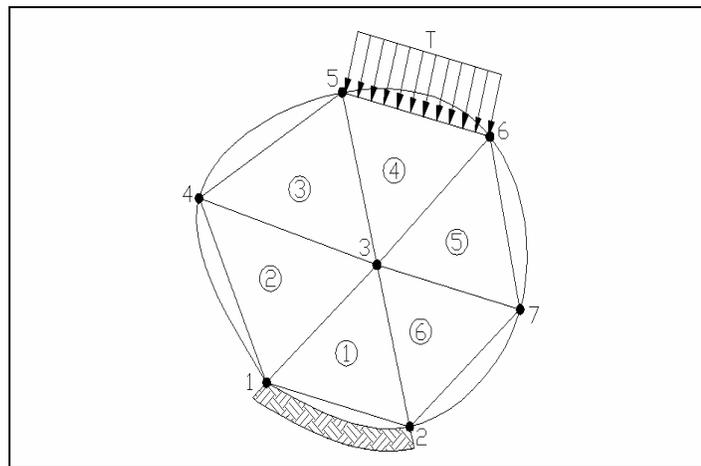


Figura 2.3. Números globales.

e	1	2	3	Números locales
1	1	2	3	
2	4	1	3	
3	5	4	3	Números globales
4	6	5	3	
5	7	6	3	
6	2	7	3	

Tabla 2.1. Conectividad de los elementos.

La región bidimensional de la Figura 2.3 se encuentra dividida en triángulos de lados rectos. Los puntos donde se encuentran los vértices de los triángulos se llaman nodos y cada triángulo formado por tres lados se llama elemento. Los elementos llenan toda la región excepto una pequeña región en la frontera. Esta región no cubierta existe en fronteras curvas y puede reducirse escogiendo elementos más pequeños o elementos con fronteras curvas. La idea del método del elemento finito es resolver en forma aproximada el problema continuo. Para la triangulación mostrada en la Figura 2.3 los números de los nodos están indicados en los vértices y los números de los elementos están encerrados en un círculo. La mayoría de los códigos estándar del elemento finito usan la convención de numeración circular alrededor del elemento en sentido contrario al de las manecillas del reloj, para evitar calcular un área negativa.

### 2.3. Energía Potencial en Modelo Continuo

La energía potencial  $\Pi$  total de un cuerpo elástico se define como la suma de la energía de deformación unitaria total  $U$  y el potencial de trabajo  $W_p$ :

$$\Pi = U + W_p \quad (15)$$

Para materiales elásticos lineales, la energía de deformación unitaria por unidad de volumen en un cuerpo es  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ . Para un cuerpo elástico lineal, la energía de deformación unitaria total  $U$  está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (16)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T$  y  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T$  son los vectores de esfuerzos y deformaciones respectivamente en cualquier punto  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$  del cuerpo.

El potencial de trabajo  $W_p$  está dado por

$$W_p = -\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (17)$$

donde

$\mathbf{u} = [u, v, w]^T$  es el vector de desplazamientos en cualquier punto  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$  del cuerpo

$\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T$  es el vector de carga distribuida por unidad de volumen (Ej. peso propio debido a la gravedad)

$\mathbf{T} = [T_x, T_y, T_z]^T$  es el vector de carga distribuida por unidad de área, también llamada tracción, que actúa sobre una parte de la frontera del cuerpo (Ej. fuerzas de contacto distribuidas, acción de la presión, etc.)

$\mathbf{P}_i = [P_x, P_y, P_z]^T$  es el vector que representa una carga puntual en un punto  $i$ .

Así, reemplazando la ecuación (16) y (17) en la ecuación (15), se obtiene el potencial total del cuerpo elástico [8]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (18)$$

## 2.4. Ecuaciones de Equilibrio

En la Figura 2.4 se muestran las fuerzas que actúan sobre el volumen  $dV$ . Considerando en equilibrio el volumen elemental  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma F_z = 0$ , se obtienen las siguientes ecuaciones que deben cumplirse al interior del cuerpo:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad (21)$$

## 2.5. Condiciones de Frontera

1. Condiciones de desplazamiento en la frontera:  $\mathbf{u} = 0$  o  $\mathbf{u} = a$  sobre la superficie  $S_U$  (Figura 2.4) del cuerpo, donde  $a$  es un desplazamiento conocido.
2. Condiciones de carga en la superficie: La consideración de equilibrio a través de los tres ejes coordenados debe satisfacerse sobre la frontera  $S_T$  (Figura 2.4) del cuerpo donde se aplican las tracciones.

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = T_x \quad (22)$$

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = T_y \quad (23)$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = T_z \quad (24)$$

Donde  $\mathbf{n}=[n_x, n_y, n_z]^T$  es la normal unitaria a la superficie  $S_T$  (Figura 2.4).

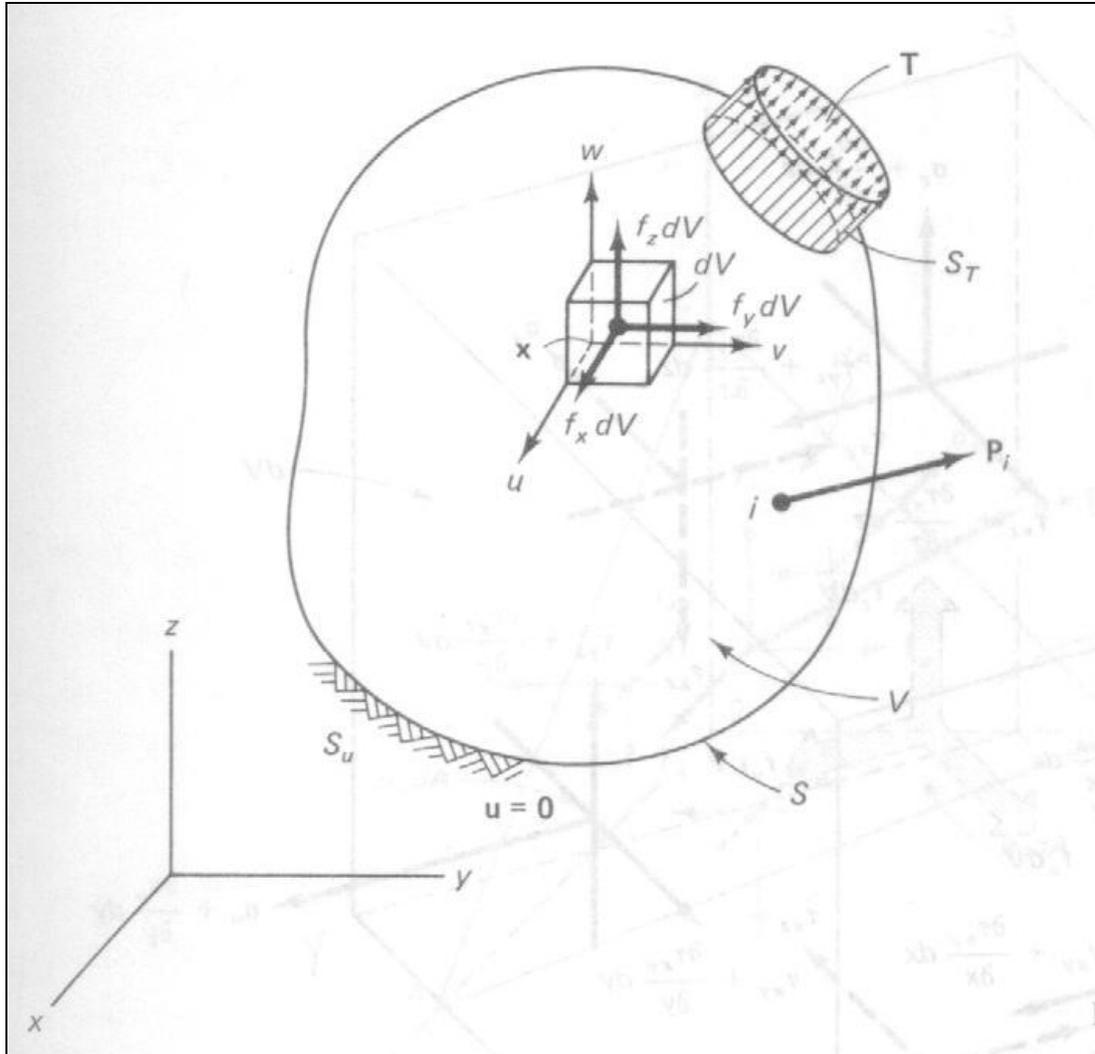


Figura 2.4. Cuerpo Tridimensional [7]

## 2.6. Notación Matricial

Para su aplicación en medios computacionales, es necesario que las ecuaciones resultantes se lleven a una notación matricial. De este modo, es posible generar algoritmos de solución en función del álgebra de matrices [7].

### 2.6.1. Funciones de Forma

En el método de elementos finitos, los desplazamientos en los puntos nodales de cada elemento  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]^T$ , donde  $n$  es el grado de libertad del elemento, son asumidos como incógnitas y sus valores al interior del elemento son interpolados por medio de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$ . En este caso las variables interpoladas corresponden al campo de desplazamiento (Figura 2.5).

Así, dentro de cualquier elemento

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (25)$$

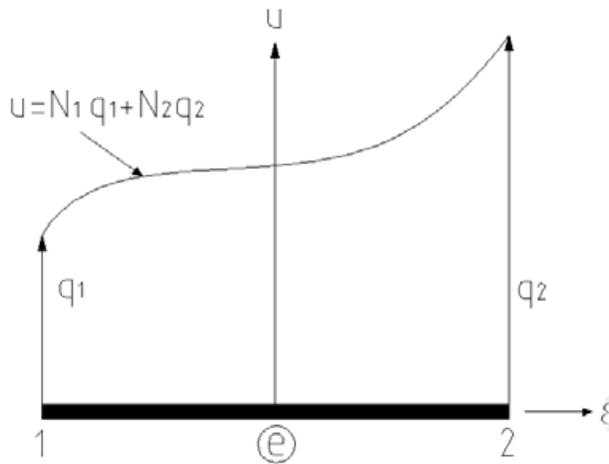


Figura 2.5. Interpolación usando funciones de forma.

### 2.6.2. Deformación Unitaria – Desplazamiento

Las deformaciones unitarias se relacionan directamente con los desplazamientos en cualquier punto como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T$$

que se cumplen para deformaciones pequeñas [7].

Dentro del elemento las deformaciones unitarias pueden ser expresadas también en términos de sus desplazamientos nodales como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (26)$$

donde  $\mathbf{B}$  es la matriz de deformación unitaria – desplazamiento del elemento.

### 2.6.3. Relaciones Esfuerzo – Deformación

Para materiales elásticos lineales, las relaciones esfuerzo – deformación unitaria provienen de la ley de Hooke generalizada y están relacionados como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (27)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la matriz simétrica del material que, para materiales isotrópicos, depende solo del Módulo de Elasticidad  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$ .

Para problemas unidimensionales:

$$D = E \quad (28)$$

Para problemas bidimensionales:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Para problemas tridimensionales:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \quad (30)$$

## 2.7. Energía Potencial en Modelo Discretizado

La energía potencial total del cuerpo discretizado será la suma de la contribución de energía potencial de cada elemento. Así:

$$\Pi = \sum_e \Pi_e \quad (31)$$

donde  $\Pi_e$  es la energía potencial de cada elemento.

Reemplazando las notaciones matriciales (25), (26) y (27) en la energía potencial total (18), considerando el modelo discretizado (31), se tiene que:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_e \mathbf{q}^{(e)T} \left( \int_e [\mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)}] dV \right) \mathbf{q}^{(e)} - \sum_e \mathbf{q}^{(e)T} \left( \int_e \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} dV \right) - \sum_e \mathbf{q}^{(e)T} \left( \int_e \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{T}^{(e)} dV \right) - \sum_i Q_i P_i \quad (32)$$

Considerando ahora las siguientes relaciones

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_e [\mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)}] dV \quad (33)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_e \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} dV \quad (34)$$

$$\mathbf{T}^{(e)} = \int_e \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{T}^{(e)} dV \quad (35)$$

donde  $\mathbf{k}^{(e)}$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{f}^{(e)}$  es el vector de fuerza y  $\mathbf{T}^{(e)}$  es el vector de carga de tracción del elemento. Reemplazándolas en la ecuación (32) se tiene que

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_e \mathbf{q}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} - \sum_e \mathbf{q}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} - \sum_e \mathbf{q}^{(e)T} \mathbf{T}^{(e)} - \sum_i Q_i P_i \quad (36)$$

*“Cuando todos los elementos de la malla son combinados, los procedimientos de discretización e interpolación resultan en una conversión del problema de una ecuación diferencial continua a una gran cantidad de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas. Este sistema puede tener varios miles de ecuaciones en ella que requiere de un algoritmo numérico especial y eficiente. La solución de estas ecuaciones contiene los valores nodales que en forma colectiva representan una aproximación a la solución continua de la ecuación diferencial parcial” [9].*

Así, las matrices de rigidez ( $\mathbf{k}^{(e)}$ ) y los vectores de fuerzas ( $\mathbf{f}^{(e)}$ ) y ( $\mathbf{T}^{(e)}$ ) de cada elemento se agrupan en posiciones globales a través de la conectividad de los elementos dando lugar a la matriz de rigidez estructural ( $\mathbf{K}$ ) y al vector de carga global ( $\mathbf{F}$ ).

La expresión de la energía potencial (36), una vez realizado el ensamble, se transforma finalmente en:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{F} \quad (37)$$

donde

$\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez estructural

$\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n]$  es el vector de desplazamientos globales (Incógnitas)

$\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3, \dots, F_n]$  es el vector de carga global

$n$  es ahora el número total de grados de libertad del cuerpo

Las cargas puntuales  $-\sum_i Q_i P_i$  se agregan en las posiciones apropiadas (nodos) del vector de carga global.

## 2.8. Principio de Trabajo Virtual

Los conceptos de desplazamientos virtuales y trabajo virtual suelen aplicarse en el estudio de la estática para resolver problemas de equilibrio estático. Un “desplazamiento virtual” no es un desplazamiento real, es uno imaginario, que se impone arbitrariamente a un sistema estructural. El trabajo efectuado por las fuerzas reales durante un desplazamiento virtual se llama “trabajo virtual” [6].

Durante la deformación virtual, cada elemento de la estructura se desplazará a una nueva posición y sufrirá además una variación de su forma. Por tanto las fuerzas que actúan sobre un elemento (resultantes tanto de esfuerzos como de cargas externas) efectuarán trabajo virtual. Como el elemento está en equilibrio, el trabajo virtual realizado por las fuerzas (externas e internas) durante el desplazamiento del mismo cuerpo rígido debe ser cero.

Principio del trabajo virtual: “Si a una estructura deformable que está en equilibrio, bajo la acción de un sistema de cargas, se le da una pequeña deformación virtual, entonces el trabajo virtual efectuado por las cargas externas es igual al trabajo virtual realizado por las fuerzas internas (o resultantes de esfuerzos)” [6].

Así, para un elemento

$$\partial W_{\text{int}} = \partial W_{\text{ext}} \quad (38)$$

que puede expresarse como

$$\partial U + \partial W_p = 0 \quad (39)$$

donde

$\partial W_{\text{int}} = \partial U$ ,  $\partial U$  es la variación en la energía interna de deformación y  $-\partial W_{\text{ext}} = \partial W_p$ ,  $\partial W_p$  es la variación en el potencial de trabajo.

