



# Universidad Austral de Chile

Facultad de Ciencias de la Ingeniería

Escuela de Ingeniería Naval

“ESTUDIO COMPARATIVO DE TENSIONES Y  
DEFORMACIONES EN MAMPAROS DE MATERIALES  
COMPUESTOS.”

Tesis para optar al Título de:

Ingeniero Naval

Mención: Arquitectura Naval.

PROFESOR PATROCINANTE:

Sr.: Richard Luco Salman.

Dr. Ingeniero Naval.

CRISTIAN ALEJANDRO CIFUENTES SALAZAR  
VALDIVIA – CHILE

2007

---

Esta tesis ha sido sometida para su aprobación a la comisión de Tesis, como requisito para obtener el grado de Licenciado en Ciencias de la Ingeniería.

La tesis aprobada, junto con la nota del examen correspondiente, le permite al alumno obtener el título de Ingeniero Naval, mención Arquitectura Naval.

**EXAMEN DE TITULO:**

Nota de presentación (Ponderada) (1) : .....  
Nota de Examen (Ponderada) (2) : .....  
Nota Final de Titulación (1 + 2) : .....

**COMISION EXAMINADORA:**

..... Decano	..... Firma
..... Patrocinante	..... Firma
..... Informante	..... Firma
..... Informante	..... Firma
..... Secretario Académico	..... Firma

**Valdivia,**.....

$$\text{NOTA DE PRESENTACION} = \frac{\text{NC}}{\text{NA}} \times 0.6 + \text{Nota Tesis} \times 0.2$$

$$\text{NOTA FINAL} = \text{Nota de Presentación} + \text{Nota Examen} \times 0.2$$

NC = Sumatoria Notas Curriculum, sin Tesis.

NA = N° de asignaturas cursadas y aprobadas, incluida Práctica Profesional.

---

**DEDICATORIA**

*A mi madre por regalarme la vida y  
entregarme cada día un motivo  
por el cual seguir adelante.*

---

## **AGRADECIMIENTOS**

*Quisiera agradecer a Dios, a mi padre Antonio, mi madre Ana y mi hermana Anita quienes han sido mi pilar durante todos los años de mi vida y especialmente durante mi paso por la universidad, gracias por entregarme su apoyo y estar ahí cada vez que los necesite, el final de esta etapa es un logro nuestro.*

*A Don Milton Lemarie por entregarme siempre la palabra justa en el momento indicado, sin lugar a dudas un modelo a seguir en lo profesional pero más aun en lo personal, gracias por darme la confianza y ayudarme a encontrar mi vocación, a Don Richard Luco por su dedicación, paciencia y entrega por todos y cada uno de sus alumnos, a ambos, gracias por su amistad y por todo aquello que me enseñaron.*

*A todos mis profesores, quienes me entregaron los conocimientos que hoy me llevan a ser un profesional, por su apoyo y confianza, muchas gracias.*

*Y finalmente a mis amigos, a aquellos con quienes he compartido tan gratos momentos, por su cariño y apoyo, más allá del tiempo y la distancia la amistad perdurará.*

---

**INDICE**

	Pág.
Índice	i
Resumen	iv
Summary	v
Introducción	vi
<b>1 CAPITULO I : INTRODUCCIÓN A LOS MATERIALES COMPUESTOS</b>	<b>1</b>
1.1 – Introducción	1
1.2 – Análisis Micromecánico de Láminas.	4
1.2.1 – Materiales Componentes.	5
1.2.2 – Regla de Mezcla – Constantes de Ingeniería.	8
1.2.3 – Tensión y Deformación Axial.	9
1.2.4 – Transformación de Coordenadas y Tensión-Deformación no Axial.	10
1.2.5 – Rigidez no Axial y Conformidad (Matriz de Rigidez Inversa).	11
1.2.6 – Resistencia de una Lámina	12
1.2.6.1 – Criterio de Máxima Tensión.	13
1.2.6.2 – Criterio de Máxima Deformación.	13
1.2.6.3 – Criterio de Falla de Tsai-Wu.	14
1.3 – Análisis de Laminado.	14
1.3.1 – Rigidez de Láminas en el Plano.	15
1.3.2 – Rigidez a la Flexión del Laminado.	16
1.3.3 – Resistencia De Laminados.	18
<b>2 CAPITULO II: VISIÓN GENERAL DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>19</b>
2.1 Planteamiento General del Método	19
2.1.1 – Modelo Matemático.	20
2.1.1.1 – La Teoría de la Elasticidad	20
2.1.1.2 – Concepto de Sólido Elástico.	20
2.1.2 – Discretización del Dominio.	23
2.1.2.1 – Elección del Elemento.	23
2.1.2.2 – Generación de la Malla.	25
2.1.3 – Funciones de Aproximación.	26
2.1.3.1 – Series Polinómicas.	26
2.1.3.2 – Funciones de Forma.	28
2.1.4 – Ecuaciones de Compatibilidad.	29
2.1.5 – Matriz de Rigidez Elemental.	31

2.1.6 – Condiciones de Contorno.	34
2.1.7– Obtención de los Desplazamientos y Tensiones.	34
2.1.8. – Presentación de Resultados.	35
2.2 – Análisis Tridimensional de Tensiones	35
2.2.1 – Funciones de Desplazamiento	35
2.2.2 – Matriz de Deformaciones.	38
2.2.3 – Matriz de Elasticidad.	39
2.3. – Tipos de Análisis Estructural.	40
2.4. – Instrumentos Informáticos.	40
2.5 –Elementos Finitos Para Materiales Compuestos	41
2.5.1 – Elementos Rectangulares para Compuestos Delgados.	42
2.5.2 – Elementos Rectangulares para Compuestos Gruesos.	45
<b>3 CAPITULO III: GENERACION DE MODELO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>47</b>
3.1 – Descripción de la Nave en Estudio	47
3.1.1– Generalidades	47
3.1.2 –Detalles Constructivos de la Nave	48
3.1.3 – Detalles Constructivos y Particularidades de la Zona en Estudio	49
3.2 – Modelación de la Nave	50
3.2.1 –Sistema de Unidades	50
3.2.2 –Sistemas locales y Globales de Coordenadas	50
3.2.3– Material	51
3.3 – El Modelo de Elementos Finitos	51
3.3.1 –Tipo de Elemento	51
3.3.2 – Constantes Reales	52
3.3.3 – Propiedades del Material	53
3.3.4 – Generación del Modelo de Elementos Finitos	54
3.3.5 – Análisis Estático	55
3.3.6 – Cargas a Aplicar	56
3.3.6.1 –Cálculo de Carga por Presión Hidrostática	56
3.3.6.2 –Cálculo de Carga del Mástil	56
3.3.7– Condiciones de Contorno	58
<b>4 CAPITULO IV: ESTUDIO DE PROPUESTAS ESTRUCTURALES EXISTENTES</b>	<b>60</b>
4.1 – Descripción de Propuesta Estructural Presente en la Nave Construida	60
4.1.1 – Generalidades	60
4.1.2 – Características de los Esquemas de Laminado Presentes en la Estructura	61

---

4.1.3 – Modelo de Elementos Finitos	62
4.1.4 – Resultados del Análisis Estático.	63
4.2 – Descripción de Propuesta Estructural Basada en la Literatura Técnica Consultada	68
4.2.1 – Generalidades	68
4.2.2 – Características de los Esquemas de Laminado Presentes en la Estructura	69
4.1.3 – Modelo de Elementos Finitos	69
4.2.4 – Resultados del Análisis Estático.	70
<b>5 CAPITULO V: PROPUESTA ESTRUCTURAL</b>	<b>73</b>
5.1 – Descripción de Nueva Propuesta Estructural Basada en los Resultados Anteriores	73
5.1.1 – Generalidades	73
5.1.2 – Características de los Esquemas de Laminación Presentes en la Estructura	74
5.1.3 – Modelo de Elementos Finitos	74
5.1.4 – Resultados del Análisis Estático.	75
5.1.5 – Resumen y Conclusiones Preliminares de los Resultados Obtenidos en las Tres Propuestas Estudiadas	78
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>79</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>80</b>

## RESUMEN

El presente trabajo compara estados tensionales existentes en estructuras de tipo sándwich, es decir, se componen de un núcleo central y pieles que lo cubren a ambos lados, este material ampliamente es usado en embarcaciones de placer como la que se estudiara.

Específicamente se analizará el comportamiento de la estructura soportante del mástil en un catamarán construido en el material anteriormente mencionado, por estar sometida esta zona a un complejo estado tensional.

El estudio se basa en dos propuestas para el esquema de laminado en el mamparo de soporte, a fin de, comparar la efectividad de ambos desde el punto de vista estructural y, con estos antecedentes, proponer un tercer esquema de laminado que busca una mayor facilidad de construcción frente a los esquemas anteriores y por ende, una disminución en los costos de construcción del mismo, obviamente, manteniendo las tensiones bajo los niveles admisibles.

Todo el estudio será llevado a cabo usando el software de elementos finitos ANSYS.

## SUMMARY

The present work compares states of stress, existent in sandwich type structures, that means, be crowned thoroughly of a nucleus and skins that cover it on both sides, this material it is used in pleasure crafts like the one that was studied.

Specifically, the behavior of the structure supporting the mast is analyzed for a catamaran built in the previously mentioned material, this area be subjected to a complex state of stress.

The study is based on two proposals for the outline of having laminated in the support bulkhead, in order to compare the effectiveness of both from the structural point of view and, with these antecedents, to propose a third outline of laminate that looks for an easiness construction in front of the previous outlines and in consequence, a decrease in construction costs, obviously, maintaining the stress under acceptable levels.

The whole study will be carried out using the software of finite elements ANSYS, this based by the proven effectiveness of the software in problems associated to sandwich structures.

## INTRODUCCION

La tesis que a continuación se muestra consiste en el estudio, mediante el método de elementos finitos, de una zona de la estructura de un catamarán de placer, el cual cuenta con propulsión mixta, es decir, posee tanto motores propulsores y sus correspondientes hélices, como velas, esta construido en materiales compuestos y específicamente se estudiarán las tensiones que se generan en el mamparo sobre el cual descansa el mástil de la embarcación.

Es de interés el análisis de esta zona debido al estado complejo de cargas al que se ve sometida, puesto que sobre las cargas producto de la flexión transversal y la torsión, ambas situaciones características en embarcaciones multicascos, se suma la flexión en el mamparo, generada por la acción del mástil sobre el mismo, es por este sistema complejo de cargas que diversos diseñadores han propuesto distintas soluciones estructurales para la zona en cuestión, desde laminados complejos y de alto costo, hasta vigas monolíticas que refuerzan el mamparo y que implican una construcción compleja con un mayor uso de horas hombre.

Frente a la situación antes descrita es que se analizarán las propuestas mostradas, a fin de conocer el comportamiento de la estructura y se busca proponer una tercera solución estructural que, sin descuidar los niveles admisibles de tensiones y deformaciones, sea, en lo posible, más económica tanto en materiales como en horas hombre.

Para llevar a cabo el estudio se utilizará el software de elementos finitos ANSYS, haciendo, previamente una revisión completa del método de los elementos finitos y de aquello relacionado con el uso y comportamiento de los materiales compuestos que sea de interés para este trabajo de tesis.

Finalmente se muestra la generación del modelo de elementos finitos, el cual consiste en un bloque de la nave en estudio, las cargas a aplicar y las condiciones de borde con lo cual se completa la fase de preproceso que implica cualquier estudio de este tipo; con los resultados obtenidos se comparan los diseños ya planteados y se plantea una nueva solución estructural, con todos los datos mencionados anteriormente se obtendrán las conclusiones finales que son el motivo de este trabajo, es decir obtener una optimización de la estructura presentada.

## CAPÍTULO I

### INTRODUCCION A LOS MATERIALES COMPUESTOS

Las exigencias de las modernas construcciones, tales como bajos costos, una mejor estética, alto rendimiento y larga vida útil, han conducido a la industria a desarrollar materiales más avanzados que satisfagan las necesidades de hoy. Tradicionalmente, materiales estructurales, tales como madera, acero y concreto, han sido combinados para formar miembros estructurales de mayor calidad. Una parte estructural construida por una combinación de diferentes materiales es considerada una pieza de MATERIAL COMPUESTO. El rendimiento de tales piezas es generalmente superior al rendimiento de cada uno de los componentes. El concreto reforzado es un compuesto convencional que ha sido usado satisfactoriamente en una variedad de estructuras. Otras combinaciones como acero-concreto o madera-acero, son también usadas comúnmente en estructuras modernas.

#### **1.1 – INTRODUCCIÓN.**

Una nueva generación de materiales basados en subproductos del petróleo y madera ha evolucionado desde la introducción de los plásticos. Ellos son fáciles de procesar, resistentes a la corrosión y además livianos, pero tienen una baja rigidez y resistencia comparada con los materiales convencionales. Estos plásticos pueden ser eficientemente reforzados con fibras altamente resistentes tales como la de vidrio, aramida y carbón. Usando tecnología de materiales compuestos, se pueden crear materiales que satisfacen las mayores necesidades en la construcción. Las propiedades de los materiales pueden ser creadas de acuerdo a las necesidades específicas, el uso excesivo de componentes se puede evitar y por tanto el rendimiento puede ser maximizado sin un alto incremento en el costo de la construcción. Todos estos esfuerzos han dejado estructuras más livianas y delgadas. Las reglas básicas de seguridad asociadas a la tensión máxima posible, son ahora acompañadas por la carga crítica de pandeo pues la falla de una estructura delgada es más probable que sea regida por la inestabilidad geométrica que por falla de material. Durante años la mayoría de la investigación y desarrollo ha sido enfocada sobre el comportamiento estructural en los miembros de acero, madera y concreto.