Entonces, recordando (15) y haciendo  $\partial \Pi$

$$\partial \Pi = \partial U + \partial W_p \quad (40)$$

Reemplazando ahora (39) en (40) se tiene que

$$\partial \Pi = 0$$

## 2.9. Teoría de la Energía Potencial Mínima

“De todos los desplazamientos posibles que satisfacen las condiciones de frontera de un sistema estructural, aquellos que corresponden a

configuraciones de equilibrio hacen que la energía potencial total adquiera un valor mínimo” [7].

Por lo tanto optimizando, con respecto a  $Q$ , la ecuación (37) de la energía potencial, se tiene que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q} = \mathbf{KQ} - \mathbf{F} = 0 \quad (41)$$

obteniéndose un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{F} = \mathbf{KQ} \quad (42)$$

que al someterlo a las condiciones de frontera forma un sistema de ecuaciones de comportamiento aproximado, del que se pueden determinar los desplazamientos nodales (incógnitas principales) que minimizan al funcional de la energía potencial. Los esfuerzos en los elementos y las reacciones en los soportes se obtienen a través de los desplazamientos obtenidos [7].

Debe enfatizarse que una especificación impropia de las condiciones de frontera puede conducir a resultados erróneos. Las condiciones de frontera eliminan la posibilidad que la estructura se mueva como cuerpo rígido. Además las condiciones de frontera deben modelar con exactitud el sistema físico.

## Capítulo III: Generalidades sobre Fatiga de Material

### 3.1. Introducción al Fenómeno de Fatiga

Los materiales sometidos a tensiones repetidas o fluctuantes fallan a una tensión mucho más baja que la necesaria para producir la misma falla bajo una carga constante. Por ende, esta falla suele ocurrir a un menor nivel de tensiones que el límite elástico del material. El deterioro se manifiesta a través de la formación de grietas en la superficie del componente que se propagan a través de éste hasta que la sección remanente intacta es incapaz de sostener los esfuerzos impuestos y se produce la fractura súbita.

El daño sufrido durante el proceso de fatiga es acumulativo y generalmente irrecuperable debido a que los períodos de descanso no producen ninguna recuperación medible. La velocidad de la grieta depende del material y de las condiciones ambientales.

El fenómeno de fatiga se presenta principalmente en partes móviles tales como:

- Componentes de máquinas rotativas sujetos a tensiones alternas
- Resortes deformados en cantidades variables
- Alas de aeronaves sometidas a cargas repetidas de ráfagas
- Neumáticos deformados repetidamente en cada revolución de la rueda

Este fenómeno afecta desde juguetes para niños hasta un transbordador espacial. Alrededor de un 95% de todas las fallas estructurales ocurren a través de mecanismos de fatiga [10].

Los procedimientos clásicos de diseño solo consideran la etapa final (fractura) del proceso de fatiga. Sin embargo, el proceso completo de fatiga en elementos mecánicos se divide generalmente en tres etapas:

- Período de Iniciación de la Grieta
- Período de Propagación de la Grieta
- Rotura

La Figura 3.1 muestra, a través de la curva de iniciación de la grieta (línea segmentada) y de la curva de fractura final del elemento (línea continua), las etapas del proceso de fatiga.

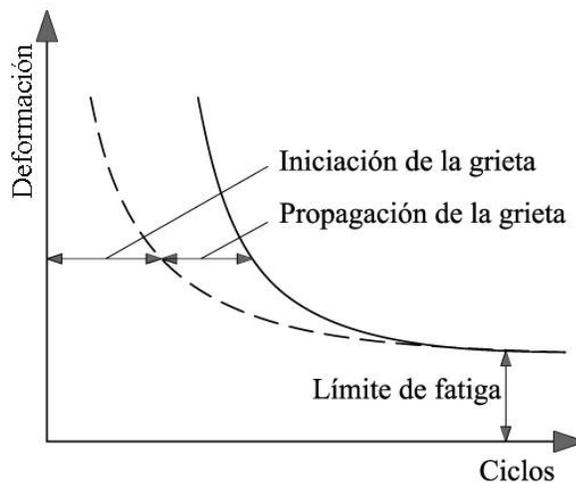


Figura 3.1. Período de iniciación y propagación de la grieta de fatiga.

La vida de servicio completa  $N$  puede ser determinada al sumar el número de ciclos de esfuerzos requeridos para la iniciación de la grieta  $N_i$  con los requeridos para que la grieta se propague desde una longitud inicial hasta una longitud crítica  $N_p$  que es cuando se espera que ocurra la fractura final del elemento.

$$N = N_i + N_p \quad (43)$$

Si bien la fatiga se desarrolla en todos los materiales, este estudio se concentra en las propiedades del fenómeno de fatiga en metales, tales como aceros o aleaciones livianas.

El común de los componentes de ingeniería ocupa la mayor parte de su vida útil en una sola etapa, ya sea en el período de iniciación o en el período de propagación de la grieta. La mayoría de los vehículos terrestres se confeccionan de componentes rígidos fabricados de materiales frágiles. En estos casos la grieta tarda en aparecer, pero una vez iniciada, se propaga rápidamente hasta producir la fractura total del componente. Por ende, la vida útil de estos componentes está comúnmente regida por el primer período. Por el contrario, muchas aplicaciones aeroespaciales utilizan componentes flexibles fabricados de materiales muy dúctiles en los cuales la grieta tarda bastante menos en aparecer, pero una vez iniciada, se propaga lentamente. Por ende la vida útil de estos componentes se regirá principalmente por el segundo período.

## **3.2. Mecanismos de Falla por Fatiga**

### *3.2.1. Período de Iniciación de la Grieta*

El período de iniciación de la grieta representa una de las etapas más importantes en el proceso de fatiga [11]. La localización y modo de iniciación de la grieta depende de la microestructura del material, de los tipos de esfuerzos aplicados y de la geometría del componente.

En los materiales se presentan discontinuidades, tanto microscópicas como visibles. Dentro de las microscópicas se encuentran las inclusiones y los defectos de fabricación, mientras que en las visibles, están los orificios, empalmes, chaveteros, cantos vivos, etc. Los esfuerzos fluctuantes se

concentran en estas discontinuidades, que actúan como multiplicadores de tensiones pudiendo ocurrir fluencia plástica local y originarse la grieta.

La fluencia plástica local produce movimientos de dislocación que en granos favorablemente orientados, crean bandas persistentes de deslizamiento (PSB). Conforme los esfuerzos se alternan, aparecen más bandas de deslizamiento que, debido a esfuerzos cortantes, se mueven hacia delante y hacia atrás como una baraja de naipes formando una microgrieta en la superficie (Figura 3.2). Esta microgrieta tiene una profundidad de aproximadamente 1 a 10 micrones y constituye la grieta embriónica [11].

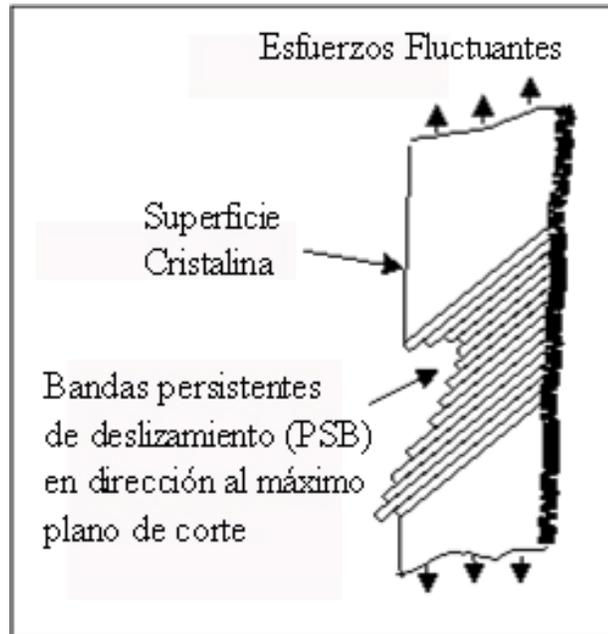


Figura 3.2. Nucleación de la microgrieta [10].

Esta microgrieta se extiende en una pequeña grieta que crece a través de un grano, en la dirección de los planos máximos de corte ( $45^\circ$ ), hasta alcanzar la frontera del grano. Esta pequeña grieta tiene mucha dificultad para atravesar la frontera del grano y, a menudo, solo consigue propagarse a través de un grano. Si la carga es algo más alta o con suficiente número de ciclos, el mecanismo se transfiere al grano adyacente y la grieta continúa avanzando (Figura 3.3). Así, después de haberse propagado a través de aproximadamente

tres granos, la grieta cambia su dirección y mecanismo de propagación. Un amplio rango de valores para el largo de grieta define la transición entre el período de iniciación y el período de propagación de la grieta. Comúnmente, en aceros, se considera una longitud de grieta inicial de 0,05 a 1 mm, donde los aceros de mayor resistencia toman los menores valores [11].

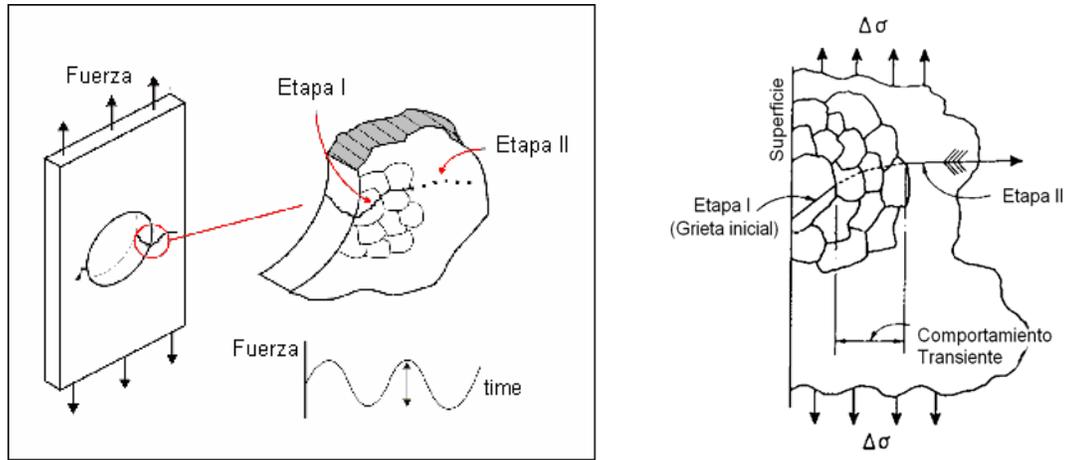


Figura 3.3. Iniciación de la grieta [10]

Este mecanismo se presenta siempre que en alguna parte de la pieza se haya excedido el límite elástico del material, aún en ausencia de discontinuidades en la superficie como en probetas lisas.

La presencia de imperfecciones iniciales puede anular esta etapa iniciándose directamente el segundo periodo.

### 3.2.2. Período de Propagación de la Grieta

Durante este periodo el mecanismo físico de fatiga cambia. La grieta es ahora suficientemente larga como para formar una concentración geométrica de esfuerzos en su extremo. Esta concentración genera una zona plástica cada vez que el esfuerzo a tensión la abre (Figura 3.4).

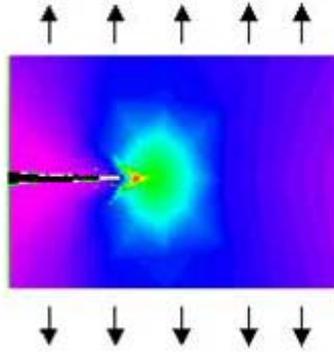


Figura 3.4. Propagación de la grieta [10]

Así, la grieta continúa propagándose, pero ahora de manera perpendicular a la dirección de la carga aplicada (Figura 3.4). Este período se caracteriza por dejar estrías o marcas de playa en la zona de falla del componente producto de la abertura cíclica de la grieta (Figura 3.5).

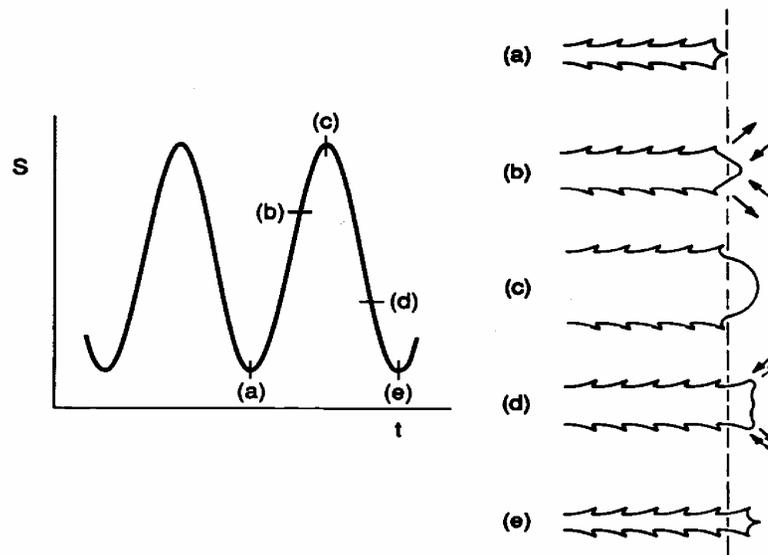


Figura 3.5. Generación de estrías [10]

### 3.2.3. Rotura

La grieta se propaga a través del componente hasta que la sección remanente intacta es incapaz de sostener los esfuerzos impuestos y ocurre la rotura o fractura súbita del componente.

### 3.3. Condición de Carga

Cualquier carga que varíe con el tiempo puede causar falla por fatiga. El carácter de estas cargas llega a variar de manera importante de una a otra aplicación. En maquinarias rotativas, las cargas tienden a ser de amplitud uniforme a lo largo del tiempo y a repetirse con alguna frecuencia. En equipos de servicio (vehículos de todo tipo), las cargas tienden a ser, a lo largo del tiempo, bastante variables en amplitud y frecuencia e incluso pueden ser de naturaleza aleatoria.

En ausencia de corrosión la forma de onda de la función carga – tiempo no presenta ningún efecto significativo en la falla por fatiga, por lo que la función suele ilustrarse esquemáticamente como una onda sinusoidal o en dientes de sierra. Además, la presencia o ausencia de períodos de reposo en el historial de carga no producen efectos significativos en entornos no corrosivos. Las ondas esfuerzo – tiempo y deformación – tiempo tienen la misma forma general y la misma frecuencia que la onda carga – tiempo [2].

#### 3.3.1. Totalmente Reversible de Amplitud Constante

Corresponde a una condición idealizada de carga donde la amplitud y la frecuencia de carga se mantienen constantes en el tiempo (máquinas que operan a velocidad constante y sin sobrecargas). En esta condición el esfuerzo promedio es cero, es decir, el esfuerzo máximo y el esfuerzo mínimo son de igual magnitud y de signo opuesto en una onda esfuerzo – tiempo (Figura 3.6). Usualmente los esfuerzos a tensión son considerados como positivos y los esfuerzos a compresión como negativos.

El rango de esfuerzos  $\Delta\sigma$  (Figura 3.6) se define como:

$$\Delta\sigma = \sigma_{MAX} - \sigma_{MIN} \quad (44)$$

El esfuerzo alternante  $\sigma_a$  (Figura 3.6) corresponde a la amplitud de onda y se determina a partir de:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}{2} \quad (45)$$

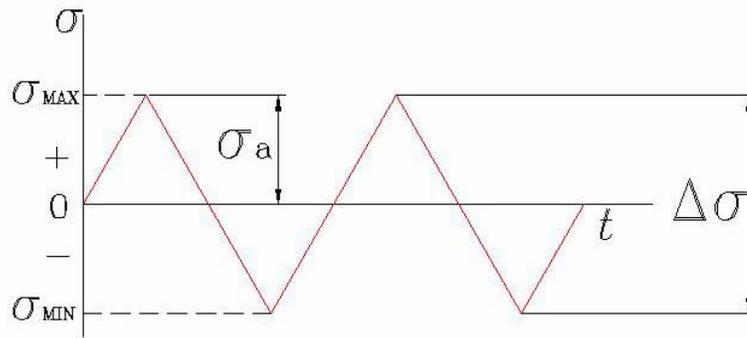


Figura 3.6. Condición de carga totalmente reversible

### 3.3.2. Amplitud Constante con Esfuerzo Promedio

También corresponde a una condición idealizada de carga donde la amplitud y la frecuencia de carga se mantienen constantes en el tiempo, pero es una condición más realista ya que considera el esfuerzo promedio (Figura 3.8) a tensión o a compresión que se presenta en la mayoría de las condiciones reales. Los esfuerzos promedios a tensión ayudan a abrir la grieta mientras que los esfuerzos promedios a compresión ayudan a cerrarla. Por ende, los esfuerzos promedios a tensión tienen efectos negativos reduciendo la vida a fatiga mientras que los esfuerzos promedios a compresión ayudan a retardar la iniciación de la grieta (Figura 3.7).

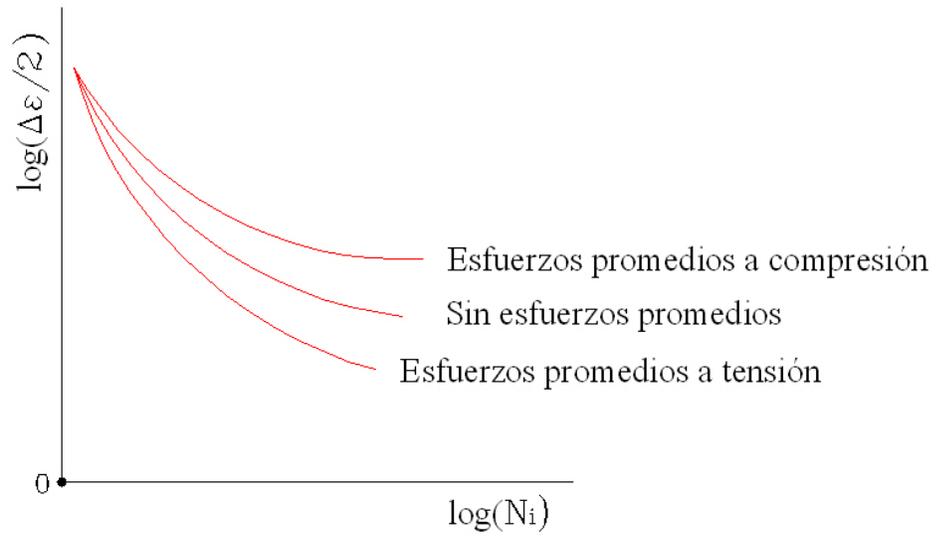


Figura 3.7. Curvas de iniciación de grieta con esfuerzo promedio.

El esfuerzo promedio  $\sigma_m$  (Figura 3.8) se determina a partir de:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{MAX} + \sigma_{MIN}}{2} \quad (46)$$

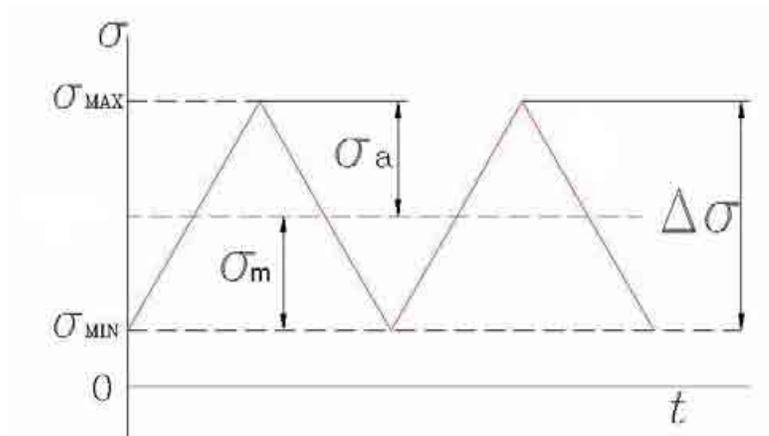


Figura 3.8. Condición de carga con esfuerzos promedios.

### 3.3.3. Amplitud Variable

Es la que más se aproxima a la condición de carga que experimentan la mayoría de los componentes reales donde la amplitud del patrón de carga es variable en el tiempo como se muestra en la Figura 3.9.

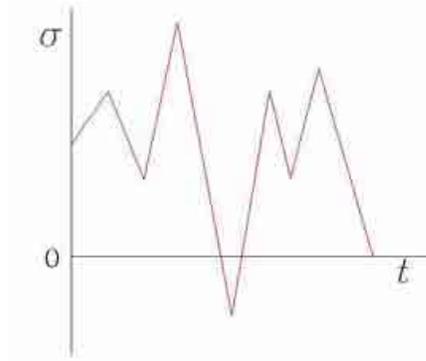


Figura 3.9. Condición de carga de amplitud variable.

## 3.4. Modelos de Falla por Fatiga

### 3.4.1. Procedimiento Esfuerzo – Vida (S-N)

Es el más antiguo de los tres modelos. Este modelo solo es válido cuando la condición de carga es de amplitud constante. Es un modelo basado en esfuerzos que busca determinar un límite de resistencia a la fatiga para el material de manera que los esfuerzos cíclicos puedan mantenerse debajo de este nivel y evitar que el componente falle. La pieza se diseña entonces en base a la resistencia a la fatiga del material considerando un factor de seguridad. En efecto este procedimiento intenta mantener los esfuerzos locales en las discontinuidades tan bajos que la etapa de iniciación de grietas nunca comience. La premisa es que los esfuerzos y deformaciones se mantengan en todo el componente en la zona elástica del material sin que ocurra ninguna fluencia plástica local que pudiera iniciar una grieta [2].

Este procedimiento es razonablemente fácil de aplicar y por haberse utilizado durante tanto tiempo existe una gran cantidad de datos de importancia sobre resistencia. No obstante, es el método más empírico y el menos preciso de los tres modelos [10].

#### 3.4.1.1. Límite de Resistencia a la Fatiga del Material

$$\text{En aceros con } S_U < 1400 \text{ Mpa} \quad S'_e \cong 0,5 \cdot S_U \quad (47)$$

$$S_U \geq 1400 \text{ Mpa} \quad S'_e \cong 700 \text{ Mpa} \quad (48)$$

donde  $S_U$  es la resistencia última a la tracción y  $S'_e$  es el límite de resistencia a la fatiga para  $10^6$  ciclos de duración.

Los componentes en servicio tienen una menor duración que la determinada en probetas lisas. Por ende, el límite de resistencia a fatiga corregido  $S_e$  para  $10^6$  ciclos de duración se determina a partir de:

$$S_e = S'_e \cdot F_R \quad (49)$$

donde  $F_R$  es el factor de reducción de resistencia a la fatiga para un 50% de confiabilidad y se define como:

$$F_R = C_{carga} \cdot C_{tamaño} \cdot C_{superficie} \cdot C_{temperatura} \quad (50)$$

El factor  $F_R$  considera los efectos del tipo de carga  $C_{carga}$ , del tamaño del componente  $C_{tamaño}$ , del acabado y tratamiento superficial  $C_{superficie}$  y de la temperatura de operación  $C_{temperatura}$  en la vida a fatiga. Además si se requiere un

nivel de confiabilidad sobre un 50% debe agregarse un  $C_{\text{confiabilidad}}$ . Todos estos y otros factores corrigen la información proveniente de probetas lisas y sus valores pueden ser encontrados en [2].

### 3.4.1.2. Diagrama ( $S - N$ )

La ecuación que representa la vida a fatiga en aceros para estados de cargas totalmente reversibles se expresa como:

$$N = \left( \frac{S_a}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (51)$$

donde  $N$  son los ciclos estimados para fractura por fatiga,  $S_a$  es la resistencia a la fatiga a cualquier  $N$  y  $b$ ,  $a$  son factores que se determinan a partir de:

$$b = \frac{1}{3} \cdot \log \left( \frac{S_m}{S_e} \right) \quad (52)$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b \quad (53)$$

y la resistencia a fatiga para mil ciclos de duración  $S_m$  se determina a su vez a partir de:

$$\text{Cargas a flexión:} \quad S_m = 0,9 \cdot S_U \quad (54)$$

$$\text{Cargas axiales:} \quad S_m = 0,75 \cdot S_U \quad (55)$$

La ecuación (51) tiene validez en el rango  $10^3 \leq N \leq 10^6$  ya que para  $N \geq 10^6$  el componente de esfuerzo alternante mantiene el valor del límite de resistencia a la fatiga corregida  $S_e$  como se aprecia en la Figura 3.10.

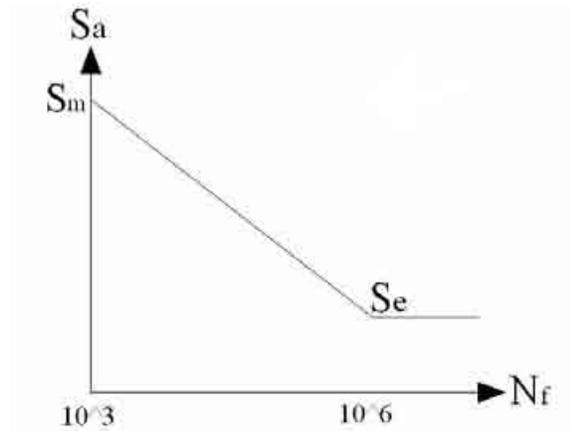


Figura 3.10. Curva S-N para esfuerzos totalmente reversibles.

### 3.4.1.3. Diagrama $(S - N)$ para Esfuerzos Promedios

La curva  $(S - N)$  proveniente de ensayos con estados de carga totalmente reversibles, requiere ser corregida ante la presencia de un estado de cargas con esfuerzos promedios. Para ello puede utilizarse uno de los siguientes criterios:

Criterio de Goodman: 
$$\frac{\sigma_a}{S_a} + \frac{\sigma_m}{S_U} = 1 \quad (56)$$

Criterio de Gerber: 
$$\frac{\sigma_a}{S_a} + \frac{\sigma_m^2}{S_U^2} = 1 \quad (57)$$

Criterio de Soreberg: 
$$\frac{\sigma_a}{S_a} + \frac{\sigma_m}{S_Y} = 1 \quad (58)$$

De la utilización de uno de estos criterios en conjunto con la ecuación (51) se obtiene la curva S-N corregida para la condición de carga con esfuerzo promedio como muestra la Figura 3.11.

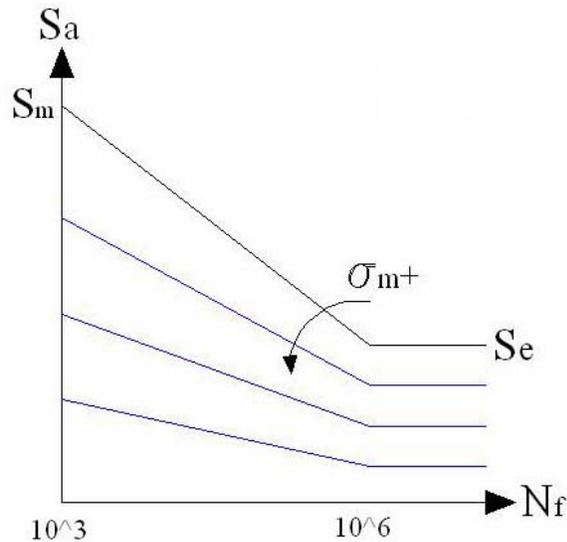


Figura 3.11. Curvas S-N corregidas con el criterio de Goodman.

#### 3.4.2. Procedimiento Deformación – Vida ( $\epsilon$ -N)

Dado que la iniciación de una grieta implica fluencia, los procedimientos clásicos basados en esfuerzos no pueden modelar de manera adecuada este período del proceso. Este período requiere de un modelo basado en deformaciones. Por lo tanto, el procedimiento de deformación – vida es muy útil en situaciones donde se sabe que los esfuerzos cíclicos son lo bastante elevados como para causar fluencia plástica local. Con este procedimiento puede considerarse el daño acumulado por variaciones en la amplitud de la carga cíclica a lo largo de la vida útil de la pieza, como sobrecargas que pudieran introducir esfuerzos residuales favorables o desfavorables en la zona de falla. Es el modelo teórico más completo, el de uso más complicado entre los tres modelos y requiere de una solución computacional [2].

El procedimiento de deformación – vida es un método basado en deformaciones locales para un estado plano de esfuerzos. Este método considera:

- Concentraciones Geométricas de Tensiones
- Comportamiento Esfuerzo – Deformación
- Relación Deformación – Vida
- Efectos de Esfuerzos Promedios

#### 3.4.2.1. Concentración Geométrica de Tensiones

Si las deformaciones se han obtenido de un análisis elástico lineal (galgas extensométricas, análisis de elementos finitos, etc.) y los niveles de esfuerzos exceden el límite de fluencia, entonces debe aplicarse un método de corrección elástico – plástico. Este método solo es aplicable para pequeñas zonas de plasticidad, ya que mayores deformaciones plásticas invalidan los resultados elásticos lineales del análisis de elementos finitos.

La corrección de Neuber es un procedimiento apropiado para realizar una corrección elástico plástica en un estado de cargas uniaxiales como se muestra en la Figura 3.12.

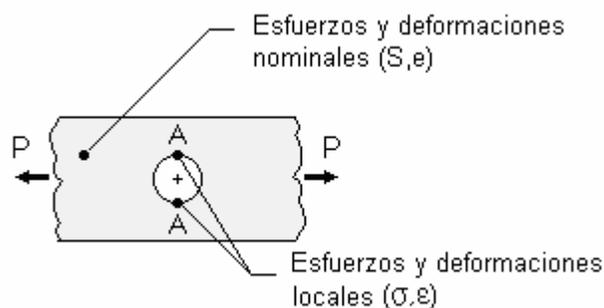


Figura 3.12. Esfuerzos y deformaciones nominales y locales [10].

Para cargas cíclicas:

$$K_f^2 \Delta S \Delta e = \Delta \sigma \Delta \varepsilon \quad (59)$$

donde  $K_f$  es el factor de concentración de tensiones cíclicas,  $\Delta S$  es el rango de tensiones nominales,  $\Delta e$  es el rango de deformaciones nominales,  $\Delta \sigma$  es el rango de tensiones corregidas y  $\Delta \varepsilon$  es el rango de deformaciones corregidas para plasticidad local.

Este método considera que:

$$K_f \approx K_t \quad (60)$$

donde  $K_t$  es el factor de concentración de tensiones estáticas.

Teniendo en cuenta que:

$$\Delta e = \frac{\Delta S}{E} \quad (61)$$

entonces reemplazando (60) y (61) en (59) se obtiene

$$\frac{(K_t \cdot \Delta S)^2}{E} = \Delta \sigma \Delta \varepsilon \quad (62)$$

#### 3.4.2.2. *Comportamiento Esfuerzo – Deformación*

- Ecuación de Esfuerzos – Deformaciones Cíclicas

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma^{\frac{1}{n}}}{K'} \quad (63)$$

- Ecuación de Lazos de Histéresis

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (64)$$

donde  $n'$  es el exponente de endurecimiento por deformaciones cíclicas,  $K'$  es el coeficiente de resistencia cíclica y  $E$  es el módulo de elasticidad del material.