En todos los casos los materiales están asumidos como homogéneos e isotrópicos y las propiedades como el módulo de elasticidad  $E$ , la relación de Poisson  $\nu$ , y el módulo de corte  $G$ , son constantes y el único parámetro es la geometría de la

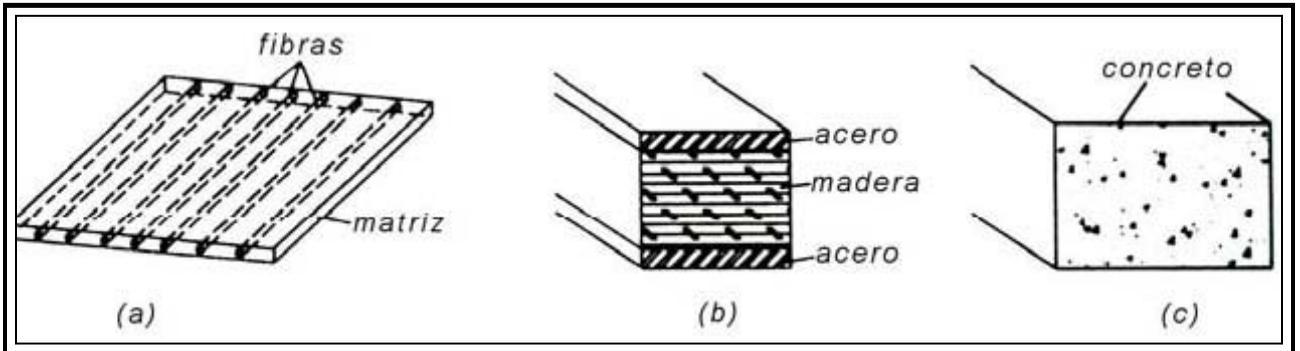
estructura. Hay casos donde estos parámetros son variables, como la tensión residual en el acero, comportamiento anisotrópico de la madera y grietas en el concreto reforzado, que deben ser consideradas y realizarse un estudio más exacto.

Sin embargo las diferencias entre un análisis riguroso y uno simplificado son usualmente pequeñas. El uso de materiales completamente diferentes combinados con bajo peso y miembros estructurales delgados requiere un completo y preciso análisis que puede hacerse más complicado si se usan materiales anisotrópicos.

Los materiales pueden ser combinados en muchas formas para fabricar el material compuesto deseado. El comportamiento estructural de una pieza compuesta está regido no sólo por la geometría o el tipo de carga, también por las propiedades del material. La combinación de materiales se decide de acuerdo a las necesidades estructurales y a la relativa importancia de una variedad de propiedades como: resistencia, peso, resistencia a la corrosión, rigidez, resistencia a la abrasión, resistencia a la fatiga, expansión termal, propiedades electro-magnéticas, comportamiento a altas temperaturas, conductividad térmica, aislamiento acústico y estética del material. De este modo usando técnicas de optimización, la combinación para el material deseado es decidida para cada aplicación específica.

En un sistema compuesto, dos o más de los materiales componentes son combinados en un cuerpo sólido. En cada combinación, uno de los materiales componentes es llamado matriz. Las matrices están usualmente caracterizadas por sus relativamente bajas propiedades físicas y proveen de la cohesión con los otros materiales componentes. El otro material puede ser cualquier fibra continua, fibras tejidas, fibras en forma aleatoria, o partículas que hacen el rol de refuerzo. Otra posibilidad es combinar capas de diferentes materiales (compuestos híbridos). En todos los casos el resultado de la combinación es un nuevo material con características y propiedades diferentes a las de sus materiales constitutivos.

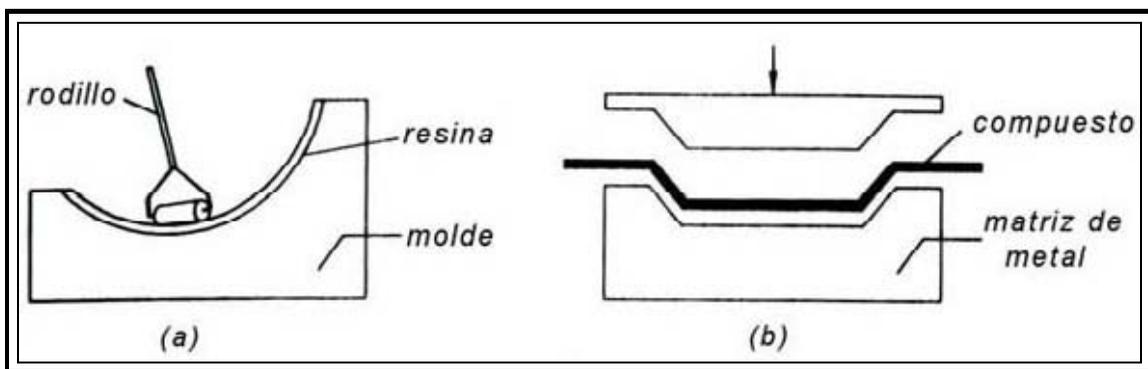
De acuerdo a la combinación de materiales, hay tres categorías básicas de materiales compuestos: *los compuestos de fibra* que consiste de fibras en una matriz, *el compuesto laminado* que son capas laminadas de de varios materiales, y *los compuestos particulares* que están compuestos de partículas en una matriz.



**FIGURA 1.1.1 (a) FIBRAS, (b) LAMINADO, (c) COMPUESTO PARTICULAR**

Por ejemplo, la fibra de vidrio colocada en una matriz epóxica forma una fibra compuesta, figura 1.1.1(a). La viga mostrada en la figura 1.1.1 (b) está hecha de capas de madera y acero conectadas una a la otra en la superficie interlaminar y es una viga laminada compuesta. Un compuesto laminado es también obtenido por la combinación de capas de fibras con diferentes orientaciones. Por último el concreto no reforzado es un ejemplo representativo de un compuesto particular, figura 1.1.1. (c).

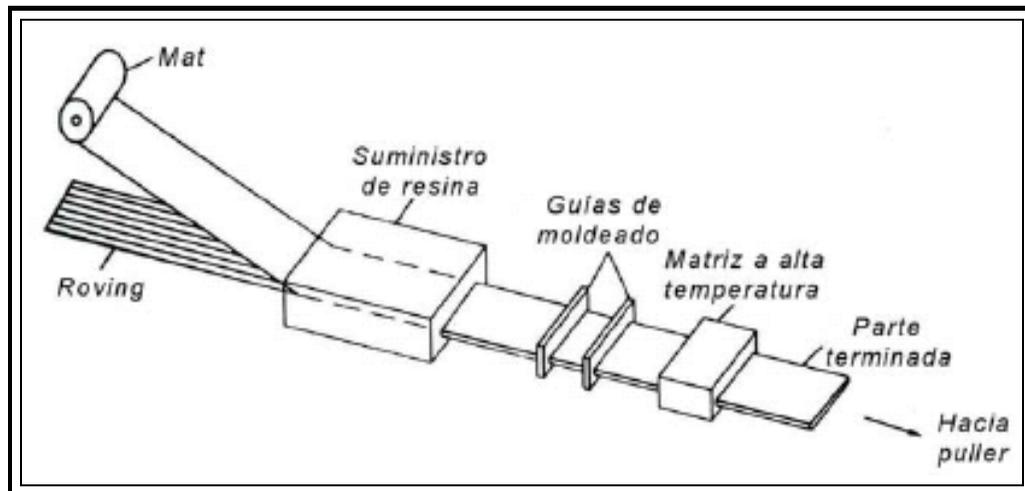
Dependiendo del tipo de material compuesto y de su aplicación estructural, se han desarrollado numerosos procesos de fabricación, ellos pueden ser categorizados en procesos *continuos* y *no continuos*. Un proceso no continuo es empleado para fabricar formas de estructuras complejas como aviones o partes de vehículos que son producidas con la ayuda de un molde abierto o uno de compresión con matriz de acero, como los mostrados en las siguientes figuras.



**FIGURA 1.1.2 (a) MOLDE ABIERTO, (b) FABRICACIÓN CON MOLDE DE COMPRESIÓN**

En un proceso continuo, las partes estructurales son producidas relativamente rápidas pasando a través de una matriz a alta temperatura para formar un sólido de forma libre o de una sección deseada como vigas I, vigas de cajón, secciones acanaladas y muchas otras. Estos procesos continuos son ampliamente usados para

producir formas constantes de secciones. Un proceso continuo usado comúnmente es el proceso “pultrusion”, que está esquematizado en la siguiente figura.



**FIGURA 1.1.3 PROCESO DE PULTRUSION**

A causa del comportamiento anisotrópico del material y a su bajo módulo de elasticidad, grandes deflexiones ocurren probablemente en los miembros del compuesto que puede derivar en un comportamiento geométrico no lineal. Así también, pequeñas imperfecciones tales como deflexiones iniciales y curvaturas, discontinuidad de material o anomalías debido a defectos de manufactura, pueden jugar un rol significativo en el comportamiento de una estructura compuesta.

Una vez que son seleccionados los componentes, el material compuesto puede ser fabricado a través de varios procedimientos. Un proceso común forma láminas como un ensamble de varias capas (láminas o pliegues) manteniéndolas juntas. Ahora se examinará el comportamiento de tales materiales.

## **1.2 – ANÁLISIS MICROMECAÍNICO DE LÁMINAS.**

Las partes estructurales hechas de materiales compuestos pueden ser categorizadas como *compuestos de fibra*, *compuestos laminados* y *compuestos particulares*. Los compuestos laminados consisten en capas de materiales homogéneos, cada uno caracterizado por sus propias propiedades mecánicas, o alternativamente de capas de fibra compuesta. Es muy importante estudiar primero el comportamiento del compuesto desde el punto de vista micromecánico, esto es el comportamiento del laminado. El laminado más común hecho de fibra compuesta es presentado en detalle.

La primera tarea en el análisis es definir la relación tensión-deformación así como la fuerza de la lámina compuesta de acuerdo al uso de tales propiedades para predecir el comportamiento estructural del producto final, el laminado.

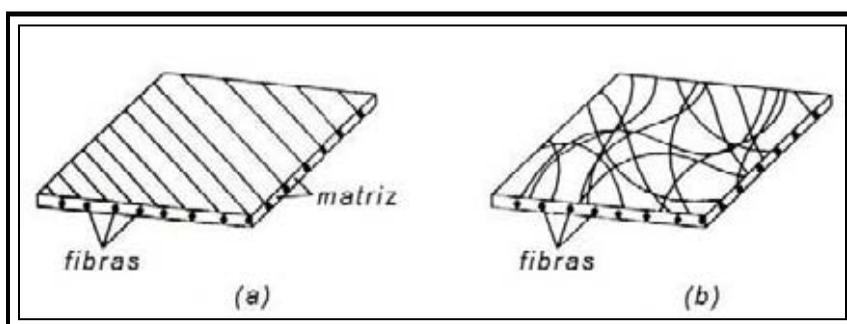
### 1.2.1 – MATERIALES COMPONENTES.

Las láminas son fabricadas por la combinación de dos o más materiales llamados matriz y fibras. Las fibras son usualmente más fuertes y se caracterizan por sus altos valores de elasticidad, de este modo juegan el rol de refuerzos. La matriz es un material más débil con propiedades elásticas menores en relación con las fibras. La matriz mantiene juntas a las fibras, transfiere y distribuye las cargas externas y protege a las fibras de daños exteriores. El producto final de una combinación fibra-matriz es un cuerpo sólido que retiene y extiende las propiedades de sus materiales constitutivos.

Las fibras pueden ser hechas de vidrio, carbón, polímeros o metales. La *fibra de vidrio E* está especialmente diseñada para una alta resistencia y es usada extensamente en la industria de los compuestos. El *carbón* y las *fibras de grafito* también tienen una alta resistencia y se han vuelto más económicas tras las últimas décadas como resultado de la demanda y la capacidad de producción. Las fibras de polímeros, como la *aramida*, también pueden ser usadas en los compuestos.

Una matriz puede ser hecha de polímeros, metales o cerámicos. Los materiales más ampliamente usados como matrices en los compuestos modernos son polímeros como los epóxicos, poliéster, viniléster y algunos otros, generalmente llamados plásticos.

Las fibras se pueden orientar en una matriz de diferentes formas. Cuando las fibras son continuas y tienen la misma dirección, el compuesto es llamado *unidireccional*. Si las fibras están orientadas al azar en la matriz, el compuesto es llamado *aleatorio*, estas fibras pueden no ser continuas. Ejemplos de compuestos unidireccionales y aleatorios están mostrados en el esquema siguiente:



**FIGURA 1.2.1 (a) UNIDIRECCIONAL, (b) COMPUESTO ALEATORIO**

En fibras compuestas cada uno de los materiales componentes, por ejemplo fibras y matriz, es considerada como homogéneo e isotrópico. Las propiedades elásticas y resistencia para algunos de los componentes comúnmente usados en los compuestos son dadas a continuación. Específicamente la tabla 1.2.1 enumera las propiedades elásticas de las fibras más comunes mientras que la tabla 1.2.2 enumera las propiedades de las matrices de polímeros más usadas.