#### 3.4.2.3. Relación Deformación – Vida

La ecuación de deformación – vida de cuatro parámetros ( $\sigma'_f$ ,  $b$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $c$ ) de Coffin – Manson relaciona las deformaciones, los esfuerzos y el número de ciclos de carga mediante

$$\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_i)^b + \varepsilon'_f (2N_i)^c \quad (65)$$

donde  $\varepsilon_e$  es la deformación elástica,  $\varepsilon_p$  la deformación plástica,  $\sigma'_f$  el coeficiente de resistencia a la fatiga,  $b$  el exponente de resistencia a la fatiga,  $\varepsilon'_f$  el coeficiente de ductilidad a la fatiga y  $c$  el exponente de ductilidad a la fatiga.

Esta ecuación genera la curva de iniciación de grieta para distintas intensidades de carga en una condición de carga totalmente reversible como se muestra en la Figura 3.13.

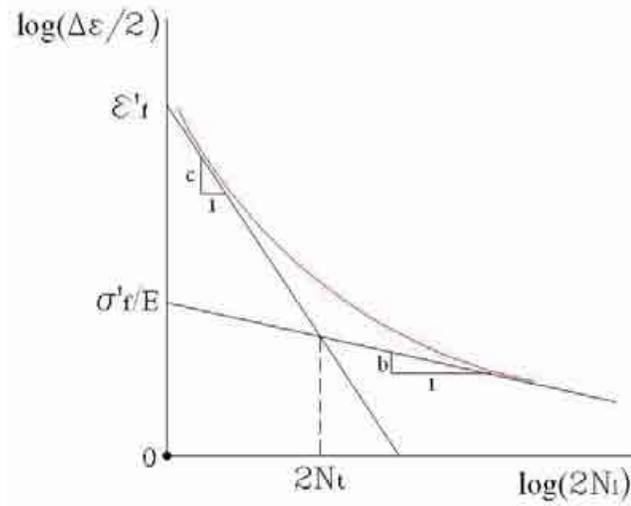


Figura 3.13. Curva de deformación – vida

#### 3.4.2.4. Efectos de Esfuerzos Promedios

##### 1. Corrección de Smith – Watson – Topper [12]

Este método de corrección se recomienda para condiciones de cargas con esfuerzos promedios a tensión.

$$\sigma_{MAX} \frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N_i)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_i)^{b+c} \quad (66)$$

donde  $\sigma_{MAX}$  es el esfuerzo máximo

##### 2. Corrección de Morrow [13]

Este método de corrección se recomienda para condiciones de cargas con esfuerzos promedios a compresión.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{2} (2N_i)^b + \varepsilon'_f (2N_i)^c \quad (67)$$

donde  $\sigma_m$  es el esfuerzo promedio.

### 3.4.3. Procedimiento de la Mecánica de Fracturas Elásticas Lineales (LEFM)

La teoría de la mecánica de fracturas proporciona el modelo más adecuado para analizar el período de propagación de grietas. Este procedimiento es muy útil para predecir la vida restante de piezas agrietadas en servicio [2].

## 3.5. Ley de los Materiales Uniformes

Baumel Jr. y Seeger desarrollaron un set de propiedades genéricas para modelar aceros de baja aleación, aceros no aleados, aleaciones de aluminio y aleaciones de titanio [14]. Estas propiedades genéricas se conocen como Ley de los Materiales Uniformes (Tabla 3.1).

La ecuación de deformación – vida, con estas propiedades, tiene la gran ventaja de que solo requiere de la resistencia última  $\sigma_U$  del material para la estimación de la curva deformación – vida [11].

<b>Aceros de baja aleación</b>	<b>Aleaciones de aluminio</b>
<b>Aceros no aleados</b>	<b>Aleaciones de titanio</b>
$\sigma'_f = 1,5 \sigma_U$	$\sigma'_f = 1,67 \sigma_U$
$b = -0,087$	$b = -0,095$
$\varepsilon'_f = 0,59 \psi$	$\varepsilon'_f = 0,35$
$c = -0,58$	$c = -0,69$

Tabla 3.1. Ley de los Materiales Uniformes

El exponente de endurecimiento por deformaciones cíclicas  $n'$  y el coeficiente de resistencia cíclica  $K'$  se determinan a partir de

$$n' = \frac{b}{c} \quad (68)$$

$$K' = \frac{\sigma'_f}{(\epsilon'_f)^{n'}} \quad (69)$$

Para aceros no aleados y aceros de baja aleación, la ecuación (65) se convierte en:

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = 1,5 \frac{\sigma_U}{E} (2N_i)^{-0,087} + 0,59 \psi (2N_i)^{-0,58} \quad (70)$$

donde:

$$\frac{\sigma_U}{E} \leq 0,003 \quad \psi = 1 \quad (71)$$

$$\frac{\sigma_U}{E} > 0,003 \quad \psi = 1,375 - 125 \frac{\sigma_U}{E} \quad (72)$$

y para aleaciones de aluminio y titanio

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = 1,67 \frac{\sigma_U}{E} (2N_i)^{-0,095} + 0,35 (2N_i)^{-0,69} \quad (73)$$

## Capítulo IV: Pro/Mecánica Fatigue Advisor

Fatigue Advisor es un módulo de análisis de fatiga de nCode Internacional. Con él se realiza el cálculo de vida a fatiga en piezas sometidas a cargas cíclicas previamente modeladas con Pro/Engineer. Este programa funciona como un módulo de Pro/Mechanica y parte del cálculo de un análisis estático para hacer un análisis de fatiga.

Este módulo analiza solamente la iniciación de la grieta de fatiga a través del método de deformación – vida ( $\varepsilon - N$ ) por ser el método más apropiado para realizar un análisis CAE.

El análisis de fatiga es realizado en base a un previo análisis estático cuya solución ignora plasticidad. Por ende, antes de proceder con el análisis de fatiga, las deformaciones son automáticamente convertidas a deformaciones elásticas – plásticas no lineales utilizando la relación de Neuber.

El módulo utiliza además la Ley de los Materiales Uniformes para modelar aceros de baja aleación, aceros no aleados, aleaciones de aluminio y aleaciones de titanio.

Para predecir la estimación de vida en componentes sometidos a ciclos de deformación con esfuerzos promedios, Fatigue Advisor utiliza la Corrección de Morrow y el método de Smith – Watson – Topper. En el caso donde la carga es predominantemente compresiva, utiliza el método de Corrección de Morrow para proveer estimaciones de vida más realistas. Para secuencias de carga predominantemente a tensión, el método de Smith – Watson – Topper es el más conservador y por consiguiente el más recomendado. El módulo selecciona automáticamente el método más apropiado a la situación analizada.

Para cargas de amplitud variable, los daños por fatiga son extraídos de los ciclos de la señal y el daño producido por éstos es evaluado de manera individual, siendo cada ciclo de fatiga extraído por un proceso conocido como capturan de lazos de histéresis. Fatigue Advisor utiliza un algoritmo muy eficiente para realizar la extracción de estos ciclos conocido como: Rainflow Cycle Counting.

## Capítulo V: Fallas por Fatiga en Engranajes

### 5.1. Falla de Fatiga por Contacto

Las fallas de fatiga por contacto superficial en engranajes se clasifican en las siguientes categorías [15]:

#### 5.1.1. Falla por Formación de Grietas en la Superficie del Diente.

Producto de la carga aplicada en la superficie del diente se generan grietas que se extienden por debajo de ésta hasta provocar el desprendimiento de pequeñas partículas de material. La dureza es la principal propiedad que provee resistencia frente a este tipo de falla. Esta falla se inicia como un picado, para terminar en una desintegración total de la superficie como se aprecia en la Figura 5.1.



Figura 5.1. Superficie desintegrada [2].

Este tipo de falla es muy común en presencia de lubricante. Las grietas en la superficie del diente se llenan de aceite y, al comenzar el apriete del diente conjugado, se cierran a presión oprimiendo el fluido atrapado en ella. La presión del fluido crea un esfuerzo a tensión en la punta de la grieta provocando

un rápido crecimiento de ésta y una subsiguiente ruptura de la superficie, formando un picado. Una vez picada la superficie su acabado superficial se ve comprometido y rápidamente comienza el desprendimiento de grandes pedazos del material.

Este tipo de falla puede llevar a un incremento significativo en el sonido emitido por una caja de engranajes y a una disminución importante de la capacidad de transmisión de carga.

#### *5.1.2. Falla por Soldado Momentáneo de las Superficies de Trabajo*

Ocurre cuando las superficies de trabajo de un par de engranajes conjugados se sueldan momentáneamente producto de la carga y de las rugosidades de las superficies. Esto causa que algunos fragmentos sean arrancados de una superficie para adherirse a la otra. El daño provocado por este tipo de falla es conocido como escoriado. La elección del lubricante adecuado es un factor determinante en este tipo de falla.

#### *5.1.3. Falla de Remoción de Partículas de la Superficie por Abrasión*

El roce entre las superficies de trabajo de dos dientes en contacto genera un desgaste en ambas superficies de trabajo. Este desgaste se manifiesta como una remoción de partículas de metal de las superficies. El daño provocado por este tipo de falla es conocido como desgaste por abrasión.

### **5.2. Falla de Fractura por Flexión**

La fractura de dientes es claramente la peor condición [2]. Los esfuerzos a flexión que se generan en la raíz del diente en cada ciclo, originan una grieta por fatiga que después de una cierta cantidad de ciclos provoca la falla por

rotura (Figura 5.3). Esta pequeña grieta inicial, como se indica en la sección 3.2, tiene mucha dificultad para atravesar la frontera del grano y, a menudo, solo consigue propagarse a través de un grano. Sin embargo, ante la presencia de sobrecargas periódicas, el mecanismo se transfiere al grano adyacente y la grieta continúa avanzando hasta que la sección remanente del diente no es capaz de soportar los esfuerzos a flexión y se produce la rotura total del diente de forma inesperada. Estas sobrecargas periódicas se generan habitualmente en engranajes de baja precisión donde el valor completo de la carga se presenta aplicado en el extremo superior de la superficie de trabajo. En engranajes con precisiones suficientemente buenas esta falla nunca debería presentarse. La condición de esfuerzos máximos en la raíz ocurre en un diente de la corona en el instante en que entra en contacto con su respectivo del piñón. También ocurre en un diente del piñón en el instante inmediatamente anterior al término de contacto con su respectivo de la corona. Ambas condiciones se ilustran en la Figura 5.2.

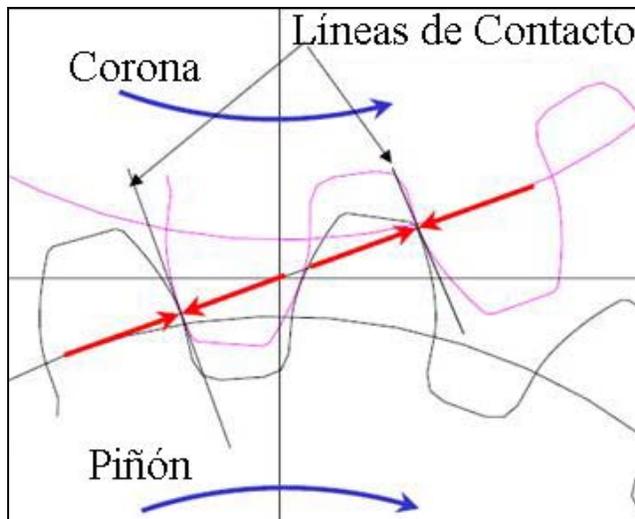


Figura 5.2. Condición de máximos esfuerzos en la raíz del diente.

La grieta se inicia en la superficie del empalme de la raíz (discontinuidad visible) en el punto donde se presentan los mayores esfuerzos.

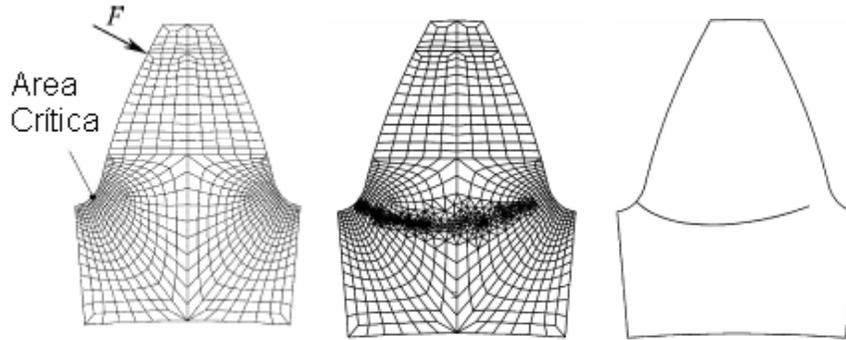


Figura 5.3. Trayectoria de la grieta de fatiga [11]

En este estudio se analiza la falla por fatiga a flexión en dientes de engranajes debido a que es una falla súbita y catastrófica. Esta falla ocurre sin previo aviso y debido a que resulta en la ruptura total del diente, concluye en la inutilización de la máquina. Por el contrario, la falla por fatiga superficial da advertencias audibles y los engranajes pueden seguir operando un cierto tiempo antes de ser reemplazados. La falla superficial es entonces el límite de diseño más deseable en la vida de un engranaje.

El tamaño del diente es la variable principal en el diseño de engranajes ya que si el material seleccionado sobrevive a los esfuerzos a flexión para un tamaño dado, es posible ajustar luego su dureza y mejorar así su vida al desgaste sin tener que hacer ningún otro cambio en el diseño. Existen técnicas que permiten la introducción de esfuerzos residuales a compresión en la superficie de las piezas tales como los tratamientos térmicos y los tratamientos de preesforzado mecánico, aportando mejoras significativas a la duración de la superficie antes de ser puesta en servicio.

### 5.2.1. Procedimiento Analítico de Diseño por Esfuerzos a Flexión

La primera ecuación útil para calcular el esfuerzo a flexión en un diente de engranaje fue realizada por W. Lewis que consideró al diente como una viga en voladizo con su sección crítica en la raíz.

La Ecuación de Lewis tiene ciertas limitaciones [16]:

- Asume que la máxima carga de flexión ocurre en el extremo superior del diente, siendo que la carga máxima ocurre en realidad cerca del círculo de paso (punto de paso) cuando toda la carga generada por el torque es transmitida por un solo diente.
- Ignora la componente radial  $w_r$  de la fuerza ya que ésta componente provoca compresión en la raíz del diente reduciendo el esfuerzo de flexión a tensión favorable para la fatiga.
- No considera esfuerzos de contacto.
- Asume que las cargas son estáticas.

La Ecuación de Lewis ya no se aplica en su forma original, pero sirve como base para una versión más moderna. La AGMA (American Gear Manufacturers Association) desarrolló una serie de factores que fueron añadidos a la ecuación de Lewis para obtener un diseño más confiable.

Según aparece definida en la norma 2001 - B88 de AGMA [2], la ecuación sólo es válida para ciertas hipótesis respecto a la geometría del diente y al acoplamiento de los engranajes:

- La razón de contacto es entre 1 y 2
- No hay interferencia entre puntas y empalmes de dientes en acoplamiento, y no hay rebaje del diente por encima del arranque teórico del perfil activo
- Ningún diente es puntiagudo

- Existe un juego distinto de cero
- Los empalmes de las raíces son estándar
- Se desprecian las fuerzas de fricción

La ecuación de esfuerzos a flexión de AGMA, para los engranajes de especificación SI en dientes de profundidad total, es:

$$\sigma_b = \frac{W_t}{F m J} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \quad (74)$$

donde:

$J$  es el factor geométrico de resistencia a flexión

$K_v$  es el factor dinámico

$K_m$  es el factor de distribución de carga

$K_a$  es el factor de aplicación de carga

$K_s$  es el factor de tamaño

$K_B$  es el factor de espesor del aro

$K_I$  es el factor de engranaje intermedio o loco

$W_t$  es la componente tangente de la carga total aplicada (*Newtons*)

## Capítulo VI: Análisis de Falla por Flexión en un Diente de Engranaje

Este estudio presenta una simulación computacional de una falla de fatiga por flexión en la raíz de un diente de engranaje recto. Esta simulación comprende dos análisis, uno estático y uno de fatiga, cuyos resultados serán comparados con los métodos tradicionales de diseño.

### 6.1. Análisis Estático

En esta etapa del análisis se compararán los esfuerzos estáticos a flexión obtenidos a partir de:

- Ecuación AGMA de esfuerzos a flexión
- Método de Elementos Finitos (Pro/Structure)

El engranaje analizado corresponde a un piñón dimensionado en base a las especificaciones formuladas en la sección 1.1. El par de engranajes acoplados tiene las siguientes características:

Piñón	Corona
$m = 4(mm)$	$m = 4(mm)$
$Z = 24 \text{ dientes}$	$Z = 60 \text{ dientes}$
$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 20^\circ$
$F = 50(mm)$	$F = 50(mm)$

Tabla 6.1. Especificaciones del par de engranajes utilizado

El acero seleccionado para el par de engranajes corresponde a un SAE 1045 sin tratamientos superficiales.

### 6.1.1. Cálculo de la Ecuación AGMA de Esfuerzos a Flexión

Para el cálculo de la Ecuación AGMA [2] se requiere determinar factores de corrección para las condiciones supuestas como se especifica a continuación:

1. *Factor geométrico  $J$  a flexión AGMA para dientes de profundidad total de  $20^\circ$  con carga en las puntas:* Para un piñón de 25 dientes acoplado a una corona de 60 dientes  $J$  es igual a 0,25.
2. *Factor de aplicación de carga:* Suponiendo que tanto la máquina impulsora como la máquina impulsada son de aplicación de carga uniforme, entonces  $K_a$  es igual a 1.
3. *Factor de distribución de carga:* Se supone un engranaje perfectamente alineado por lo que no se considerará un factor de distribución de carga.
4. *Factor dinámico:* En vista que esta etapa del análisis corresponde a un análisis estático, no se considerará un factor dinámico. La condición dinámica se incluirá en el posterior análisis de fatiga.
5. *Factor de tamaño:* Considerando tamaños de dientes de altura estándar, el valor de  $K_s$  recomendado por AGMA es igual a 1.
6. *Factor de espesor de aro:* Considerando un engranaje de disco sólido, el valor de  $K_B$  se considera igual a 1.
7. *Factor de engranaje intermedio o loco:* Para engranajes que no son intermedios o locos, el valor de  $K_I$  es igual a 1.

Al aplicar estos factores en la Ecuación (74) de Esfuerzos a Flexión de AGMA, se obtiene entonces

$$\sigma_b = \frac{W_t}{50(mm) \cdot 4(mm) \cdot 0,25} \frac{1 \cdot 1}{1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0,02 \cdot W_t \left( \frac{1}{mm^2} \right) \quad (75)$$

### 6.1.2. Análisis Estático en Elementos Finitos con Pro/Structure

Para llevar a cabo la simulación se modela un diente de un piñón (modelo simplificado), en base a las hipótesis planteadas por la Ecuación de AGMA. Así, el modelo considera la totalidad de la carga aplicada de manera tangencial en la punta del diente (Figura 6.1), la carga aplicada es estática y no se consideran ni esfuerzos de contacto ni fuerzas de fricción.

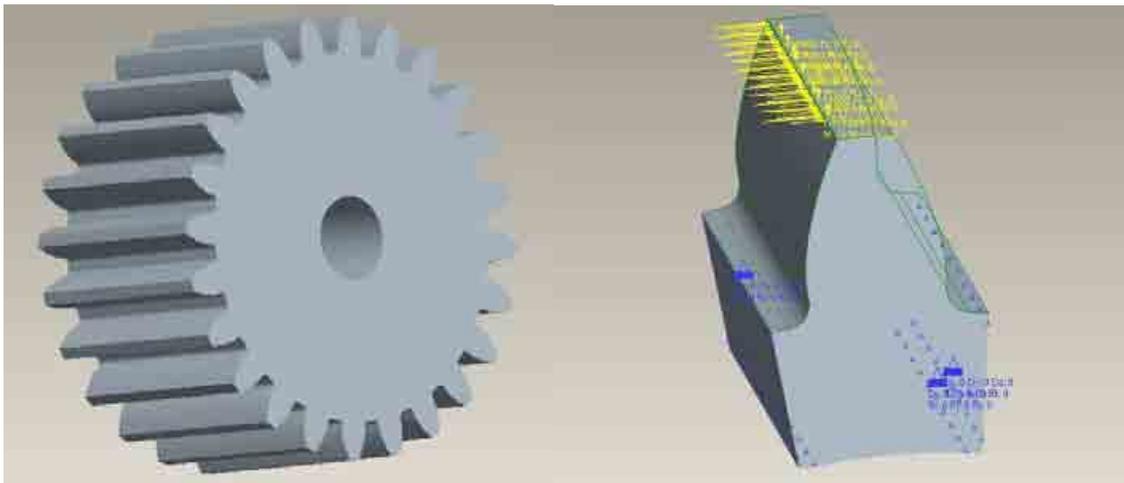


Figura 6.1. Modelo simplificado del piñón.

El modelo se discretiza en 3464 elementos. El índice de energía de deformación y el índice global RMS de esfuerzos Von – Misses convergen a un valor de 3,6% y 3,5% respectivamente. Ambas convergencias se alcanzan en la 7ª iteración utilizando un polinomio de grado 9 en la interpolación (Figura 6.2).

Los gráficos de convergencia de energía de deformación y de esfuerzos máximos Von – Misses se representan en el Anexo 2.

```

>> Pass 7 <<
  Calculating Element Equations          (13:53:57)
    Total Number of Equations: 528513
    Maximum Edge Order: 9
  Solving Equations                      (14:01:21)
  Post-Processing Solution                (14:26:03)
  Calculating Disp and Stress Results    (14:31:13)
  Checking Convergence                   (14:46:45)
    Elements Not Converged: 0
    Edges Not Converged: 0
    Local Disp/Energy Index: 3.6%
    Global RMS Stress Index: 3.5%

  RMS Stress Error Estimates:

  Load Set      Stress Error  % of Max Prin Str
  -----
  LoadSet1     2.54e-01      0.0% of 7.75e+02
  LoadSet2     3.05e-01      0.0% of 9.30e+02
  LoadSet3     3.56e-01      0.0% of 1.09e+03
  LoadSet4     4.07e-01      0.0% of 1.24e+03
  LoadSet5     4.58e-01      0.0% of 1.40e+03

  Resource Check                          (15:07:48)
    Elapsed Time (sec): 10470.17
    CPU Time (sec): 2660.39
    Memory Usage (kb): 710153
    Wrk Dir Dsk Usage (kb): 4024320

  The analysis converged to within 5% on
  edge displacement, element strain energy,
  and global RMS stress.

```

Figura 6.2. Convergencia del análisis estático en el diente

El máximo esfuerzo Von – Misses ( $S_{MAX}$ ) se mide sobre la superficie del empalme que se encuentra sometida a esfuerzos de flexión a tensión (Figura 6.3) ya que son los causantes de la generación de grietas.

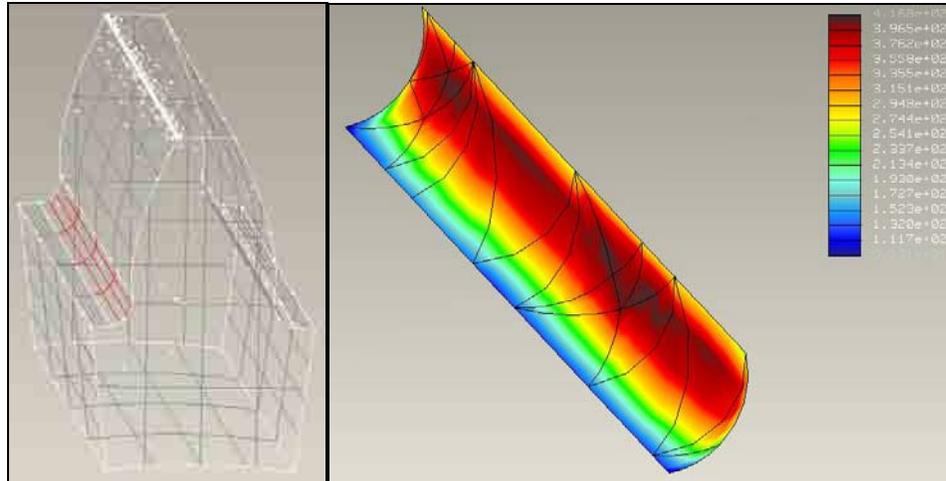


Figura 6.3. Determinación FEM de esfuerzos Von – Misses.

Los máximos esfuerzos Von – Misses arrojados por el análisis con elementos finitos se comparan con los resultados obtenidos de la Ecuación de Esfuerzos a Flexión de AGMA (Tabla 6.2). Como se mencionó anteriormente el rango de esfuerzos de interés es inferior al límite de resistencia a la fatiga del material cuyo valor se calcula en el Anexo 1. Así,  $S_{MAX} < 144,84 \text{ (N/mm}^2\text{)}$ .

$W_i \text{ (N)}$	AGMA $\text{(N/mm}^2\text{)}$	$S_{MAX} \text{ (N/mm}^2\text{)}$
2.500	50	75,81
3.000	60	90,97
3.500	70	106,1
4.000	80	121,3
4.500	90	136,5

Tabla 6.2. Resumen de esfuerzos estáticos

Los resultados obtenidos de ambos métodos varían linealmente con la variación de carga como se muestra en la figura 6.4.

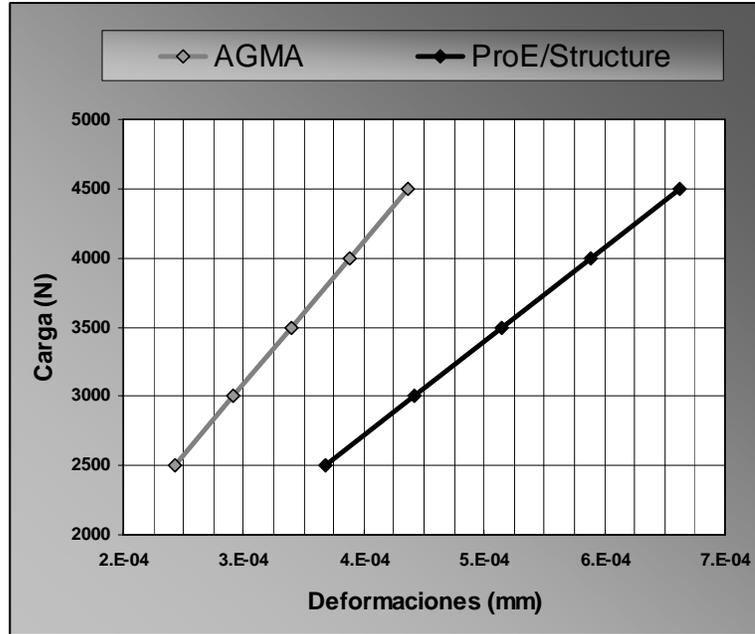


Figura 6.4. Resumen de esfuerzos estáticos.

## 6.2. Análisis de Fatiga

### 6.2.1. Simulación de la Superficie

Las grietas generalmente se presentan en la superficie de los materiales donde se generan las mayores tensiones. Por ende, debe analizarse la vida a fatiga del diente solo en la superficie de este. En estas superficies el tensor es plano, es decir, no existe un componente de tensión normal a dicha superficie a menos que sobre esta actúe una fuerza. El software enmalla por defecto al modelo con elementos sólidos y el tensor en este tipo de elementos tiene seis componentes independientes (frente a las tres del tensor plano) por lo que en los elementos de la superficie el estado tensional no representa la condición real. Se utiliza entonces un tipo de enmallado idóneo formado por elementos sólidos en el interior y por una finísima "piel" de elementos tipo cáscara (2D) en el exterior (Figura 6.5). Esta capa debe ser lo suficientemente fina para no aportar una rigidez extra al diente modelado.

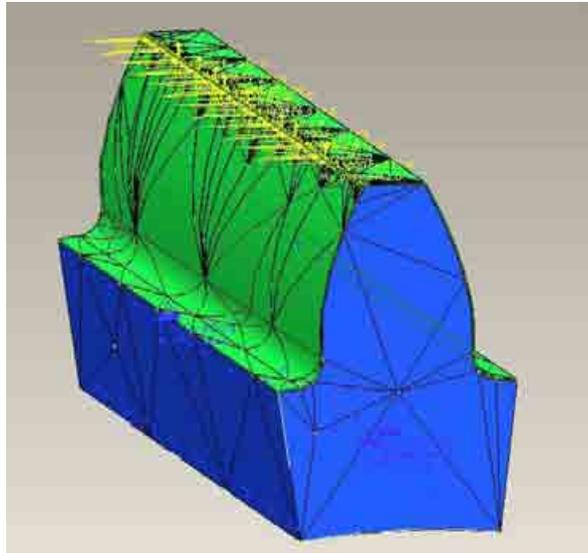


Figura 6.5. Elementos shell en la superficie.

Este enmallado con elementos cáscara es congruente con el de los elementos sólidos, es decir, comparten los mismos nodos que los elementos sólidos exteriores.

### 6.2.2. Modelamiento en Fatigue Advisor

El acero SAE 1045 corresponde a un acero no aleado con un  $S_U = 565 \text{ (N/mm}^2\text{)}$  [2]. Esta información es ingresada en las propiedades de fatiga del material como se especifica en la Figura 6.6.

Structural	Thermal
Isotropic	
Properties	Failure Criterion
Fatigue	
Ultimate Tensile Strength	565 N / mm <sup>2</sup>
Material Type	Unalloyed Steels
Surface Finish	Unalloyed Steels
Fatigue Strength Reduction Factor	Low Alloy Steels
	Aluminum Alloys
	Titanium Alloys

Figura 6.6. Definición del tipo de material.

El acabado superficial supuesto en nuestro análisis corresponde a un maquinado promedio y se asigna también en las propiedades de fatiga del material como se especifica en la Figura 6.7.

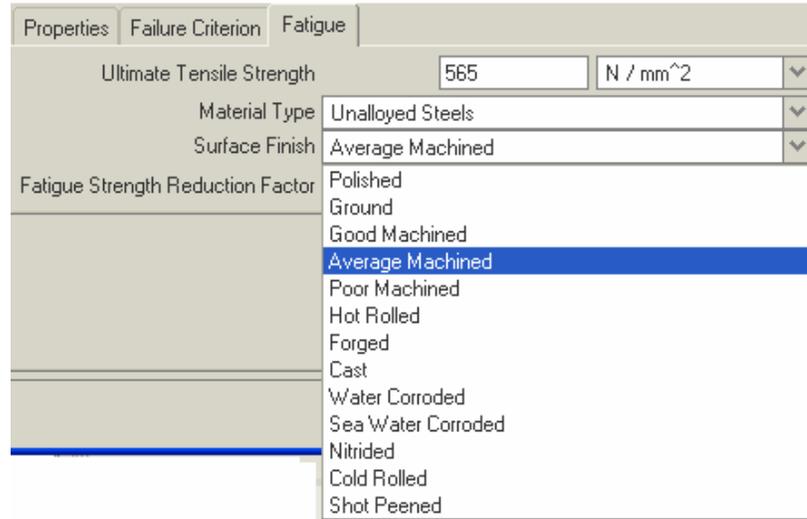


Figura 6.7. Definición del acabado superficial.