<i>Fibras</i>	$E$ (Gpa)	$\nu$	$G$ (Gpa)	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )
Vidrio-E	73	0.22	30	24.4
Vidrio-S	85.4	0.2	35.6	24.4
Carbón	220	0.2	9	17.6
Aramida	152	0.35	2.9	14.4

**TABLA 1.2.1 PROPIEDADES ELASTICAS DE LAS FIBRAS MÁS COMUNES (ref. 4).**

<i>Matriz</i>	$E$ (Gpa)	$\nu$	$G$ (Gpa)	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )
Epoxica	3.45	0.35	1.28	11.95
Vinilester	3.38	0.24	1.38	12.22
Poliester	3.25	0.36	1.2	11.95

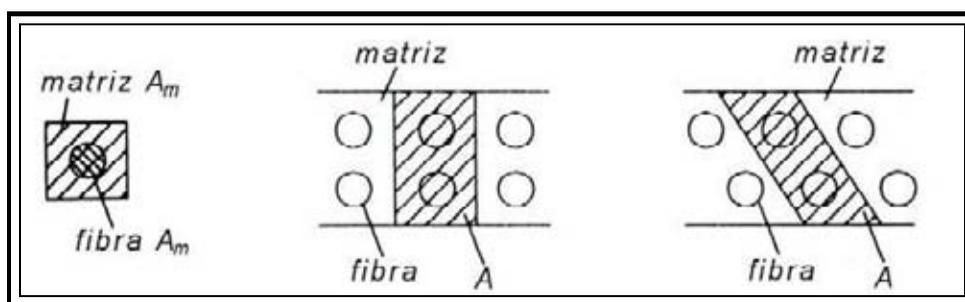
**TABLA 1.2.2 PROPIEDADES ELASTICAS DE LAS MATRICES MÁS COMUNES (ref. 4).**

Los materiales componentes son usualmente considerados homogéneos e isotrópicos y por tanto se requieren dos constantes elásticas para cada uno, pueden ser el módulo de elasticidad  $E_f$  y la relación de Poisson  $\nu_f$ , o el módulo de corte  $G_f$  para las fibras y  $E_m$ ,  $\nu_f$  o  $G_m$  para la matriz respectivamente. Para determinar las propiedades elásticas de una lámina compuesta de fibras, debemos saber el aporte de cada material al producto final. Esto es determinado por la *fracción de volumen de fibras*  $V_f$ , que es el porcentaje de fibra en una unidad de volumen representativo. Las

fibras pueden ser arregladas en una matriz de diferentes formas. Para compuestos unidireccionales, se examina un plano normal a la sección de dirección de la fibra para obtener una sección representativa de área  $A$ , donde el área de las fibras es  $A_f$ , y el área de la matriz es  $A_m$ . La fracción de volumen de fibra es determinada por la relación:

$$V_f = \frac{A_f}{A} \quad (1.2.1)$$

Donde  $A = A_f + A_m$ . La idea del volumen representativo o área en un compuesto de fibras es dada en la figura 1.2.2 para varios tipos de arreglos en una matriz.



**FIGURA 1.2.2 ÁREA REPRESENTATIVA PARA UN COMPUESTO DE FIBRAS.**

Así, para un compuesto unidireccional para el cual los materiales componentes han sido seleccionados, podemos determinar las propiedades del material usando diferentes aproximaciones. A esta altura, debió ser notado que cualquier propiedad derivada matemáticamente debe estar sujeta a una cuidadosa verificación experimental. Dos aproximaciones básicas son presentadas en la micromecánica de los compuestos: *la aproximación mecánica del material a la rigidez* que está basada en la teoría clásica de resistencia de materiales para comportamientos combinados de los materiales componentes, y *la aproximación elástica a la rigidez*, que está basada en los principios de energía variacional de la teoría clásica de la elasticidad, para determinar los límites superiores e inferiores de rigidez para un lámina. La aproximación mecánica a la rigidez es presentada a continuación. El método entrega suficiente precisión para la mayoría de las aplicaciones en compuestos unidireccionales.

### 1.2.2 – REGLA DE MEZCLA – CONSTANTES DE INGENIERÍA.

La regla de mezcla es la más simple regla lineal para la relación fracción de volumen entre una lámina compuesta y las propiedades de los componentes. Considere un plano en el sistema coordenado 1–2 (ver figura 1.2.3), donde las fibras son paralelas al eje 1 correspondiéndole la dirección longitudinal. Nótese que  $E_1$  es el módulo de elasticidad longitudinal del compuesto,  $E_2$  es el módulo transversal de elasticidad,  $\nu_{12}$  la relación de Poisson y  $G_{12}$  el módulo de corte en el plano 1–2. El material es isotrópico transversalmente y sus propiedades elásticas  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  y  $G_{12}$  son las llamadas *Constantes de Ingeniería*. La expresión de la regla de mezcla para las propiedades elásticas de un compuesto está dadas por:

$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E_m \quad (1.2.2)$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{(1 - V_f) E_f + V_f E_m} \quad (1.2.3)$$

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m \quad (1.2.4)$$

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{(1 - V_f) G_f + V_f G_m} \quad (1.2.5)$$

Los valores de  $E_2$  y  $G_{12}$  dados en las ecuaciones (1.2.3) y (1.2.5) son usualmente un límite inferior del módulo de corte y módulo transversal y se deben llevar a cabo análisis experimentales para predecir valores más precisos.

Para fibras distribuidas aleatoriamente en una matriz como en la figura 1.2.1. (b), los compuestos se comportan como materiales isotrópicos en el plano, para los cuales las propiedades del material pueden ser determinadas por la siguiente relación semi-empírica:

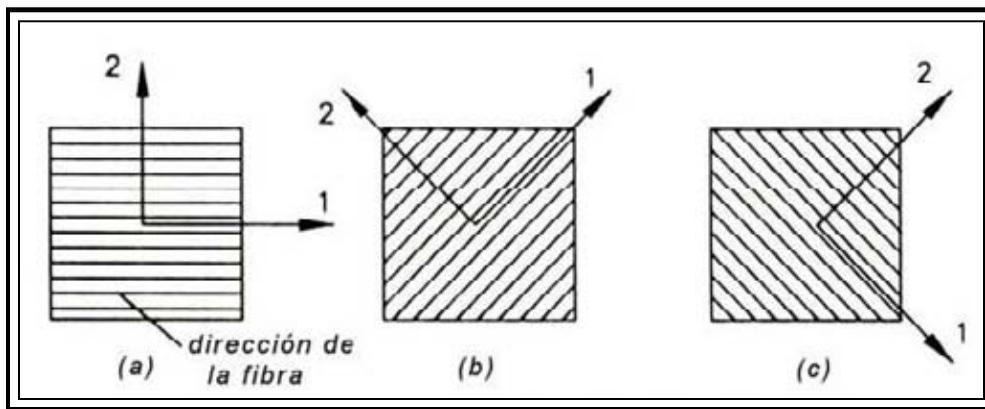
$$E = \frac{3}{8} E_1 + \frac{5}{8} E_2 \quad (1.2.6)$$

$$G = \frac{1}{8} E_1 + \frac{1}{4} E_2 \quad (1.2.7)$$

El módulo  $E_1$  y  $E_2$  en la ecuación (1.2.6) y (1.2.7) puede ser calculado de la ecuación (1.2.2) y (1.2.3) respectivamente, mientras que la relación de Poisson  $\nu$  está determinada por la conocida relación  $\nu = (E/2G) - 1$  válida para materiales isotrópicos.

### 1.2.3 – TENSIÓN Y DEFORMACIÓN AXIAL.

Tras la determinación de las constantes de ingeniería  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  y  $G_{12}$  la relación tensión-deformación correspondiente al sistema axial 1-2 está definida para cualquiera de las tres orientaciones mostradas en la figura 1.2.3.



**FIGURA 1.2.3 SISTEMA AXIAL PARA UNA LÁMINA DE FIBRAS: (a), (b), (c) MUESTRAN LA ORIENTACIÓN DE LA FIBRA.**

Si las fibras están alineadas a lo largo del eje 1, el sistema 1-2 es llamado axial o material axial, y las relaciones correspondientes son llamadas tensión-deformación axiales. Estas relaciones pueden ser expresadas en términos de la *matriz de rigidez*  $[Q]$  y de la *matriz de conformidad*  $[S]$ , dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.2.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.2.9)$$

Donde  $[S] = [Q]^{-1}$ .

Los coeficientes de rigidez  $Q_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 6$  están dados por:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \nu_{12}Q_{22} = \nu_{21}Q_{11}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (1.2.10)$$

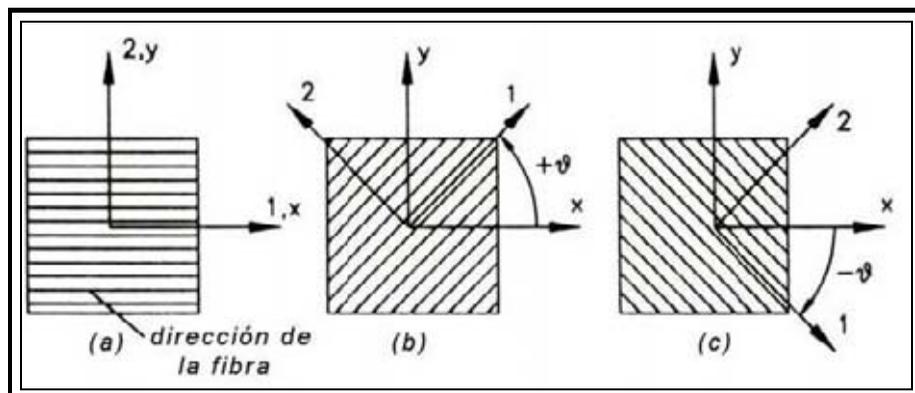
Donde  $\nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1$ . Los componentes axiales de la rigidez  $Q_{16}$  y  $Q_{26}$  son cero, porque los compuestos unidireccionales son transversalmente isotrópicos y no existe el acoplamiento de extensión de corte. El componente de conformidad  $S_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 6$  está dado por:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (1.2.11)$$

#### 1.2.4 – TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS Y TENSIÓN-DEFORMACIÓN NO AXIAL.

Considere un sistema de coordenadas  $x$ - $y$  orientado a  $0^\circ$  respecto al sistema axial 1-2. El sistema  $x$ - $y$  es llamado no axial. El sistema no axial y la convención de signos para el ángulo está ilustrado en la figura 1.2.4.



**FIGURA 1.2.4 ORIENTACIÓN AXIAL Y NO AXIAL: (a), (b), (c) MUESTRAN LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS**

El sistema de coordenadas 1-2 para el material no siempre coincide con el sistema estructural x-y y por tanto tensiones y deformaciones expresadas en un sistema axial deben ser transformadas a una nueva configuración no axial. Esto es un problema puramente geométrico y las tensiones pueden ser determinadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.2.12)$$

mientras que la transformación de la deformación puede ser determinada por :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.2.13)$$

Donde:  $m = \cos(\theta)$  y  $n = \sin(\theta)$

### 1.2.5 – RIGIDEZ NO AXIAL Y CONFORMIDAD (MATRIZ DE RIGIDEZ INVERSA).

Para un sistema no axial, la relación tensión-deformación de la ecuación (1.2.8) se vuelve:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.2.14)$$

Donde los términos de acoplamiento de extensión de corte  $Q_{ss}$  y  $Q_{ys}$  no son cero.

Combinando las relaciones de tensión-deformación axial y no axial (1.2.8) y (1.2.14) con las ecuaciones de transformación (1.2.12) y (1.2.13) y resolviendo para los componentes de rigidez en el sistema no axial, obtenemos las ecuaciones de transformación para los componentes de rigidez:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{xs} \\ Q_{ys} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix} \quad (1.2.15)$$

Las ecuaciones de transformación anterior son válidas cuando la transformación es realizada desde un sistema axial 1-2 a cualquier sistema no axial x-y. De igual forma la relación de tensión-deformación en términos de conformidad en x-y, está dada por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{xs} & S_{ys} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.2.16)$$

Las ecuaciones de transformación para los componentes de conformidad pueden ser derivados de manera similar y están dados por:

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \\ S_{ss} \\ S_{xs} \\ S_{ys} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -m^2n^2 \\ 4m^2n^2 & 4m^2n^2 & -8m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ 2m^3n & -2mn^3 & 2(mn^3 - m^3n) & mn^3 - m^3n \\ 2mn^3 & -2m^3n & 2(m^3n - mn^3) & m^3n - mn^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{66} \end{Bmatrix} \quad (1.2.17)$$

### 1.2.6 – RESISTENCIA DE UNA LÁMINA.

La resistencia de una lámina es examinada con la ayuda del criterio de falla. Los criterios más ampliamente usados son: *tensión máxima*, *deformación máxima* y algunos *criterios cuadráticos*. Los criterios son mayormente empíricos, pero ellos aún son muy importantes en diseño y optimización de materiales compuestos.

El criterio de falla está desarrollado con respecto a un sistema de coordenadas axial. Usando la transformación de coordenadas para la tensión y deformación (ver sección 1.2.4) es fácil obtener el criterio de falla para una lámina no axial. Para una lámina compuesta por fibras unidireccionales, los siguientes valores de resistencia pueden ser obtenidos de simples pruebas de laboratorio:

---

X	=	Resistencia a la tensión longitudinal.
X'	=	Resistencia a la compresión longitudinal.
Y	=	Resistencia a la tensión transversal.
Y'	=	Resistencia a la compresión transversal.
S	=	Resistencia al corte.

#### 1.2.6.1 – Criterio de Máxima Tensión.

Según el criterio de máxima tensión, la falla ocurre cuando a lo menos una de las siguientes relaciones no es satisfecha:

$$X' < \sigma_1 < X \quad (1.2.18a)$$

$$Y' < \sigma_1 < Y \quad (1.2.18b)$$

$$|\tau_{12}| < S \quad (1.2.18c)$$

#### 1.2.6.2 – Criterio de Máxima Deformación.

El criterio de máxima deformación se puede desarrollar a partir de la ecuación (1.2.18) usando la relación lineal de tensión-deformación, y está expresado como:

$$\frac{X'}{E_1} < \epsilon_1 < \frac{X}{E_1} \quad (1.2.19a)$$

$$\frac{Y'}{E_2} < \epsilon_2 < \frac{Y}{E_2} \quad (1.2.19b)$$

$$|\gamma_{12}| < \frac{S}{G_{12}} \quad (1.2.19c)$$

La falla ocurre si cualquiera de las ecuaciones (1.2.19) no es satisfecha. Ningún criterio de máxima tensión o máxima deformación incluye alguna interacción entre los componentes de la tensión o deformación. Este efecto está incluido en el criterio cuadrático de Von Mises para materiales isotrópicos.

### 1.2.6.3 – Criterio de Falla de Tsai-Wu.

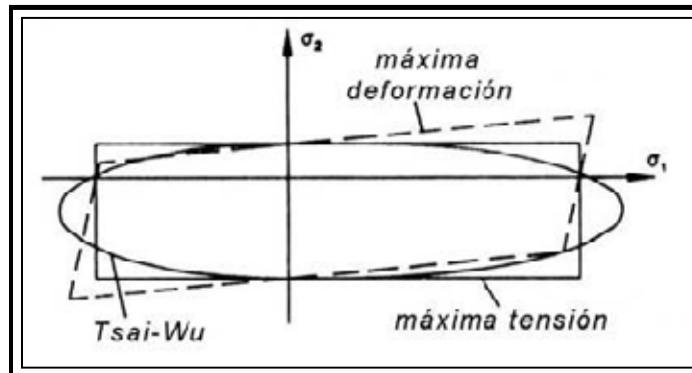
Uno de los criterios cuadráticos más usados es el de Tsai-Wu. Para una lámina ortotrópica bajo tensión en el plano el criterio de Tsai-Wu está expresado por:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_{21}^2 < 1 \quad (1.2.20a)$$

Donde los coeficientes  $F_i$  y  $F_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) están dados por:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X'} & , & & F_2 &= \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \\ F_{11} &= \frac{1}{XX'} & , & & F_{22} &= \frac{1}{YY'} \\ F_{12} &= -\sqrt{F_{11}F_{22}} & , & & F_{66} &= \frac{1}{S^2} \end{aligned} \quad (1.2.20b)$$

El material ha fallado cuando la ecuación (1.2.20a) no es satisfecha. Otros criterios cuadráticos como el de Hill, Tsai-Hill, y Tsai-Hahn son similares al criterio de Tsai-Wu. Las desigualdades entre los criterios de tensión máxima, deformación máxima y el criterio cuadrático de Tsai-Wu expresado en el espacio  $\sigma_1 - \sigma_2$  son ilustradas en la figura 1.2.5.



**FIGURA 1.2.5 CRITERIO DE FALLA PARA UNA LÁMINA UNIDIRECCIONAL EN EL ESPACIO DE TENSIÓN**

### 1.3 – ANÁLISIS DE LAMINADO.

Un laminado consiste en dos o más capas perfectamente unidas o plegadas. La unión es infinitesimalmente delgada y no hay deformación por corte, lo cual implica que los desplazamientos son continuos a través de las interfaces del laminado, y las capas no pueden resbalar una sobre otra. Como resultado, el laminado actúa como una capa

simple de material con propiedades combinadas. Las capas componentes pueden ser del mismo o diferentes combinaciones de material, además la orientación también puede variar. Usualmente el laminado compuesto está construido con capas unidireccionales del mismo material pero está orientado relativamente de diferentes maneras una capa respecto de la otra.

Numerosas combinaciones pueden ser aplicadas a la orientación de capas así como los materiales componentes. Cuando las capas están compuestas del mismo material componente la orientación así como la posición de cada una en el laminado de todas formas necesita ser descrita. El arreglo de las capas está especificado por la convención del *código de laminado* el cual describe la *secuencia de apilamiento* de capas. Según este código, la numeración comienza desde la superficie inferior del laminado y continua hacia la capa superior.

Los laminados que son simétricos respecto de su plano medio también son conocidos como laminados balanceados. En la práctica, es muy usado considerar laminados balanceados, ya que están caracterizados por su comportamiento ortotrópico.

### 1.3.1 – RIGIDEZ DE LÁMINAS EN EL PLANO.

La relación tensión-deformación en un sistema axial puede ser definida por cada lámina usando al procedimiento descrito previamente. Ahora, la transformación de la relación tensión-deformación está determinada para cada capa desde la secuencia de apilamiento y el código de laminado.

Usando la relación de tensión-deformación en una capa individual, podemos llegar a dicha relación para el laminado que relaciona las resultantes de tensión  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  a la deformación de la superficie media  $\epsilon_x^0$ ,  $\epsilon_y^0$  y  $\gamma_{xy}^0$  en  $z = 0$ , esto es:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (1.3.1)$$

Los términos de rigidez planar son función de los componentes de la rigidez, el espesor de las capas y la secuencia de apilado y son dados por:

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^n Q_{ij}^K * t_K \quad , \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (1.3.2)$$

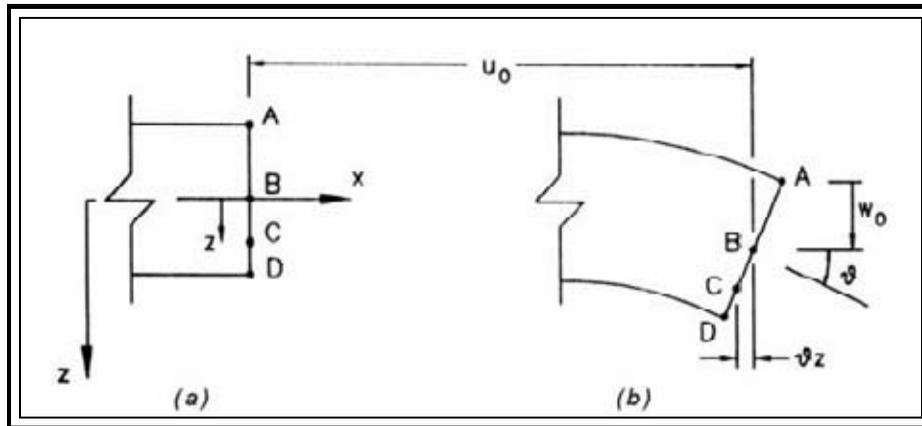
Donde  $Q_{ij}^K$ , es la rigidez transformada desde la ecuación (1.2.14), y  $t_k$  es el espesor de la  $k$ -ésima capa y  $n$  es el numero total de capas en el laminado.

### 1.3.2 – RIGIDEZ A LA FLEXIÓN DEL LAMINADO.

Muchas partes estructurales hechas de materiales compuestos, tales como placas o cáscaras, se comportan de manera eficiente a la flexión. Algunas teorías han sido desarrolladas para modelar el comportamiento a la flexión de los compuestos laminados. La más popular es *la teoría clásica de laminación (TCL)*, análoga a la teoría clásica para flexión de placas. La TCL está basada en las siguientes consideraciones:

- El laminado es delgado.
- La distribución de deformación es lineal en la dirección del espesor
- Las deformaciones perpendiculares a la superficie media son despreciables.
- La deformación por corte fuera del plano es cero.

El acuerdo para la flexión de la TCL es mostrada esquemáticamente en la siguiente figura:



**FIGURA 1.3.1 COMPUESTO LAMINADO EN FLEXIÓN: (a) POSICIÓN ORIGINAL, Y (b) POSICIÓN DEFORMADA**

Según la TCL, sólo las tres deformaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  producen trabajo, mientras que todas las otras son cero. Es más, la deformación total puede ser expresada como función de la curvatura y deformación del plano medio, esto es:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.3.3)$$

Donde el índice cero denota valores en la superficie media del laminado y las curvaturas  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ , están dadas por las ecuaciones (1.1.3). Sustituyendo la ecuación (1.3.3) en (1.2.14) obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{x5} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{y5} \\ Q_{x5} & Q_{y5} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.3.4)$$

La ecuación (1.3.4) integrada capa por capa sobre el espesor del laminado  $h$  resulta en la relación general tensión-deformación para laminados, esto es:

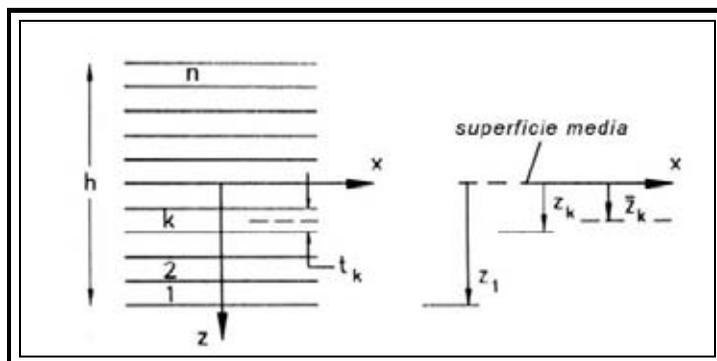
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.3.5)$$

La ecuación (1.3.5) relaciona la tensión y el momento resultante de la deformación y la curvatura. El término  $A_{ij}$  fue derivado en la sección 1.3.1 ecuación (1.3.2). La ecuación (1.3.5) implica que, en general, hay acoplamientos desarrollados en laminados entre los modos de flexión y en el plano, por ejemplo, una tensión axial puede producir curvaturas y el momento de flexión puede producir deformaciones axiales. Este comportamiento complejo caracteriza a los materiales anisotrópicos. Los términos  $B_{ij}$  y  $D_{ij}$  son dados en forma explícita a continuación:

$$B_{ij} = \sum_{K=1}^n Q_{ij}^K * t_K * z_K \quad (1.3.6)$$

$$D_{ij} = \sum_{K=1}^n Q_{ij}^K * \left( t_K * z_K^2 * K + \frac{1}{12} t_K^3 \right) \quad (1.3.7)$$

Para  $i, j = 1, 2, 3$ , donde  $Q_{ij}$  son los componentes de la rigidez transformada dada por la ecuación (1.2.15) y  $z_K$  está definida como la distancia desde la superficie media de la  $k$ -ésima capa a la superficie media del laminado. Para un laminado con  $n$  capas, la distancia  $z$  de la  $k$ -ésima capa desde el eje  $x$  es mostrada en la siguiente figura.



**FIGURA 1.3.2 SECUENCIA DE PUESTA DE CAPAS Y NUMERACIÓN DE UN LAMINADO**

Para laminados simétricos, el término acoplado  $B_{ij}$  desaparece y la ecuación (1.3.5) queda simplificada a un problema desacoplado.

### **1.3.3 – RESISTENCIA DE LAMINADOS.**

El criterio de falla presentado en la sección 1.2.6 se refiere a la resistencia de capas. Así, para un laminado de dos o más capas, la aplicación de un criterio de resistencia a cada capa individual o pliegue puede indicar falla para algunas, mientras que para las otras el criterio puede ser satisfecho.

En vista de esta consideración, se han desarrollado varios criterios referidos a la resistencia de un laminado, el primer *criterio de falla para capas* asume que el material es degradado en el sentido que el laminado ha fallado si uno de sus pliegues ha fallado a causa de una tensión en el plano. En otros criterios, se asume que los pliegues restantes aún conservan una importante capacidad de resistencia, este es el llamado *criterio de fallas sucesivas de pliegues*. Después de las sucesivas fallas de pliegues, el *criterio del último pliegue* asume que el laminado aún retiene algo de su resistencia hasta que todos los pliegues han fallado, de este modo el criterio está asociado con la capacidad de última resistencia del laminado. Por ejemplo la delaminación o pérdida de continuidad entre las capas debido a una tensión interlaminar excesiva está examinada por el criterio de delaminación.

## CAPITULO II

### VISIÓN GENERAL DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

La necesidad de obtener respuestas fiables y rápidas a los diferentes problemas que se presentan en ingeniería, ha llevado al método de elementos finitos (MEF), a ser uno de los instrumentos más utilizadas en la solución de estos, destacando el área de cálculo de estructuras en donde su aplicación ha hecho posible soluciones prácticas a problemas complejos de abordar mediante otras técnicas. (Ref. 3)

#### **2.1 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL MÉTODO**

El método consiste en discretizar un medio continuo mediante elementos llamados elementos finitos, que están enlazados entre si a través de nodos ubicados en el contorno de estos. En cada elemento se asume una función de aproximación que definirá el comportamiento de la variable que se esté estudiando, en el caso de las estructuras serán los desplazamientos, en función de los valores que adquiera esta variable en los nodos, es decir los desplazamientos nodales. Una vez obtenidos estos valores se plantean las ecuaciones de compatibilidad de todos los elementos y se resuelven utilizando métodos matriciales. La primera impresión es que el método es similar a lo que se conoce como “análisis matricial de estructuras”, pero como se verá mas adelante, la diferencia fundamental está en la obtención de la matriz de rigidez, además de no estar limitado al análisis de estructuras discretas.

El método de elementos finitos puede plantearse en una serie de etapas, las que se pueden ordenar de la siguiente forma:

- 2.1.1. – Modelo matemático.
- 2.1.2. – Discretización del dominio.
- 2.1.3. – Funciones de aproximación.
- 2.1.4. – Ecuaciones de compatibilidad.
- 2.1.5. – Matriz de rigidez.
- 2.1.6. – Condiciones de contorno.
- 2.1.7. – Obtención de desplazamientos y tensiones.
- 2.1.8. – Presentación de los resultados.

### **2.1.1 – MODELO MATEMÁTICO.**

Se debe seleccionar un modelo matemático que describa el comportamiento de la estructura, como por ejemplo la teoría de la elasticidad, explicado brevemente a continuación.

En casos muy contados es posible obtener una solución analítica del problema, por lo que es común utilizar técnicas numéricas, con lo que se obtiene una solución aproximada, involucrándose por lo tanto, la experiencia de quien realiza los cálculos.

#### 2.1.1.1 – La Teoría de la Elasticidad

De un modo genérico se puede definir el ámbito de la teoría de la elasticidad como extendido al estudio del comportamiento de los sólidos deformables. No obstante, bajo el término de elasticidad cabe incluir el análisis de situaciones con material no lineal, de frecuente aplicación a la Mecánica del Suelo, o con grandes movimientos y deformaciones, así como extensiones de evidente interés en el estudio de la propagación de fisuras, como la teoría de la elasticidad micro polar o el caso particular de la misma conocido como elasticidad con tensiones-momentos.