El software considera al factor superficial  $C_{\text{superficie}}$  y al factor de confiabilidad  $C_{\text{confiabilidad}}$  de manera independiente al factor de reducción de resistencia a la fatiga. El factor de confiabilidad se ajusta para un 90% de confiabilidad desde las opciones de configuración de Pro/Mecánica.

Se propone incluir, en esta etapa del análisis, los factores no considerados anteriormente en la ecuación de esfuerzos a flexión de AGMA. Estos factores corresponden al factor de aplicación de carga  $K_a$  y al factor dinámico  $K_v$ . Para ello debe reemplazarse el factor  $C_{\text{carga}}$  de la ecuación (50)

por  $\frac{1}{K_a}$  e incluir el factor  $K_v$  como se indica a continuación:

$$F'_R = \frac{K_v}{K_a} \cdot C_{\text{tamaño}} \cdot C_{\text{temperatura}} \quad (76)$$

donde  $F'_R$  sería el factor de resistencia a la fatiga pertinente para ser ingresado en el software.

Los valores de  $K_a$  y  $K_v$  pueden encontrarse en textos de diseño de máquinas tales como [2] o [16] entre otros. Por simplicidad en este estudio no se considerarán estos efectos. Por lo tanto:

$$F'_R = \frac{1}{1} \cdot 0,914 \cdot 1 = 0,914$$

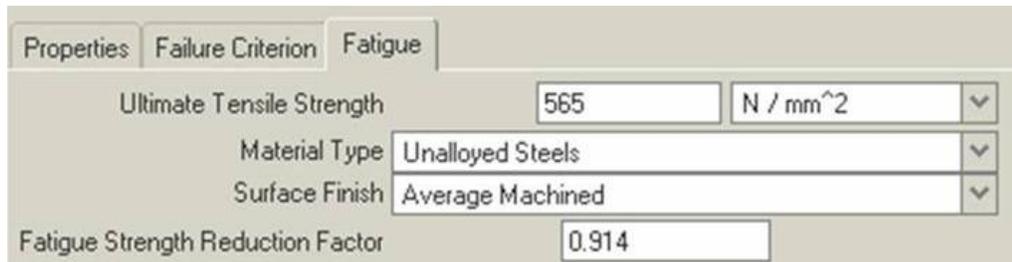


Figura 6.8. Definición del factor de reducción de resistencia a la fatiga.

### 6.2.3. Determinación de la Curva ( $\varepsilon - N$ ) de Iniciación de Grieta

Los esfuerzos y deformaciones lineales del análisis estático en Pro/Structure, se corrigen para la condición cíclica mediante: la ecuación de Neuber y la ecuación de lazos de histéresis.

Los rangos de esfuerzos estáticos, para una condición de carga constante con esfuerzos promedios de cero a peak, se determinan a partir de:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = S_{MAX} - 0 = S_{MAX} \quad (77)$$

Reemplazando la ecuación (77) en la ecuación (61) se obtienen los

rangos de deformaciones estáticas. Así:

$$\Delta e = \frac{S_{MAX}}{E} \quad (78)$$

Al reemplazar ahora la ecuación (77) en la ecuación (62) se obtiene:

$$\Delta \varepsilon = \frac{(K_t \cdot S_{MAX})^2}{E \cdot \Delta \sigma} \quad (79)$$

Finalmente los rangos de esfuerzos y deformaciones cíclicas corregidas  $\Delta \sigma$  y  $\Delta \varepsilon$  se obtienen resolviendo la ecuación (79) en conjunto con la ecuación (64).

Las deformaciones estáticas (análisis estático en elementos finitos) y las deformaciones cíclicas calculadas analíticamente (deformaciones corregidas para plasticidad local) se representan en la Figura 6.9.

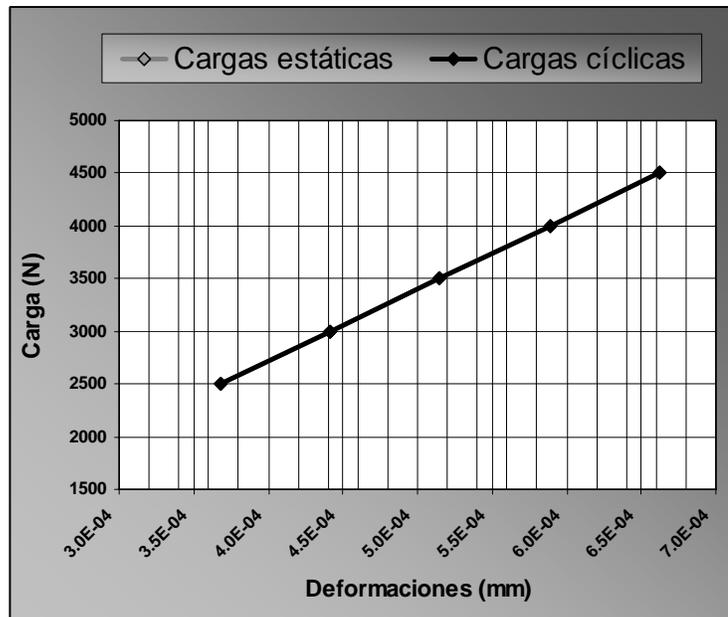


Figura 6.9. Deformaciones estáticas y cíclicas.

Las diferencias entre las deformaciones estáticas y cíclicas en el rango de cargas analizado, son muy pequeñas por lo que ambas curvas parecieran estar superpuestas.

Como se describió en el Capítulo IV, Fatigue Advisor corrige las deformaciones estáticas a deformaciones cíclicas y, mediante el método de deformación – vida, entrega como resultado la cantidad de ciclos de vida en forma logarítmica para cada intensidad de carga. Por ejemplo, para la carga de  $4500\text{ Kgf}$ , el valor mínimo (color rojo) corresponde a una vida logarítmica de 8.595 que equivale a una duración de  $10^{8.595} = 3.9 \times 10^8$  ciclos.

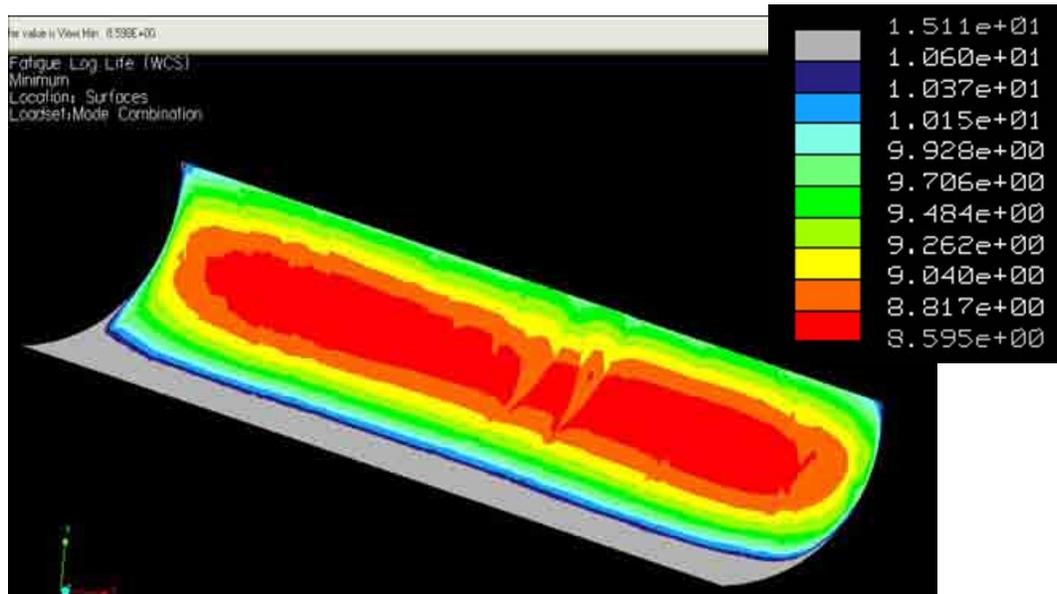


Figura 6.10. Ciclos de iniciación de grieta para 4500 Kgf.

Puede construirse finalmente, a partir de estos resultados, la curva  $(\varepsilon - N)$  para las distintas amplitudes de carga consideradas (Figura 6.11).

Esta curva resulta difícil de interpretar para fines prácticos por lo que se tradujeron las amplitudes de deformaciones cíclicas a amplitudes de carga (Figura 6.12).



Figura 6.11. Curva ( $\varepsilon - N$ ) de iniciación de grieta.

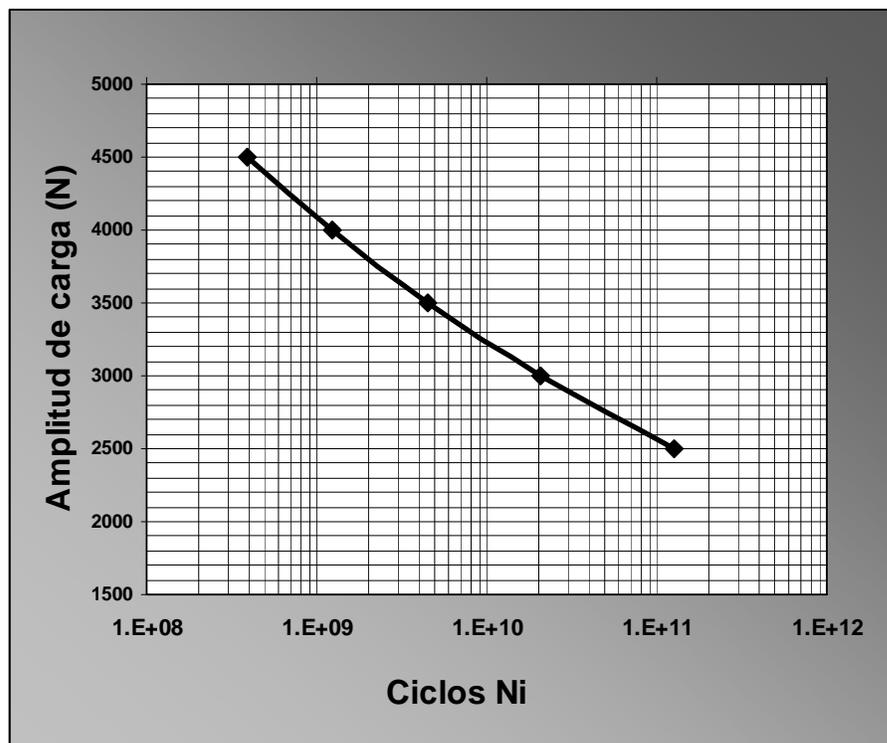


Figura 6.12. Curva de iniciación de grieta en función de la carga.

## Capítulo VII: Ensayo de Fatiga en Probetas CT

Con el propósito de validar los resultados obtenidos en el capítulo VI, se realizan:

- Ensayos empíricos de tracción y fatiga en probetas compactas de tracción (CT) (Figura 7.1) fabricadas en acero SAE 1045.
- Simulaciones computacionales en el software Pro/Engineer de ensayos de tracción y fatiga en probetas compactas de tracción (Figura 7.2).



Figura 7.1. Probeta CT

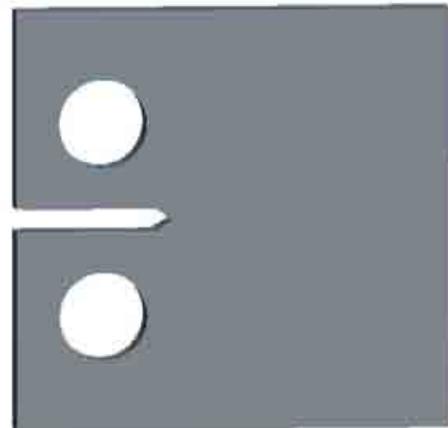


Figura 7.2. Probeta CT simulada en Pro/E

Los ensayos empíricos se realizaron en la máquina universal de ensayos de fatiga MOHR & FEDERHAFF AG (Figura 7.3) ubicada en el Laboratorio de Ensayo de Materiales y Control de Calidad perteneciente a la Escuela de Ingeniería Naval.



Figura 7.3. Máquina de fatiga

## 7.1. Ensayo Estático de Tracción

### 7.1.1. Ensayo Empírico

Se somete a la probeta CT a un ensayo estático de tracción (Figura 7.4), del cual se obtiene un gráfico (Figura 7.5) que presenta un claro límite de fluencia y punto de carga máxima.



Figura 7.4. Ensayo de tracción

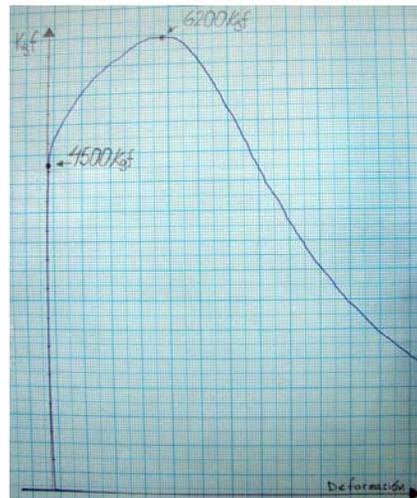


Figura 7.5. Gráfico Carga - Deformación

El límite de fluencia se presenta a una carga de 4500 Kgf y la carga máxima alcanza los 6200 Kgf.

### 7.1.2. Simulación en Pro/Structure

Se realiza entonces un análisis estático en Pro/Structure con una carga de 4500 Kgf y sus resultados se analizan a continuación:

#### 7.1.2.1. Convergencia

El modelo se discretiza en 4516 elementos. El índice de energía de deformación y el índice global RMS de esfuerzos Von – Misses convergen a un valor de 2,8% y 1,7% respectivamente. Ambas convergencias se alcanzan en la 7ª iteración utilizando un polinomio de grado 9 en la interpolación (Figura 7.6). Los gráficos de convergencia de energía de deformación y de esfuerzos máximos Von – Misses se representan en el Anexo 2.

```

>> Pass 7 <<
  Calculating Element Equations          (21:31:07)
    Total Number of Equations: 478804
    Maximum Edge Order: 9
  Solving Equations                      (21:36:27)
  Post-Processing Solution                (22:43:55)
  Calculating Disp and Stress Results    (22:48:13)
  Checking Convergence                   (22:50:53)
    Elements Not Converged: 2
    Edges Not Converged: 0
    Local Disp/Energy Index: 2.8%
    Global RMS Stress Index: 1.7%

  RMS Stress Error Estimates:

  Load Set      Stress Error  % of Max Prin Str
  -----
  LoadSet1     8.41e+01    0.8% of 1.06e+04

```

Figura N° 7.6. Convergencia del análisis estático en la probeta CT

### 7.1.2.2. Gráfico de Colores

El gráfico de colores (Figura 7.7) debe ser interpretado. Para ello se analiza visualmente la probeta ensayada empíricamente (Figura 7.8) y se plantean una serie de hipótesis.

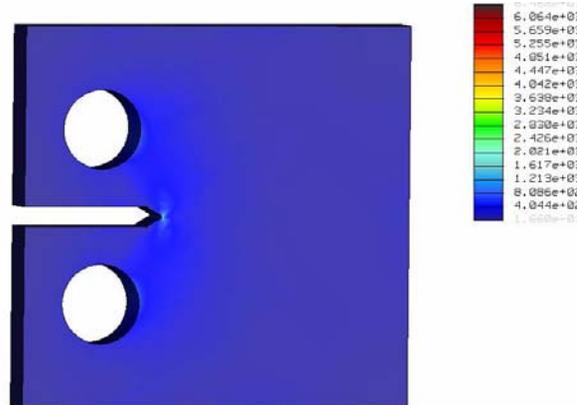


Figura 7.7. Gráfico de colores

La probeta de la izquierda en la Figura 7.8 ha superado el límite de fluencia (4500 Kgf) y presenta una deformación residual en dos zonas principales: los agujeros y la entalladura. La probeta de la derecha en la Figura 7.8 ha superado la carga máxima (6200 Kgf) y las zonas principales de deformación se presentan significativamente incrementadas.