En la actualidad, la utilización del computador ha permitido extender la utilidad de la teoría de la elasticidad más allá de los aspectos anteriormente comentados. En efecto, tras la aparición de los métodos de los elementos finitos y de los elementos de contorno, es posible obtener soluciones numéricas de problemas complejos en geometría, cargas y condiciones de contorno.

#### 2.1.1.2 – Concepto de Sólido Elástico.

Un aspecto importante que debe considerar el ingeniero en las construcciones corresponde a su estabilidad y resistencia. Estas propiedades se comprueban mediante un modelo matemático resultado de una abstracción de la realidad, y es en este modelo, que en general no es único, sobre el que se aplican las técnicas fisicomatemáticas adecuadas, con objeto de deducir unos resultados que deben ser, a su vez, trasladados a la realidad.

Por consiguiente, existen tres etapas en una comprobación de la resistencia de una construcción: idealización, cálculo e interpretación de los resultados.

La idealización de la realidad se denomina sólido elástico, conviene recordar a este respecto, que en la mecánica racional, el proceso de abstracción conducía a un modelo denominado sólido rígido. En ambos casos, se concibe el modelo de sólido como un conjunto de puntos materiales que interaccionan entre si mediante las fuerzas intermoleculares de cohesión. Los dos tipos de modelo de sólido presentan las siguientes propiedades:

- **El sólido rígido** se caracteriza por conservar invariables las distancias entre sus puntos materiales.
  
- **El sólido elástico**, al igual que el sólido real, corresponde a modelos que implican modificación de las distancias entre puntos materiales. Sin embargo, en el sólido elástico se supone que no existen espacios vacíos intermoleculares contrariamente al sólido real, es decir, la masa de los distintos puntos se distribuye uniformemente en su entorno. Por ello el sólido elástico se dice que es un sólido deformable continuo. Esta última propiedad implica que para todo entorno de un punto geométrico del sólido existe asociada una masa o, lo que es lo mismo, la masa es una función de distribución continua y todos los puntos geométricos son materiales.

El sólido elástico así definido es el modelo que estudia la mecánica de los medios continuos, y en particular como parte de la misma, la elasticidad. No obstante, y con objeto de reducir su ámbito y simplificar la formulación matemática, se suele considerar una clase de sólidos que sean *elásticos, homogéneos y continuos*. La propiedad elástica supone la recuperación de las distancias modificadas por una acción a la situación inicial una vez que cesa esta. Las cualidades de homogeneidad e isotropía consideran la igualdad de las características del sólido (masa, propiedades elásticas, etc.) independientemente del punto y de la dirección respectivamente.

En resumen, la elasticidad lineal estudia el comportamiento del sólido elástico definido como un sistema de puntos materiales deformable, continuo, elástico, homogéneo e isótropo.

Desde un punto de vista formal, el comportamiento del sólido elástico se rige de acuerdo con las siguientes hipótesis:

- **El sólido es continuo y permanece así bajo la acción de las cargas exteriores.**
- **El principio de superposición de efectos es válido.**
- **Existe un estado único sin tensiones en el sólido al cual se vuelve cuando cesan las acciones**

La validez de las hipótesis anteriores exige que todas las ecuaciones que intervengan en el cálculo elástico sean lineales.

Las ecuaciones de la elasticidad se pueden clasificar en tres grandes grupos:

- a) Ecuaciones de equilibrio o estáticas, que relacionan las fuerzas actuantes con magnitudes estáticas denominadas tensiones.**
- b) Ecuaciones de compatibilidad o cinemáticas, que representan condiciones entre los movimientos del sólido y unas magnitudes cinemáticas llamadas deformaciones.**
- c) Ecuaciones constitutivas o mixtas, que expresan el comportamiento del material que compone el sólido, es decir, relacionan las tensiones con las deformaciones.**

Las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad pueden deducirse mediante consideraciones de la mecánica racional. Las ecuaciones constitutivas son fenomenológicas y sólo pueden obtenerse vía ensayos experimentales.

Los tres grupos de ecuaciones anteriores tienen que ser lineales, si la hipótesis de superposición de efectos es válida. La linealidad de las ecuaciones de equilibrio o linealidad estática exige que la geometría del sólido elástico que se considere en el planteamiento de las ecuaciones sea la correspondiente a la del sólido en su posición inicial; es decir, no depende de los movimientos experimentados por el sólido.

La linealidad de las ecuaciones de compatibilidad o linealidad cinemática supone que las ecuaciones entre deformaciones y movimientos sean de primer grado lo que implica desprestigiar todos los términos cuadráticos y de los movimientos frente a las primeras potencias de estos.

Finalmente, la linealidad del material asume que este sea elástico Hookeano, es decir, las ecuaciones entre tensiones y deformaciones sean lineales. Además si se descargan las acciones, se alcanza el estado inicial único sin deformaciones permanentes (propiedad elástica del material).

### **2.1.2 – DISCRETIZACION DEL DOMINIO.**

La idea básica de “discretizar” es dividir el medio continuo en una serie de elementos, cuyos tamaños y orden estarán previamente establecidos, con el objeto de reducir de infinitas a finitas las incógnitas a resolver y que representarán, en este caso, el comportamiento de la estructura. Los elementos en que se divide el medio continuo se denominan *elementos finitos* y están conectados entre si por nodos ubicados generalmente en la frontera de cada uno de ellos, el conjunto de elementos finitos y nodos da por resultado una malla, la que representará lo más fielmente posible la geometría del medio continuo.

En la discretización del medio continuo se pueden diferenciar dos aspectos importantes, el primero es la tipología del elemento y el segundo la densidad de la malla a utilizar, de estos dos aspectos depende en gran medida la precisión del resultado que se obtenga.

#### 2.1.2.1 – Elección del Elemento.

La tipología del elemento a utilizar dependerá principalmente del problema que se quiera resolver, por lo que es recomendable tener un conocimiento a priori del comportamiento de la estructura y de la respuesta que ofrece cada elemento, esto basado principalmente en la función de aproximación asociada a éste y su geometría.

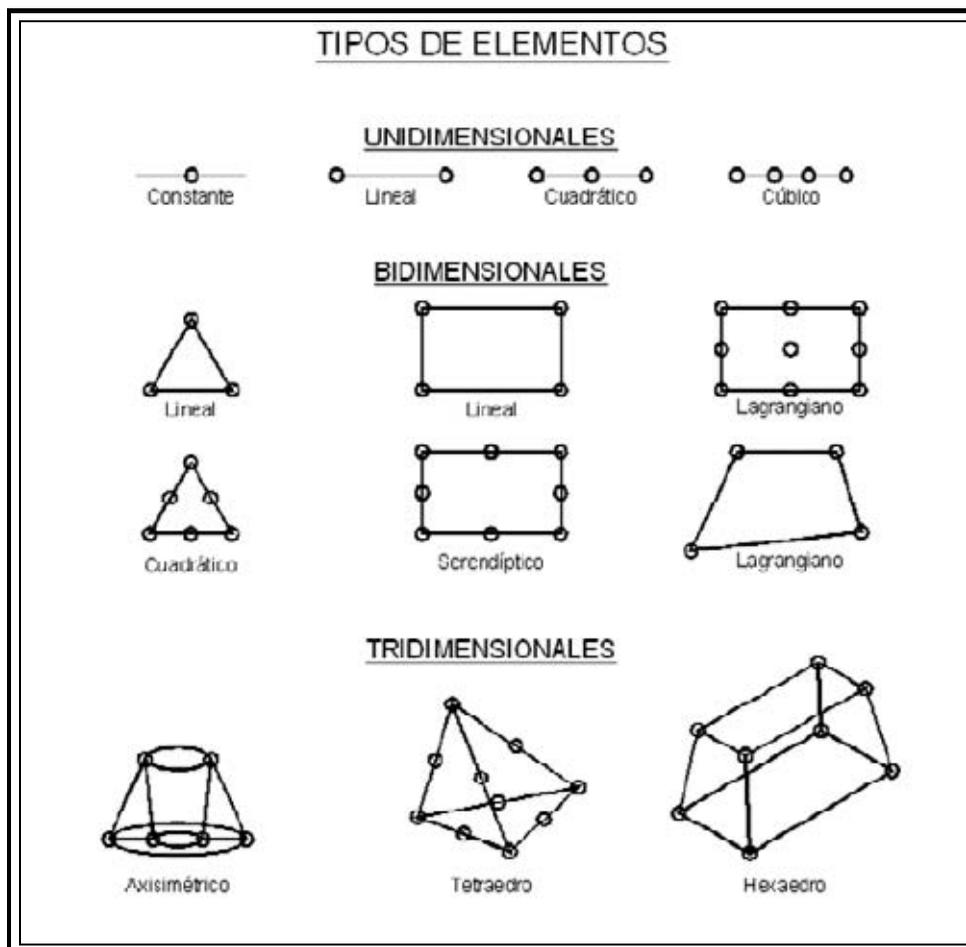
Una clasificación general de los elementos y en función principalmente de su geometría, se puede realizar como se detalla a continuación:

- a) *Elementos monodimensionales*: constituidos por barras y vigas, utilizados en diversos tipos de problemas, siendo de gran utilidad en aquellos que se requiera “rigidizar” paneles mediante refuerzos.
- b) *Elementos bidimensionales*: constituidos por elementos triangulares (lineales o cuadráticos), rectangulares (lineales, lagrangianos o

serendípticos) y cuadriláteros (resultantes de la eliminación del nodo central de la unión de cuatro elementos triangulares).

- c) *Elementos tridimensionales*: resultan de la generalización de los elementos bidimensionales, pudiendo diferenciarse los axisimétricos, paralelepípedos y hexaedros.

En la actualidad existe una amplia gama de elementos, dependiendo de la herramienta informática que se use, como se detalla en la figura 2.1.1, siendo necesario resaltar que para cada problema se deberá utilizar el elemento adecuado introduciendo las variables nodales correspondientes.



**FIGURA 2.1.1 TIPOS DE ELEMENTOS PRESENTES EN LA DISTINTAS HERRAMIENTAS INFORMATICAS**

Los elementos detallados anteriormente pueden distorsionar su geometría permitiendo una mejor aproximación a la geometría del modelo en estudio, estos se conocen como elementos isoparamétricos y son generados por medio de transformaciones bilineales, teniendo la particularidad de que un elemento generatriz bidimensional, no sólo dará como resultado un elemento isoparamétrico bidimensional sino que puede generar uno tridimensional. La utilización de elementos

isoparamétricos, soluciona en gran medida el problema de representación geométrica de modelos complejos, especialmente aquellos que poseen zonas con curvaturas pronunciadas y en las que sería necesario un gran número de elementos para representar fielmente su geometría. Existen además los elementos isoparamétricos degenerados, producto del desplazamiento de uno de los nodos de un elemento isoparamétrico triangular o rectangular, utilizado comúnmente en el estudio de fenómenos de mecánica de fractura.

#### 2.1.2.2 – Generación de la Malla.

El conjunto de elementos finitos, conectados entre si a través de sus nodos, se denomina malla, siendo de gran importancia el orden en el que se distribuyan los elementos y la densidad de esta.

El orden de los elementos en la malla tiene directa relación con el tiempo que utilice el computador para resolver el problema, ya que, una vez obtenidas las matrices de rigidez de los elementos, el orden en el que estén dispuestos en el modelo definirá el ancho de banda de la matriz global, por consiguiente, un estudio preliminar de la distribución de los elementos en el modelo asegurará un menor esfuerzo informático.

Los programas modernos tienen una función de automallado que realiza en forma automática la optimización de la distribución de los elementos, mejorando el rendimiento del computador.

La densidad de la malla o tamaño de los elementos tiene directa relación con el grado de precisión que se requiera, ya que mientras más fina sea la malla, es decir, mientras más pequeños sean los elementos que se utilicen, mayor será el grado de precisión que se obtendrá.

Generalmente un refinamiento de la malla involucra un mayor trabajo informático, por lo tanto, la técnica utilizada es de refinar en forma progresiva y sólo en las zonas de interés, poniendo cuidado en algunos aspectos como el que la malla inicial esté contenida en la malla que resulte de disminuir el tamaño de los elementos y que el tamaño de una de las dimensiones del elemento utilizado no sea mucho mayor o menor que las otras.

En numerosos casos la generación de la malla de un modelo implica el utilizar un gran número de elementos, por lo que se debe considerar la posibilidad de aplicar condiciones de simetría, lo que traerá como resultado un ahorro del trabajo informático o una mayor exactitud de resultados.

### 2.1.3 – FUNCIONES DE APROXIMACIÓN.

Las funciones de aproximación o funciones de interpolación, nos permiten aproximar los valores de la variable en estudio (desplazamientos) dentro del elemento, a valores en los nodos, para ello existen dos maneras, una a través de funciones de forma y otra utilizando series polinómicas, siendo estas últimas las más utilizadas por su sencillez de manejo y porque basta con aumentar el grado del polinomio para aumentar el grado de precisión.

#### 2.1.3.1 – Series Polinómicas.

Este método define la función de desplazamientos dentro del elemento mediante un polinomio completo  $M(x,y,z)$ , de grado  $n$  igual al número de grados de libertad de los nodos del elemento, es decir:

$$\Phi(x,y,z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7z^2 + a_8xy + a_9yz + a_{10}xz + \dots + a_mz^m \quad (2.1.1)$$

que expresado en forma matricial será:

$$\Phi(x,y,z) = M^T A$$

$$M^T = \{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx, \dots, z^n\}$$

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \quad (2.1.2)$$

$$m = \sum_{i=1}^{n+1} i * (n + 2 - i)$$

donde  $m$  es el número de términos del polinomio.

En un elemento, con un número de nodos igual a  $m$ , la función de interpolación en función de los valores nodales queda:

$$\Phi_n = [M_n]A$$

$$\Phi_n = \begin{Bmatrix} \Phi(\text{nodo}_1) \\ \Phi(\text{nodo}_2) \\ \vdots \\ \Phi(\text{nodo}_m) \end{Bmatrix} \quad (2.1.3)$$

$$M_n = \begin{Bmatrix} M^T(\text{nodo}_1) \\ M^T(\text{nodo}_2) \\ \vdots \\ M^T(\text{nodo}_m) \end{Bmatrix}$$

Si despejamos la matriz  $A$ , obtenemos el valor de los coeficientes del polinomio de interpolación en función de los valores nodales:

$$A = [M_n]^{-1} * \Phi_n \quad (2.1.4)$$

$[M_n]$  es matriz cuadrada  $m \times m$ , no singular y característica para cada elemento.

Sustituyendo (2.1.4) en (2.1.2) se tiene el valor de la función en cualquier punto del elemento:

$$\Phi = M^T A = M^T [M_n]^{-1} \Phi_n = N \Phi_n \quad (2.1.5)$$

donde  $N$  es la matriz de forma del elemento.

Este procedimiento de aproximación es muy utilizado, pero presenta algunas desventajas como por ejemplo la necesidad de obtención de la matriz inversa.

### 2.1.3.2 – Funciones de forma.

Las funciones de forma pueden obtenerse mediante polinomios de interpolación como los desarrollados por Lagrange y Hermite, cumpliendo con definir unívocamente el campo de desplazamientos en el interior del elemento en función de los desplazamientos nodales:

$$\Phi(x,y,z) = [N_i(x,y,z)] * \{\Phi_n\} = [N] * \{\Phi_n\} \quad (2.1.6)$$

Donde:

- $\Phi(x,y,z)$  : es el elemento de desplazamientos en el interior del elemento.  
 $[N]$  : matriz de funciones de forma.  
 $[N_i(x,y,z)]$  : función de forma asociada a los nodos del elemento.

Con el objeto de asegurar que la solución que se obtiene mediante la función de aproximación elegida converja a la solución, esta debe cumplir con la condición de conformidad, que se refiere a la continuidad de resultados entre elementos, siendo necesario que la función adquiera el valor cero en todos los nodos menos en el nodo que se esté considerando, en donde adquiere el valor de la unidad, además debe cumplir con la condición de complitud, es decir, asegurar la continuidad de la función dentro del elemento, cumpliendo con las ecuaciones que plantea el modelo matemático. Lo anterior implica que la función debe ser diferenciable hasta el grado más alto de las derivadas que aparezcan en la formulación de la energía potencial del sistema, esto se cumple cuando la suma de las funciones de aproximación asociadas a los nodos, en cualquier punto del elemento, es igual a la unidad.

Estas dos condiciones pueden resumirse como:

$$N_i(x,y,z) = 0, \text{ en cualquier nodo } i \neq j$$

$$N_i(x,y,z) = 1, \text{ en cualquier nodo } i = j$$

$$\sum_{i=1}^n N_i(x,y,z) = 1$$

Entre los criterios para seleccionar el elemento a utilizar en el modelo, además de lo descrito en lo referido a discretización del dominio, es importante considerar el tipo de función de forma que está asociada al elemento, así por ejemplo, habrán

elementos Lagrangianos que utilizan polinomios de Lagrange para generar la función de forma; Hermíticos, en donde se utilizan polinomios de Hermite y que son de especial interés cuando se requiere conocer los valores de la función y de su derivada; Serendípitos, en que el interés es que los nodos se encuentren en el contorno del elemento y cuya función de forma se obtiene multiplicando los términos de grado  $n$  del polinomio elegido en una variable por términos lineales en la otra, con lo cual se obtiene un resultado similar a los polinomios de Lagrange en los contornos.

#### 2.1.4 – ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

Se sabe por la teoría de la elasticidad que la relación entre tensiones y deformaciones unitarias es:

$$\sigma = [D]\epsilon \quad (2.1.7)$$

En el caso de la tensión tridimensional, las deformaciones y tensiones, toman las siguientes expresiones:

$$\epsilon^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}\}$$

$$\sigma^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}$$

$$[D] = \lambda \begin{bmatrix} 1-u & u & u & 0 & 0 & 0 \\ u & 1-u & u & 0 & 0 & 0 \\ u & u & 1-u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

Donde:

$$A = \frac{(1-2u)}{2} \quad \lambda = \text{coeficiente de Lamé.}$$

$E$  = módulo de Young.

$u$  = coeficiente de Poisson.

En el caso de la tensión plana tenemos que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\boldsymbol{\varepsilon}_x, \boldsymbol{\varepsilon}_y, \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_{xy}\}$$

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu^2)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

El vector de deformaciones unitarias puede expresarse en función de los desplazamientos nodales de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x) \\ (\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial y) \\ (\partial w / \partial x) + (\partial u / \partial z) \end{Bmatrix} \quad (2.1.9)$$

donde  $u, v, w$ , son los desplazamientos definidos por:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.1.10)$$

si  $[L]$  es el operador:

$$[L] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \end{bmatrix} \quad (2.1.11)$$

la deformación puede expresarse como:

$$\varepsilon = [L] * \Phi \quad (2.1.12)$$

sustituyendo (2.1.5) en (2.1.12) resulta:

$$\varepsilon = [L] * [N] * \Phi_n \quad (2.1.13)$$

llamando  $[B]$  a  $[L] * [N]$  obtenemos la expresión:

$$\varepsilon = [B] * \Phi_n \quad (2.1.14)$$

con lo que se consigue expresar las deformaciones en función de los valores nodales, análogamente, sustituyendo en (1.1.6) se obtendrán los valores de las tensiones en función de los valores nodales:

$$\sigma = [D] * [B] * \Phi_n \quad (2.1.15)$$

### **2.1.5 – MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL.**

Para la obtención de las matrices de rigidez elementales, que relacionan las cargas exteriores aplicadas al elemento con los desplazamientos nodales independientes que este experimenta, se utiliza un principio variacional como el principio de energía potencial mínima. Principio que establece que entre todos los desplazamientos admisibles, aquel que además satisface las condiciones de equilibrio de la estructura convierte el funcional energético en estacionario. Por lo tanto, aplicándolo al elemento, el procedimiento será el siguiente:

La energía de deformación almacenada en el interior del elemento está expresada por:

$$\Gamma_e = \iiint_V 1/2 * \{\varepsilon\}^T * [D] * \{\varepsilon\} * dV \quad (2.1.16)$$

Donde:

$\{\varepsilon\}$  : vector de deformaciones

$[D]$  : matriz elástica de rigidez elemental

El trabajo de las fuerzas exteriores queda:

$$W_e = \iiint_V \{\Phi_e(x, y, z)\}^T \{f\} dV \quad (2.1.17)$$

Donde:

$\{\Phi_e(x, y, z)\}$  : campo de desplazamientos.

$\{f\}$  : vector de cargas exteriores.

la energía potencial total del elemento será:

$$\Pi_e = \Gamma_e - W_e \quad (2.1.18)$$

la energía potencial total en toda la estructura será:

$$\Pi = \sum \Pi_e \quad (2.1.19)$$

$$\Pi = 1/2 * \Phi_n^T * \left[ \sum \iiint_V [B]^T * [D] * [B] * dV \right] * \Phi_n - \Phi_n^T \sum \iiint_V \{\Phi_e(x, y, z)\}^T \{f\} * dV$$

derivando e igualando a cero (2.1.19), para obtener la energía potencial mínima, se obtiene la matriz de rigidez elemental:

$$\begin{aligned} \partial \Pi / \partial \Phi_n &= 0 \\ [K_e] &= \iiint_V [B]^T * [D] * [B] * dV \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

La integración se extiende dentro del subdominio constituido por los límites del elemento y se resuelve mediante métodos de integración numérica, los coeficientes de la matriz obtenida dependen de la geometría y del material del elemento seleccionado.

La matriz de rigidez de la estructura (matriz de rigidez global) de orden  $M \times M$  siendo  $M$  el número de nodos del elemento, se obtiene mediante el ensamblaje de las matrices elementales, es decir, partiendo de la matriz de rigidez del elemento de orden  $m \times m$ , ampliándola con ceros en los lugares correspondientes a los grados de libertad de los nodos que no pertenecen al elemento, hasta completar el orden  $M \times M$ , la matriz de rigidez del sistema será:

$$[K] = \sum [K_e] \quad (2.1.21)$$

de esta forma queda:

$$\{f\} = [K] * \{\phi_n\} \quad (2.1.22)$$

Donde:

$\{f\}$  : vector de cargas nodales equivalentes.

$[K]$ : matriz de rigidez global.

El vector de cargas equivalentes aplicadas en los nodos al elemento, queda definido por:

$$\{f_n\} = \{f_v\} + \{f_s\}$$

$$\{f_n\} = \iiint_V [N]^T * \{f_v\} * dV + \iint_S [N]^T * \{f_s\} * dS + \sum \{p_i\} * d_i \quad (2.1.23)$$

Donde:

$\{f_v\}$ : fuerzas de volumen o masicas.

$\{f_s\}$ : fuerzas de superficies.

$\{p_i\}$ : fuerzas puntuales.

El vector de cargas totales de la estructura queda definido por:

$$\{f_v\} = \sum \{f_n\} \quad (2.1.24)$$

### 2.1.6 – CONDICIONES DE CONTORNO.

Con el objeto de resolver las ecuaciones, que llevan por incógnitas los desplazamientos, se restringen los grados de libertad o desplazamientos en determinadas direcciones de un conjunto de nodos, con lo cual la ecuación (2.1.22), puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lr}] \\ [K_{rl}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Phi_l \\ \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_l \\ f_r \end{bmatrix} \quad (2.1.25)$$

Donde:

$\Phi_l$  : vector de grados de libertad no restringidos.

$\Phi_r$  : vector grados de libertad restringidos.

$f_l$  : vector de carga sobre los grados de libertad no restringidos.

$f_r$  : vector de carga sobre los grados de libertad restringidos.

como el valor de los desplazamientos en los nodos restringidos es nulo:

$$[K_{ll}] * \Phi_l = f_l \quad (2.1.25)$$

$$[K_{rl}] * \Phi_l = f_r$$

se pueden obtener los valores de los desplazamientos en las direcciones no restringidas con la primera de las ecuaciones (2.1.26), y sustituyendo en la segunda, se obtienen las reacciones en las restricciones.

### 2.1.7 – OBTENCIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS Y TENSIONES.

Una vez obtenidos los valores de los desplazamientos nodales, como se indica en las ecuaciones (2.1.26), las tensiones se obtienen aplicando la expresión (2.1.25). Existen muchos procedimientos para la resolución de ecuaciones lineales que pueden ser implementados en el computador, pudiendo emplearse métodos directos, iterativos, gradiente conjugado y métodos frontales. La resolución de estos últimos se realizan al mismo tiempo que se van ensamblando las matrices.

### **2.1.8. – PRESENTACIÓN DE RESULTADOS.**

Existen diferentes formas de presentación de resultados, dependiendo del sistema informático que se utilice, pero en general se obtendrán resultados mediante listados, en donde se detallan los valores de desplazamientos y tensiones en los nodos y mediante representaciones gráficas de la pieza estructural que se esté estudiando, en donde se representan en base a código de colores en imágenes las variables en estudio.

## **2.2 – ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE TENSIONES.**

Los problemas de análisis de tensiones en cuerpos tridimensionales, evidentemente abarcan la mayoría de los casos prácticos, aunque en algunos casos puede obtenerse un modelo adecuado y sencillo utilizando distintas aproximaciones bidimensionales.

El elemento continuo bidimensional más simple es el triángulo. Su equivalente tridimensional es el tetraedro, que tiene cuatro nodos, uno en cada vértice y sobre cuya formulación básica se tratará en este capítulo.

### **2.2.1 – FUNCIONES DE DESPLAZAMIENTO.**

En la figura 2.2.1 se representa un elemento tetraédrico  $i, j, m, p$  en el espacio definido por las coordenadas  $x, y, z$ . El desplazamiento de un punto queda definido por tres componentes  $u, v, w$  en las direcciones de los ejes cartesianos  $x, y, z$ , por tanto:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.2.1)$$

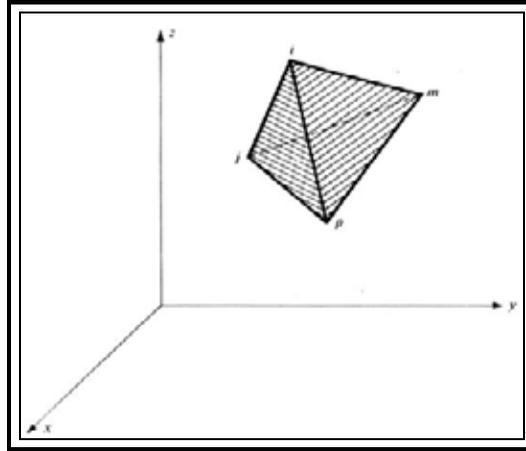
Al igual que en un triángulo plano los tres valores nodales definían la variación lineal de una cantidad, aquí una variación lineal vendrá definida por cuatro valores nodales. Como en el caso de la ecuación (2.1.1) podemos escribir, por ejemplo que:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (2.2.2)$$

Igualando los valores de los desplazamientos en los nodos, tenemos cuatro ecuaciones del tipo:

$$u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 z_i + \dots \quad (2.2.3)$$

de donde podemos calcular desde  $a_1$  a  $a_4$ .



**FIGURA 2.2.1 VOLUMEN TETRAÉDRICO**

Además podemos escribir la solución empleando el determinante, o sea:

$$u = \frac{1}{6V} \left\{ \begin{array}{l} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j + \\ (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)u_p \end{array} \right\} \quad (2.2.4)$$

Siendo:

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (2.2.5a)$$

en la que observamos que el valor de  $V$  representa el volumen del tetraedro.