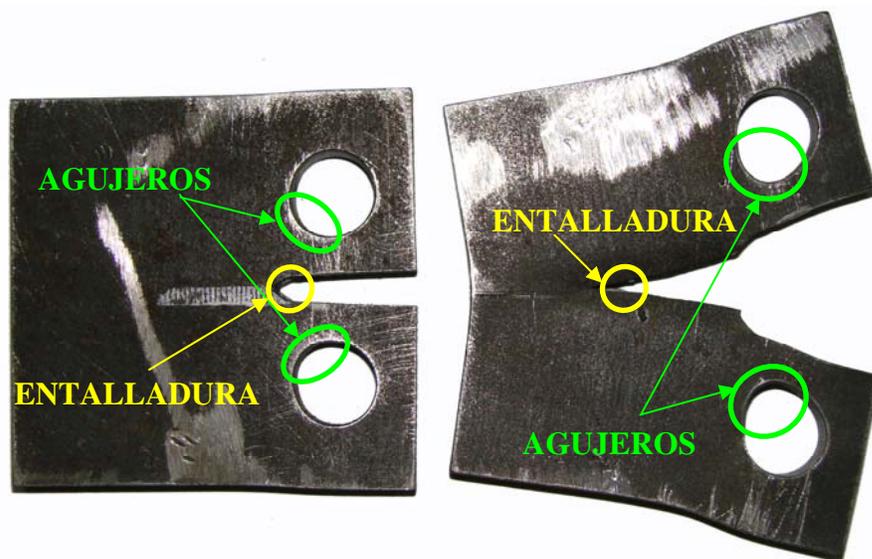


Figura 7.8. Probeta CT ensayada

El gráfico de colores resultante del análisis de elementos finitos refleja claramente la misma condición observada en las probetas ensayadas empíricamente. Estas zonas principales de concentración de esfuerzos se representan en un color azul claro (Figura 7.9) y sus valores en esfuerzos Von – Mises se encuentran en un rango de  $404,4 \text{ MPa}$  a  $808,6 \text{ MPa}$ . El valor del límite de fluencia considerado en la literatura para un SAE 1045 corresponde a  $310 \text{ MPa}$  [2]. Las diferencias pueden deberse a:

- El valor del límite elástico del material encontrado en la literatura proviene de ensayos con probetas de tracción ASTM standard. La probeta CT es una probeta standard para ensayos de fatiga.
- La deficiente calidad de maquinado del entalle en las probetas ensayadas, puede generar distintos valores de límite de fluencia.

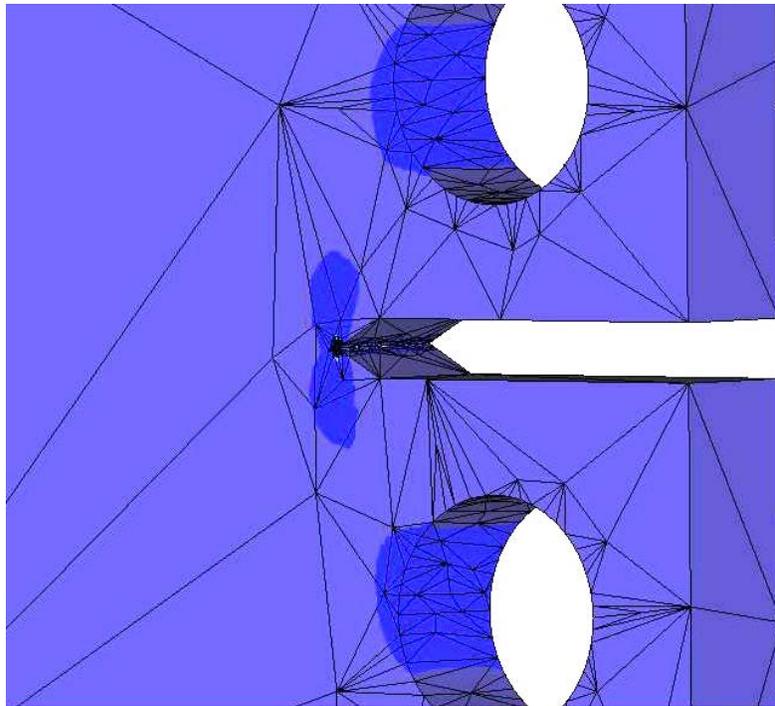


Figura 7.9. Zonas principales de concentración de esfuerzos

Si se analiza en mayor detalle la entalladura se observa una elevada concentración de tensiones (Figura 7.10) alcanzando valores de  $6.468 \text{ MPa}$ .

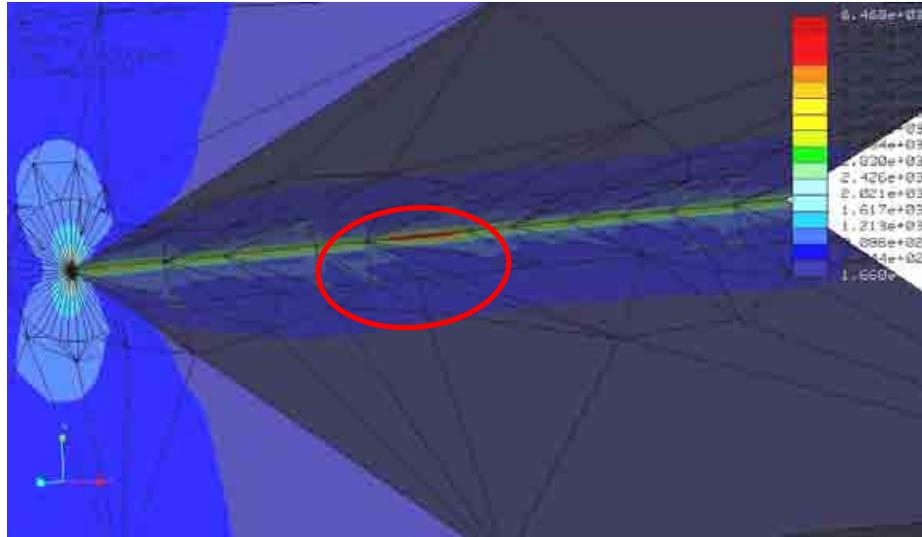


Figura 7.10. Concentración de esfuerzos en la entalladura

### 7.1.3. Cálculo Analítico

Carga estática

$$F = 4.500 \text{ Kgf} \cdot 9,806 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 44.127 \text{ N}$$

Geometría de la probeta (Figura 8.11):

$$e = 10 \text{ mm} , h = 51,2 \text{ mm} \text{ y } b = 38,4 \text{ mm}$$

Cálculo de esfuerzos combinados

$$S = \frac{F}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{F}{e \cdot h} + \frac{(F \cdot b) \cdot c}{\frac{e \cdot h^3}{12}} = \frac{F}{e \cdot h} \cdot \left( 1 + \frac{12 \cdot b \cdot c}{h^2} \right) \quad (80)$$

Reemplazando  $F$ ,  $e$ ,  $h$  y  $b$  en la ecuación (80) se obtiene

$$S = 474,021 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

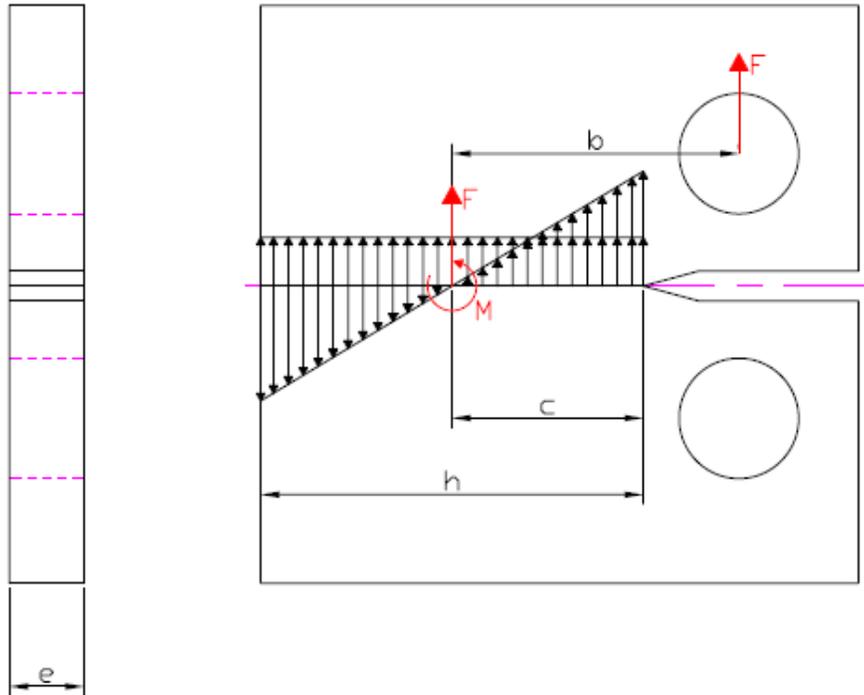


Figura 7.11. Cálculo analítico de esfuerzos en la probeta

#### 7.1.4. Resumen de Resultados

En la siguiente tabla se resumen los resultados de los distintos análisis estáticos (Tabla 7.1).

Carga (Kgf)	Literatura (N/mm <sup>2</sup> )	Pro/E (N/mm <sup>2</sup> )	Analítico (N/mm <sup>2</sup> )
4.500	310	411,4 – 822,7	474,021

Tabla 7.1. Resumen de resultados estáticos

## 7.2. Ensayo de Fatiga

### 7.2.1. Ensayo Empírico

Se ensayaron un total de 3 probetas a entre 1000 - 4500 Kgf cuyos resultados se designan en la tabla 7.2.

Probeta	1	2	3
Nº de ciclos	750	665	490

Tabla 7.2. Ciclos de vida en probetas ensayadas

Las diferencias se generan principalmente por el deficiente maquinado de la entalladura de la probeta. Se considera el valor promedio  $\bar{X} = 635$ (ciclos) para realizar las comparaciones.

### 7.2.2. Simulación en Fatigue Advisor

Para lograr simular una carga cíclica de amplitud constante entre 1000 y 4.500 Kgf se asignan factores multiplicadores a la carga aplicada que definen la máxima y mínima amplitud, como se especifica en la Figura 7.12.

The screenshot shows a dialog box with the following settings:

- Life:** Desired Endurance (empty field) cycles
- Loading:**
  - Type: Constant Amplitude
  - Amplitude Type: User-defined
  - Min Load Factor: 0.222222
  - Max Load Factor: 1
- Output:**
  - Plotting Grid: 4
  - Calculate factor of safety

Buttons: OK, Cancel

Figura 7.12. Configuración de la carga

El análisis de fatiga debe enfocarse a la entalladura de la probeta que es donde se inicia la grieta. Al comparar el gráfico de colores del análisis estático con el de fatiga, puede apreciarse que:

- Los ciclos de vida están directamente relacionados con esfuerzos equivalentes Von – Misses.
- El rango de colores en la entalladura está entre los valores de 10 a 604 ciclos (Figura 7.13).

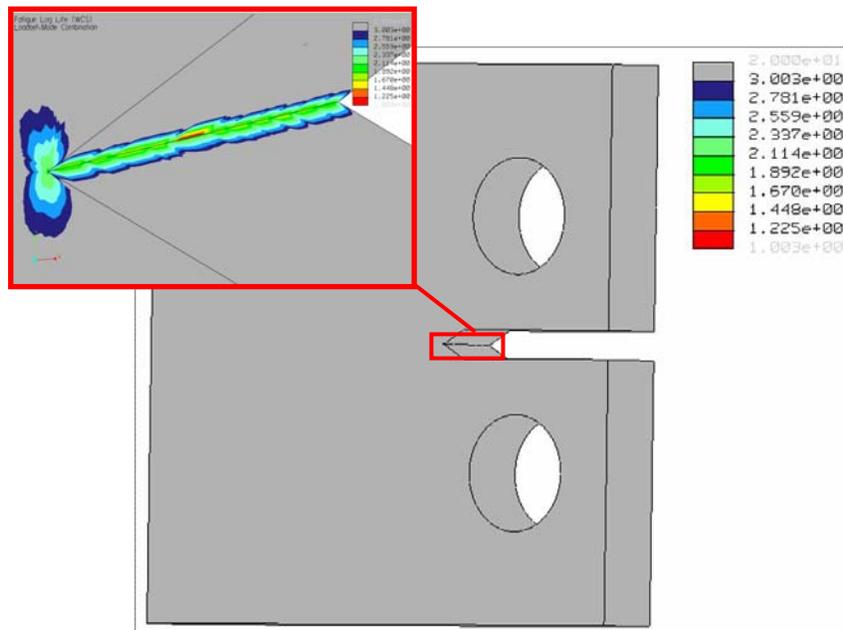


Figura 7.13. Gráficos de vida a fatiga

### 7.2.3. Resumen de resultados

Carga (Kgf)	Empírico (Ciclos)	Pro/E (Ciclos)
1000 – 4.500	635	10 – 604

Tabla 7.3. Resumen de resultados de fatiga

## CONCLUSIONES

Los procedimientos clásicos de diseño de engranajes basan sus cálculos en el límite de resistencia a la fatiga que, junto a un factor de seguridad, debería asegurar una vida infinita del engranaje. Sin embargo, la experiencia y este mismo análisis demuestran que después de una cierta cantidad de ciclos y bajo ciertas condiciones, la falla de fractura por flexión ocurre de forma súbita y catastrófica. Este estudio determina entonces, los ciclos de iniciación de la grieta en un rango de esfuerzos por debajo del límite de resistencia a la fatiga (rango no abarcado por el método  $(S - N)$  tradicional). Esta información es de gran utilidad ya que con ella se puede: a) diseñar un engranaje de manera que opere a una amplitud de carga con la cual la grieta inicial no se genere en la vida útil deseada de éste o b) contar con una información adicional para planificar la inspección de un engranaje.

Para efectuar el análisis de fatiga, se debió realizar un previo análisis estático en Pro/Structure. Los resultados de este análisis presentan valores más elevados que los esfuerzos calculados en la ecuación de esfuerzos a flexión de AGMA (Tabla 6.2). Se utilizan para los cálculos siguientes los resultados de la simulación ya que se asume que los resultados obtenidos del software tienen una mayor precisión que los calculados analíticamente. Este supuesto se basa en que un análisis en elementos finitos con una convergencia de resultados por debajo del 5% utilizando un modelo tridimensional debería entregar un mayor grado de confiabilidad que un cálculo analítico bidimensional. Ambos métodos son lineales (Figura 6.4) por lo que solo pueden utilizarse dentro del rango elástico del material.

El gráfico  $(\varepsilon - N)$  de iniciación de grieta no puede generarse directamente de los resultados de Fatigue Advisor ya que este módulo no entrega como

solución las deformaciones cíclicas, sino solamente los ciclos de iniciación de grieta. Por ende las deformaciones cíclicas deben calcularse analíticamente en base a la teoría del método de deformación – vida y a las deformaciones lineales obtenidas del análisis estático. Las diferencias entre las deformaciones lineales y cíclicas en el rango de cargas analizado, son muy pequeñas por lo que ambas curvas parecieran estar superpuestas (Figura 6.9). Sin embargo estas mínimas diferencias acumuladas por cada ciclo de rotación, llevan a generar la grieta inicial de fatiga (en las simulaciones con mayores cargas) dentro de la vida útil del engranaje. Por ejemplo, con la carga de  $4.500 (N)$  la grieta se inicia a los  $3.9 \times 10^8$  ciclos de operación (Figura 6.12). Esto significa que, a una velocidad de rotación de  $1000 \text{ rpm}$ , este engranaje tiene una duración de 6.500 horas. En otras palabras, la grieta puede iniciarse antes del primer año para un funcionamiento permanente o al segundo año para un turno de 8 horas de operación.