Desarrollando, los otros determinantes por cofactores, obtenemos:

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad b_i = \det \begin{vmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (2.2.5b)$$

$$c_i = \det \begin{vmatrix} x_i & 1 & z_i \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} \quad d_i = \det \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}$$

obteniéndose el resto de las constantes mediante permutación cíclica de los subíndices  $p, i, j, m$ .

La ordenación de los números nodales  $p, i, j, m$ , debe seguir la “regla de la mano derecha” como se deduce claramente de la figura 2.2.1. Los tres primeros nodos se han numerado en esta siguiendo un orden contrario al sentido de las agujas del reloj, mirando desde el último nodo.

El vector de desplazamientos del elemento viene definido como sigue por las doce componentes de desplazamiento de los nodos.

$$a^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \\ a_p \end{Bmatrix} \quad (2.2.6)$$

siendo:

$$a_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \text{ etc.}$$

Podemos describir el desplazamiento de un punto cualquiera así:

$$u = [IN_i, IN_j, IN_m, IN_p] a^e \quad (2.2.7)$$

con funciones de forma definidas por:

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}, \text{ etc.} \quad (2.2.8)$$

De nuevo, las funciones de desplazamientos utilizadas satisfarán obviamente las condiciones de continuidad en los contornos de separación entre elementos. Este hecho es consecuencia directa de la naturaleza lineal de la variación de los desplazamientos.

### 2.2.2 – MATRIZ DE DEFORMACIONES.

En un análisis tridimensional completo, el vector deformación en un punto tiene seis componentes. La matriz de deformaciones se puede definir ahora siguiendo la notación general del texto de elasticidad de Timoshenko, como:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x) \\ (\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial y) \\ (\partial w / \partial x) + (\partial u / \partial z) \end{Bmatrix} = Su \quad (2.2.9)$$

Empleando las ecuaciones (2.2.4) a (2.2.7) se comprueba fácilmente que:

$$\varepsilon = Ba^e = [B_i, B_j, B_m, B_p]a^e \quad (2.2.10)$$

en la cual:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

obteniéndose las restantes submatrices de forma similar, permutando simplemente los subíndices.

Las deformaciones iniciales, tales como las debidas a la dilatación térmica, pueden escribirse de la forma habitual como vector de seis componentes que, por ejemplo, en una dilatación térmica isótropa serian sencillamente:

$$\varepsilon_o = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2.12)$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación y  $\theta^e$  el incremento medio de la temperatura en el elemento.

### 2.2.3 – MATRIZ DE ELASTICIDAD.

Si existe la anisotropía completa, la matriz  $D$  que relaciona las seis componentes de la tensión con los componentes de la deformación puede contener 21 constantes independientes.

Así pues en general:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = D(\varepsilon - \varepsilon_o) + \sigma_o \quad (2.2.13)$$

Aunque el cálculo no presenta en si gran dificultad cuando se trata con estos materiales, ya que la multiplicación nunca se efectúa explícitamente, es conveniente recoger aquí la matriz  $D$  para un material isotrópico. Se puede escribir esta en función de las constantes elásticas usuales  $E$  (módulo de Young) y  $\nu$  (coeficiente de Poisson).

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

### **2.3. – TIPOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL.**

El tipo de análisis estructural que se realice, depende del objetivo que se quiere alcanzar con la aplicación del método, por ejemplo, comprobación de cálculos, optimización estructural, optimización de peso, nuevo diseño, etc., se suma a esto la capacidad del instrumento informático y el tiempo que se desee invertir en el análisis.

En general, la gran mayoría de los software de elementos finitos poseen la capacidad de ofrecer al menos las siguientes opciones de análisis:

- Análisis estático lineal, determinando desplazamientos debido a cargas en los nodos, cargas de presión, cargas de temperatura nodal y cargas de gravedad debido al peso propio.
- Análisis de esfuerzos debido a las deformaciones producto de los desplazamientos nodales.
- Análisis modal, el que incluye la determinación de frecuencias naturales y modos de vibración.
- Análisis de pandeo.
- Respuesta a cargas dynamics.
- Análisis lineal y no lineal de conducción de calor.

Independiente del software utilizado es preponderante en cualquier tipo de análisis de estructura, la experiencia de quien recibe e interprete los resultados.

Cualquier tipo de análisis requiere comprobar si los esfuerzos obtenidos son compatibles con las tensiones admisibles.

### **2.4. – INSTRUMENTOS INFORMÁTICOS.**

El método de elementos finitos ha sido implementado en computadores obteniéndose excelentes resultados, existiendo hoy en día una amplia y variada oferta de programas que resuelven numerosos problemas de ingeniería, diferenciándose entre ellos principalmente por la facilidad de uso, rapidez de cálculo, plataforma de trabajo, librería de elementos y por supuesto el costo, esto último dice relación directa con las prestaciones de la herramienta (número de nodos, grados de libertad, elementos, etc.) y el tipo de licencia (anual o perpetua), entre otras variables.

Cada herramienta informática posee innumerables opciones de modelado y presentación de resultados, unas más cómodas de trabajar que otras, pero en general,

estos instrumentos cumplen con el cometido de facilitar el trabajo de quienes proyectan y diseñan estructuras.

A continuación se plantean algunas diferencias, que hacen una herramienta informática más atractiva que otra:

- Facilidad de manejo, rapidez de aprendizaje y un buen servicio postventa.
- Amplia librería de elementos, que posibiliten la realización de diferentes tipos de análisis.
- Facilidad de lectura de resultados, presentados a través de mapas de degradación de colores, listados por nodos, elementos y orientación, ubicación expedita de puntos críticos, etc.
- Plataforma de trabajo moderna y amigable, de fácil y rápida adaptación.
- Hardware mínimo necesario que permita soportar una inversión recuperable a corto plazo.
- Que posea un método optimizado de solución, disminuyendo el tiempo informático invertido en el análisis.
- Base teórica para la formulación de los elementos validada.
- Costo acorde a las prestaciones.

## **2.5 –ELEMENTOS FINITOS PARA MATERIALES COMPUESTOS**

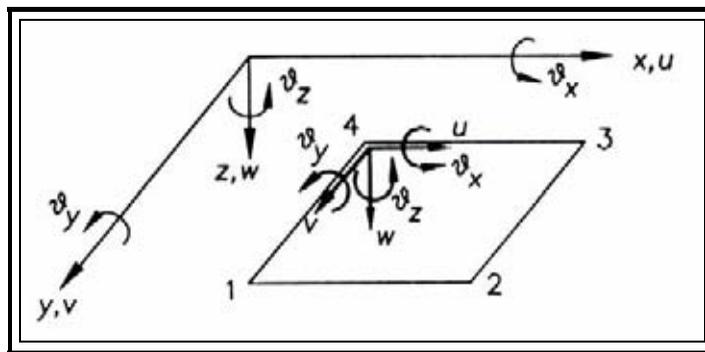
Dos tipos de elementos finitos serán examinados para el análisis de los materiales compuestos. En el primer tipo la lámina es considerada delgada (espesor despreciable) y las suposiciones de Kirchhoff para placas son adoptadas. Para el segundo tipo la lámina tiene un espesor y se asume que el efecto de corte transversal en placas gruesas combinada con la flexión entrega una aproximación más apropiada, lo que se conoce como la *teoría para placas Mindlin*. En ambos casos, el elemento finito para materiales compuestos combina tensiones y deformaciones planares con la flexión.

Debe ponerse atención especial en la orientación del elemento en el sistema coordenado global X-Y-Z. Contrario a los materiales isotrópicos donde además del sistema global X-Y-Z, cada elemento está asociado con un sistema de coordenadas local  $\xi - \eta - \zeta$ , en los materiales compuestos los sistemas de coordenadas adicionales están definidos por cada capa. Por ejemplo cada capa está caracterizada por su sistema de material, el cual es un sistema local que define la orientación de las fibras en el sistema de elementos.

A continuación se desarrolla un procedimiento paso a paso para obtener las ecuaciones de rigidez de un elemento compuesto que está resaltado para elementos rectangulares isoparamétricos. Sólo los pasos que requieren alguna clarificación son discutidos aquí.

### **2.5.1 – ELEMENTOS RECTANGULARES PARA COMPUESTOS DELGADOS.**

La matriz de rigidez para una placa rectangular isoparamétrica delgada de elementos compuestos es desarrollada con la ayuda del método de la energía potencial. El método está sujeto a cargas planares y transversales. Debido a la complejidad de las relaciones algebraicas sólo las relaciones básicas serán obtenidas.



**FIGURA 2.5.1 ELEMENTO RECTANGULAR DE 4 NODOS  
PARA COMPUESTOS DELGADOS**

#### 1<sup>er</sup> Paso: Definir el tipo de elemento y el sistema de coordenadas.

Se selecciona un elemento rectangular de cuatro nodos. El elemento tiene 24 grados de libertad (DOF), esto es seis grados por cada nodo. La numeración de los nodos, los desplazamientos así como el sistema de coordenadas están mostrados en la figura 2.5.1

2º Paso: Seleccionar la función de forma.

Los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  dentro del elemento están expresados en términos del desplazamiento nodal  $u_i$ ,  $v_i$  y  $w_i$  y la función de forma  $N_i$  por:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & ; & & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & ; & & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Siguiendo la numeración de nodos en sentido opuesto a las agujas del reloj mostrado en la figura 3.1.1, las coordenadas nodales de los nodos 1, 2, 3 y 4 en el sistema  $\xi - \eta$  son:  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$  y  $(-1, 1)$  respectivamente.

3º Paso: Determinar las relaciones deformación-desplazamiento.

Para un elemento bajo carga planar y transversal, las tensiones y deformaciones que producen trabajo son  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$ , para un estado planar de tensión-deformación, y  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  y  $\kappa_{xy}$ , para la flexión. Por tanto las relaciones de deformación-desplazamiento son dadas por:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & & \kappa_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & ; & & \kappa_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & ; & & \kappa_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Sustituyendo la ecuación (2.5.1) en (2.5.3), podemos expresar las tensiones y deformaciones con respecto a los desplazamientos nodales.

4º Paso: Definir la relación tensión-deformación.

La relación tensión-deformación de la ecuación (2.3.5) que relaciona la tensión resultante y el momento resultante para deformaciones y curvaturas es usada. Nótese que la integración sobre el espesor de la lámina ya ha sido hecha en la derivación de la ecuación (2.3.5).

5º Paso: Formular la matriz de rigidez para el elemento.

La matriz de rigidez del elemento está dada por:

$$[k]_e = \iint [B]^T [C] [B] dx dy \quad (2.5.4)$$

Donde la integración es realizada sobre el área del elemento en el sistema  $\xi - \eta$ . Nótese que  $[k]_e$  puede ser derivada en el sistema x-y a través de la transformación Jacobiana.

6º Paso: Calcular la fuerza nodal equivalente.

De la superposición de fuerzas nodales equivalentes se obtiene el vector de fuerzas  $\{f\}_e$  para elementos compuestos. La relación de fuerza-desplazamiento puede ser obtenida de la siguiente forma para un sistema de equilibrio, donde las ecuaciones pueden ser formuladas en forma de matriz para toda la estructura:

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (2.5.5)$$

Donde  $\{ \}$  denota un vector y  $[ \ ]$  denota una matriz. En la ecuación (2.5.5),  $\{f\}$  es el vector de fuerza nodal,  $[K]$  es la matriz global de rigidez referida a toda la estructura y  $\{U\}$  es el vector de desplazamiento nodal.

El equilibrio a nivel del elemento puede ser expresado con una relación similar a (2.5.5), esta es:

$$\{f\}_e = [k]_e \{u\}_e \quad (2.5.6)$$

Donde  $\{f\}_e$  es el vector de fuerza nodal en el elemento,  $[k]_e$  es la matriz de rigidez del elemento y  $\{u\}_e$  es el vector de desplazamiento nodal.

### 2.5.2 – ELEMENTOS RECTANGULARES PARA COMPUESTOS GRUESOS.

Para elementos de placa delgados las deformaciones por corte  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  han sido ignoradas como justificación para las suposiciones de pequeñas deflexiones de la teoría. Sin embargo para placas compuestas gruesas y su correspondiente elemento de placa el efecto de corte transversal no puede ser ignorado y la aplicación de la *teoría de deformación por corte Mindlin* para flexión de placas es requerida. Las deformaciones por corte no planares  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son incluidas en el vector de deformación.

La derivación de la matriz de rigidez para elementos de placa gruesos requiere exactamente de los mismos procedimientos mostrados anteriormente para placas delgadas. La única diferencia descansa en la relación deformación-desplazamiento donde las deformaciones  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  así como la resultante asociada de tensión  $N_{xz}$  y  $N_{yz}$  están incluidas en el análisis. Según la teoría para placas Mindlin, la relación deformación-desplazamiento está dada por:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & ; & \quad \gamma_{xz} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & ; & \quad \gamma_{yz} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Los desplazamientos y rotaciones están expresados en términos de los grados de libertad nodales y la función de forma dada por:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \\ \theta_x &= N_1 \theta_{1x} + N_2 \theta_{2x} + N_3 \theta_{3x} + N_4 \theta_{4x} \\ \theta_y &= N_1 \theta_{1y} + N_2 \theta_{2y} + N_3 \theta_{3y} + N_4 \theta_{4y} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Donde la función de forma  $N_i$  está dada por la ecuación (1.5.2). La relación tensión-deformación de la ecuación (1.5.5) con la inclusión de las fuerzas de corte queda:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ N_{yz} \\ N_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.5.9)$$

Donde los componentes de la rigidez transversal del corte  $A_{44}$ ,  $A_{55}$  y  $A_{45}$  están dados por:

$$A_{44} = \sum_{k=1}^n Q_{44}^k \cdot t_k \quad (2.5.10a)$$

$$A_{55} = \sum_{k=1}^n Q_{55}^k \cdot t_k \quad (2.5.10b)$$

$$A_{45} = \sum_{k=1}^n Q_{45}^k \cdot t_k \quad (2.5.10c)$$

Finalmente, los términos de rigidez transversal del corte  $Q_{44}$ ,  $Q_{55}$  y  $Q_{45}$  para cada capa del laminado están compuestos por:

$$\begin{aligned} Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \\ Q_{45} &= \nu_{45} \cdot G_{13} = \nu_{54} \cdot G_{23} \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Para materiales isotrópicos, la relación (2.5.11) es simplificada, ya que  $Q_{44} = G$ ,  $Q_{55} = G$  y  $Q_{45} = 0$

Con esto se completa la revisión del método de cálculo a utilizar en el análisis del problema que motiva este trabajo.