Con el propósito de validar los resultados obtenidos de las simulaciones anteriores, se realizaron simulaciones de ensayos de tracción y fatiga con probetas CT en Pro/Mechanica y se compararon los resultados con ensayos empíricos en laboratorio. La probeta simulada presenta las mismas zonas de concentración de tensiones que pueden observarse en la probeta ensayada empíricamente (Figura 7.8). Lo anterior valida el modelamiento de la probeta en el software. Las diferencias se presentan principalmente en el valor de las tensiones máximas. La probeta simulada se somete a una carga de  $4.500 \text{ Kgf}$  equivalente al límite de fluencia determinado en el ensayo empírico de tracción (Figura 7.5). Los resultados del análisis estático, expresado en un gráfico de colores, muestran un volumen bastante apreciable de material sometido a concentración de esfuerzos en los agujeros, cuyo rango de valores de  $404,4 \text{ MPa}$  a  $808,6 \text{ MPa}$  se aproxima levemente del valor del límite de fluencia encontrado en la bibliografía de  $310 \text{ MPa}$ . Por el contrario, el máximo esfuerzo en el modelo se encuentra en la entalladura con un valor de  $6.468 \text{ MPa}$  el cual

difiere ampliamente del límite de fluencia de la bibliografía. Ahora bien, el volumen de material en la entalladura sometido a esos altísimos esfuerzos es ínfimo. Esto puede ocasionar que la fluencia local no se vea reflejada en la gráfica del ensayo empírico de tracción (Figura 7.5). Por ende, con este tipo de probetas, la lectura del verdadero límite de fluencia de la probeta puede ser engorrosa.

Las diferencias entre resultados se atribuyen principalmente a:

- El valor del límite de fluencia del material encontrado en la literatura proviene de ensayos con probetas estándar de tracción, mientras que el valor determinado en el ensayo empírico de tracción proviene de una probeta estándar para ensayos de fatiga.
- El software utilizado no permite realizar un enmallado fino y controlado en las zonas de interés.
- Las probetas analizadas presentaban un deficiente maquinado de la entalladura lo cual generó distintos valores de límite de fluencia, eligiéndose la gráfica más realista.

Se efectuó entonces el análisis de fatiga en el módulo Fatigue Advisor y se realizaron los ensayos empíricos de fatiga. En los ensayos se utilizaron tres probetas en un rango de carga de 1000 a 4.500 *Kgf* . Los ciclos de iniciación de grieta, considerando una grieta de aproximadamente 1mm de profundidad, difieren entre un ensayo y otro. Estas diferencias (Tabla 7.2) se atribuyeron nuevamente al deficiente maquinado de la entalladura en las probetas y al desajuste periódico de las condiciones iniciales de carga en la máquina de ensayos de fatiga utilizada. La media de los tres ensayos de 635 *ciclos* se aproxima al valor más alto de los resultados de la simulación de 10 a 604 ciclos

medidos sobre la entalladura de la probeta.

Finalmente puede concluirse que, con un software de elementos finitos que posea una mayor flexibilidad en la construcción del enmallado, con un software de fatiga más profesional que permita generar análisis con distintos métodos, con probetas certificadas y una máquina universal de ensayos de fatiga autoajustada electrónicamente, pueden obtenerse resultados más congruentes.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] NORMA CHILENA OFICIAL. 1995. Engranajes – Vocabulario – Parte 1: Definiciones geométricas (NCh 2269/1.Of95). Chile, INN.
- [2] NORTON, R.L. 1999. Diseño de Máquinas. México, Prentice Hall.
- [3] SHIGLEY, J.E. 1983. Teoría de Máquinas y Mecanismos. México, Mc. Graw Hill.
- [4] COY, J.J.; D.P. TOWNSEND; E.V. ZARETSKY. 1985. Gearing. NASA Reference Publication 1152.
- [5] ABDOLI, H. 2005. A Finite Element Approach to Spur, Straight – Bevel and Hypoid Gear Design. Research report in mechanics. Norway, University of Oslo.
- [6] TIMOSHENKO, S.P.; J.M. GERE. 1974. Mecánica de Materiales. México, UTEHA.
- [7] CHANDUPATLA, T.R.; A.D. BELEGUNDU. 1999. Introducción al Estudio de Elementos Finitos en Ingeniería. 2 ed. México, Prentice Hall.
- [8] LUSAS. Theory Manual.
- [9] TOOGOOD, R. 2001. Pro/MECHANICA Structure Tutorial. EE.UU., Schroff Development Corporation.
- [10] PTC. 2003. Understanding Fatigue analysis. Pro/Mechanica Wildfire Documentation.
- [11] GLODEZ, S.; M. SRAML; J. KRAMBERGER. 2002. A Computational Model for Determination of Service Life of Gears. *Int. J. Fatigue*. 24(10): 1013-1020.
- [12] SMITH, K. N.; P. WATSON; T.H. TOPPER. 1970. A Stress-Strain Function for the Fatigue of Metals. *Journal of Materials*. 5(4): 767–778.
- [13] MORROW, J. 1968. Fatigue Design Handbook. *Advances in Engineering*. 4(3.2): 21–29.
- [14] PARK, J.; J. SONG. 1995. Detailed Evaluation of Methods for Estimation of Fatigue Properties. *Int. J. Fatigue*. 17(5): 365-373.
- [15] DIMITROV L.; I. KOVATCHEV. 2003. A Computer Model for Determination of Spur Gear–Teeth Contact Fatigue Life. International Conference “Power Transmissions”.
- [16] SHIGLEY, J.E.; C.R. MISCHKE. 1990. Diseño en Ingeniería Mecánica. 5 ed. México, Mc. Graw Hill.

**ANEXO 1**  
**DETERMINACION DEL LÍMITE DE FATIGA DEL MATERIAL**

### Determinación del diagrama ( $S - N$ ) estimado

Para un SAE 1045 [2]  $S_U = 565 \text{ (N/mm}^2\text{)}$   $S_Y = 310 \text{ (N/mm}^2\text{)}$

donde  $S_U$  es la resistencia última a la tracción y  $S_Y$  es el límite de fluencia del material.

Así reemplazando  $S_U$  en la ecuación (47) y (54) se obtiene el límite de resistencia a la fatiga para  $10^3$  y  $10^6$  ciclos respectivamente

$$S'_e = 0,5 \cdot 565 = 282,5 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$S_m = 0,9 \cdot 565 = 508,5 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

Los factores de reducción del límite a fatiga, para las condiciones consideradas, adoptan los siguientes valores:

- Factor de Carga: Para cargas de flexión

$$C_{carga} = 1$$

- Factor de Tamaño:

La sección transversal de la base del diente corresponde a

$$w = 7 \text{ mm (ancho) y } t = 50 \text{ mm (largo)}$$

El diámetro equivalente para secciones rectangulares corresponde a

$$D_{eq} = \sqrt{0,65 \cdot w \cdot t} = \sqrt{0,65 \cdot 7 \cdot 50} = 15,1 \text{ mm}$$

Si el diámetro equivalente del componente se encuentra dentro de  $6\text{ mm} < D_{eq} < 250\text{ mm}$ , entonces:

$$C_{\text{tamaño}} = 1,189 \cdot D_{eq}^{-0,097} = 1,189 \cdot 15,1^{-0,097} = 0,914$$

- Factor de superficie: Para una superficie maquinada

Acabado Superficial	A	b
Maquinado o estirado en frío	4,51	-0,265

Tabla X. Coeficientes para la ecuación de factor superficial [2].

$$C_{\text{superficie}} = A(S_U)^b = 4,51 \cdot (565)^{-0,265} = 0,841$$

- Factor de temperatura: Para una temperatura de operación  $T \leq 450^\circ\text{C}$ ,

$$C_{\text{temperatura}} = 1$$

Reemplazando los factores calculados anteriormente en la ecuación (50) se obtiene el factor de reducción de resistencia a la fatiga para un 50% de confiabilidad.

$$F_R = 1 \cdot 0,914 \cdot 0,841 \cdot 1 = 0,77$$

- Factor de confiabilidad: Para un nivel de confiabilidad del 90%

$$C_{\text{confiabilidad}} = 0,897$$

Incluyendo  $C_{\text{confiabilidad}}$  al factor  $F_R$  se obtiene el factor de reducción de resistencia a la fatiga para un 90% de confiabilidad.

$$F_{90} = 0,77 \cdot 0,897 = 0,69$$

Reemplazando  $S'e$  y  $F_{90}$  en (49) se obtiene el límite de resistencia a fatiga corregido

$$S_e = 282,5 \cdot 0,69 = 194,78 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

Reemplazando  $S_m$  y  $S_e$  en las ecuaciones (52) y (53)

$$b = -\frac{1}{3} \cdot \log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \log\left(\frac{508,5}{194,78}\right) = -0,1389$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b \quad a = a \log(\log(508,5) - 3 \cdot (-0,1389)) = 1327,48$$

y reemplazando  $b$  y  $a$  en la ecuación (51), se obtiene finalmente la ecuación  $(S - N)$  de vida a fatiga para estados de cargas totalmente reversibles:

$$N = \left(\frac{S_a}{1327,48}\right)^{\frac{1}{-0,1389}}$$

### **Determinación del diagrama $(S - N)$ estimado para esfuerzos promedios**

Considerando el estado de cargas que representa al de un diente de engranaje, donde

- Las cargas a flexión en el tiempo tienen un comportamiento constante de cero a peak

- El esfuerzo promedio tiene la misma amplitud que el esfuerzo alternante

$$\sigma_m = \sigma_a$$

Finalmente utilizando el criterio de Goodman puede corregirse la ecuación  $(S - N)$  de vida a fatiga para estados de cargas totalmente reversibles

$$N = \left( \frac{\frac{\sigma_a \cdot 565}{565 - \sigma_a}}{1327,48} \right)^{\frac{1}{-0,1389}}$$

El límite de resistencia a la fatiga para  $10^6$  ciclos, corregido con el criterio de Goodman finalmente corresponde a

$$10^6 = \left( \frac{\frac{\sigma_a \cdot 565}{565 - \sigma_a}}{1327,48} \right)^{\frac{1}{-0,1389}}, \quad \sigma_a = 144,84 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

**ANEXO 2**  
**GRÁFICOS DE CONVERGENCIA DE ENERGÍA DE**  
**DEFORMACIÓN Y DE ESFUERZOS MÁXIMOS VON – MISSES**

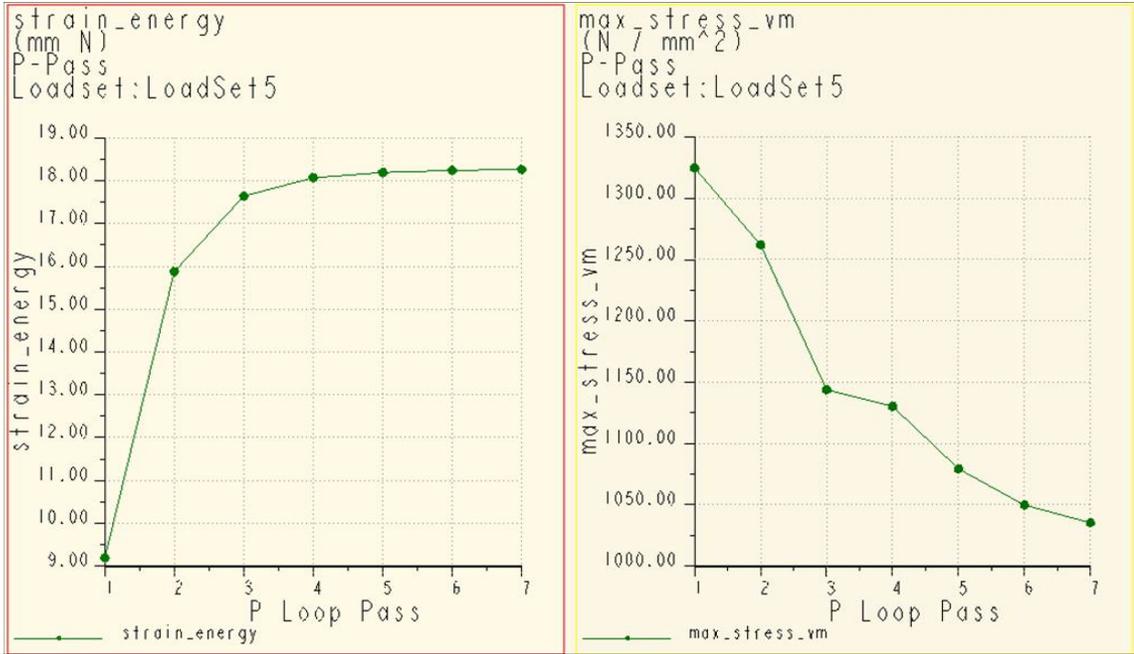


Figura 1. Gráficos de convergencia del diente de engranaje.

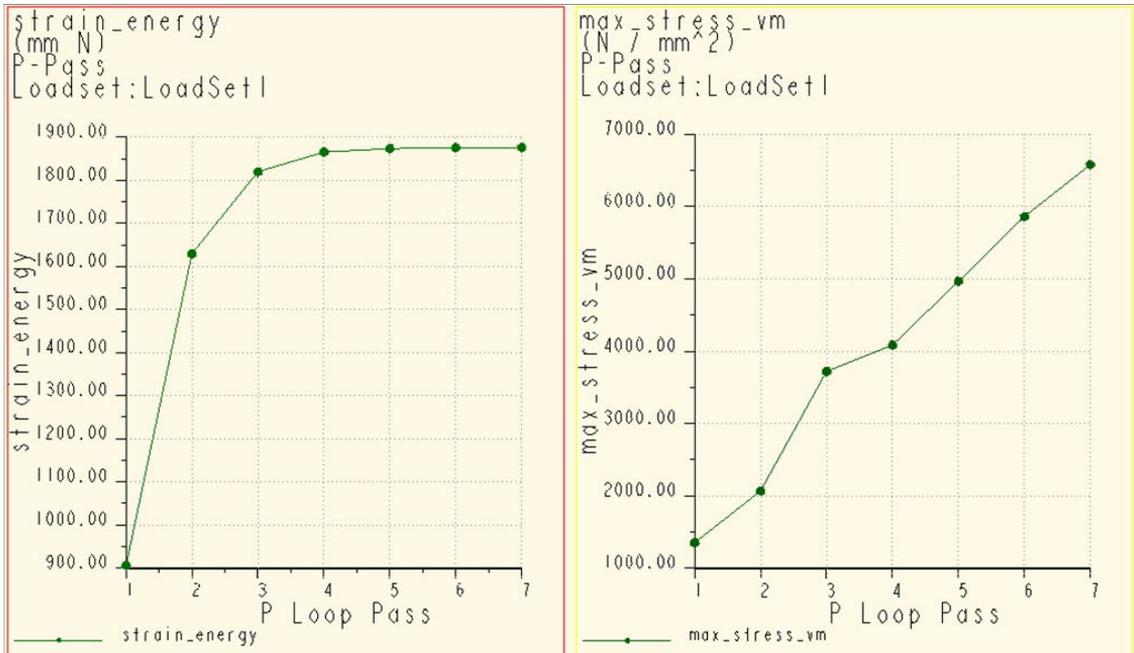


Figura 2. Gráficos de convergencia de la probeta CT.