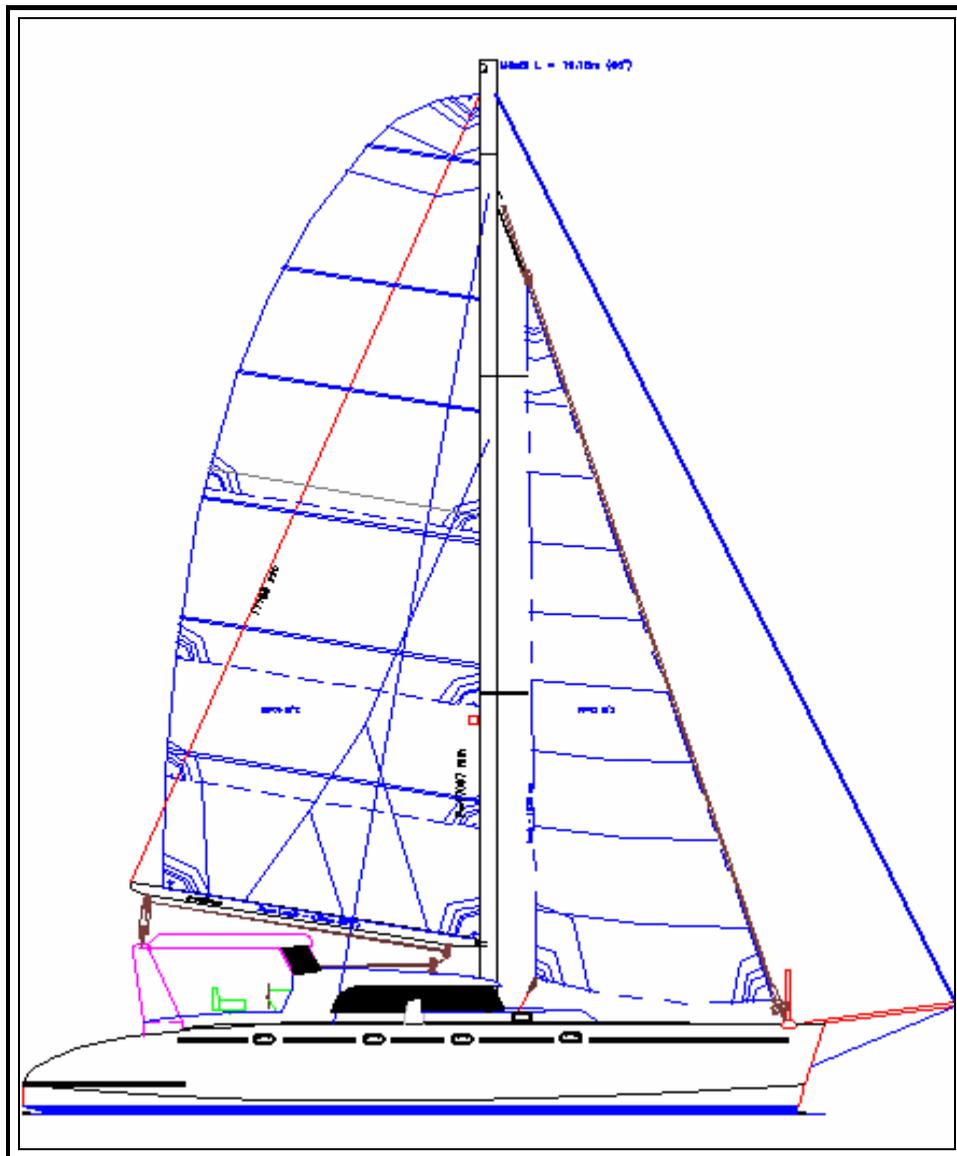
## CAPITULO III GENERACION DE MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

### 3.1 – DESCRIPCION DE LA NAVE EN ESTUDIO

#### 3.1.1– GENERALIDADES

La embarcación usada en este estudio corresponde a un catamarán diseñado por la empresa nacional NAVTEC y construido por el astillero Alwoplast S.A.

Corresponde a un catamarán de crucero con propulsión mixta, es decir, es propulsado tanto por la acción del viento sobre sus velas, como por la acción de sus motores principales, esta construido en materiales compuestos y posee una eslora total de 50 ft. El arreglo general de la nave se muestra en la figura 3.1.1



**FIGURA 3.1.1 ARREGLO GENERAL CATAMARAN**

Las características principales de la embarcación se enuncian a continuación.

Parámetro	Dimensión (m)
Eslora Total	15
Eslora en flotación	13.7
Manga máxima	7.2
Manga en flotación	7
Calado	0.7
Puntal	2.5

**TABLA 3.1.1 CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LA NAVE**

### **3.1.2 –DETALLES CONSTRUCTIVOS DE LA NAVE**

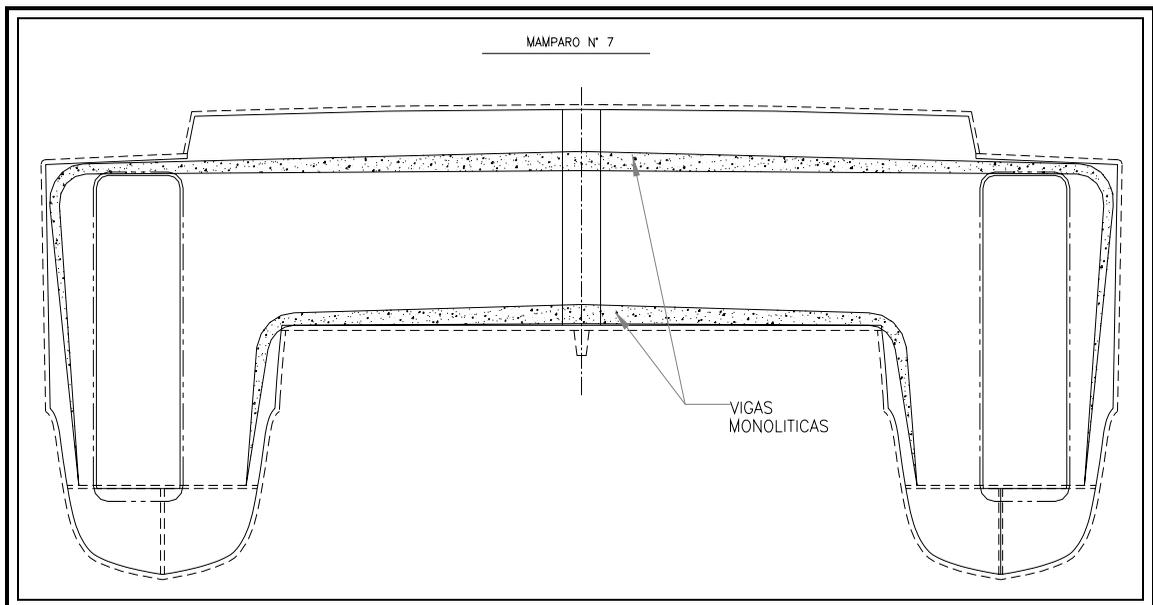
La embarcación fue construida usando el sistema sándwich con plástico reforzado en fibra de vidrio (matriz poliéster) para las capas de laminado interior y exterior y espuma de celda cerrada para el núcleo. Todos los laminados fueron realizados mediante laminación manual en molde hembra. Los esquemas de laminado utilizados en la construcción de la nave se muestran a continuación.

Laminación
Fondo
Costados
Cubierta Exterior
Underwing
Vagras
Cubiertas Interiores
Viga Underwing
Cuadernas
Mamparo Mástil
Mamparo

**TABLA 3.1.2 LAMINADOS EN BLOQUE EN ESTUDIO**

### 3.1.3 – DETALLES CONSTRUCTIVOS Y PARTICULARIDADES DE LA ZONA EN ESTUDIO

Como se mencionó en un principio, el motivo de esta tesis es analizar las propuestas estructurales para la zona de apoyo del mástil en embarcaciones multicascos propulsadas a vela, esto debido a que en esta zona se presenta una situación de carga compleja como la flexión del mamparo debido a la carga inducida por el mástil sobre el mismo, la propuesta que primero se analizará contempla la construcción de dos vigas monolíticas dentro del mamparo, esta propuesta conlleva un alto número de horas hombre ya que su construcción es compleja, a continuación se muestra en la figura 3.1.2 la configuración del mamparo mástil y las vigas monolíticas insertas en el mismo.



**FIGURA 3.1.2 CONFIGURACION DEL MAMPARO EN ESTUDIO**

Cabe mencionar que Ansys permite realizar modificaciones en la configuración de la estructura una vez que la geometría ha sido generada, por lo que para analizar nuevas propuestas estructurales solo se requerirá un par de instrucciones y fácilmente se podrá estudiar una nueva configuración de refuerzos.

## **3.2 – MODELACION DE LA NAVE**

### **3.2.1 –SISTEMA DE UNIDADES**

Se utilizó el sistema internacional de medidas en formato MKS, para llevar a cabo este estudio, por tanto las unidades utilizadas fueron las siguientes.

Constante	Unidad	Símbolo
Longitud	metros	m
Masa	kilogramos	Kg
Tiempo	segundos	s
Fuerza	newtons	N
Presión	pascales	N/m <sup>2</sup>

**TABLA 3.2.1 UNIDADES A EMPLEAR**

### **3.2.2 –SISTEMAS LOCALES Y GLOBALES DE COORDENADAS**

Como sistema de coordenadas globales se eligió un sistema cartesiano con su punto de origen en la intersección de los planos de mamparo mástil, el punto mas bajo del citado mamparo y crujía. El eje X se definió en la dirección transversal (manga), el eje Y se definió en la dirección vertical (puntal) y el eje Z en la dirección longitudinal (eslora).

Cada elemento cuenta con su propio sistema de coordenadas orientado según la ley de la mano derecha, el cual determina las propiedades ortotropicas del material, las presiones aplicadas y los resultados (Ej. esfuerzos y deformaciones) para un elemento en particular. Todos estos sistemas de coordenadas corresponden a sistemas ortogonales orientados según la ley de la mano derecha. En Ansys es posible alinear los sistemas de coordenadas elementales respecto a un sistema de coordenadas local, para el caso de elementos de área y volumen (Ej. Shell y Solid). Esta herramienta permitió definir correctamente la orientación de cada esquema de laminación del casco.

### **3.2.3- MATERIAL**

Las propiedades mecánicas de los materiales fueron simuladas en el modelo de elementos finitos bajo las siguientes suposiciones:

- ⇒ Tanto la fibra como la matriz son materiales homogéneos e isotrópicos.
- ⇒ Existe una adhesión perfecta entre fibra y matriz de forma tal que no existe resbalamiento.
- ⇒ Las fibras son uniformes, regularmente separadas y perfectamente alineadas.
- ⇒ La matriz está libre de porosidades y/o burbujas.
- ⇒ Cada lámina se encuentra en un estado libre de tensiones, lo que significa que no existen tensiones residuales.

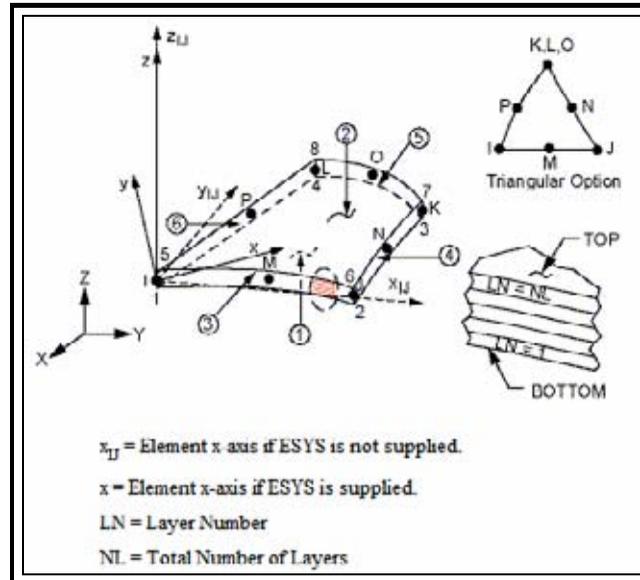
Micromecánicamente los materiales compuestos exhiben diversos tipos de efectos de acoplamientos, tales como acoplamientos entre la torsión y la flexión, acoplamiento entre la flexión y la torsión, etc. Esto se debe a su peculiar construcción en base al apilado de láminas de distintas propiedades. Como resultado, si la secuencia de apilado de láminas no es simétrica, no se recomienda el uso de simetría en los modelos aun si la geometría y las cargas no son simétricas.

## **3.3 – EL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS**

### **3.3.1 – TIPO DE ELEMENTO**

Solo un tipo de elemento fue utilizado en la modelación de la nave, esto debido a que se trata de una zona constituida solo de paneles estructurales, los cuales pueden ser fácilmente modelados mediante elementos de placa.

La representación completa de la estructura en estudio, es decir, forro, mamparos, cuadernas y refuerzos, fueron modelados usando el elemento de placas laminado SHELL 99, el cual se muestra en la figura siguiente.



**FIGURA 3.2.1 ELEMENTO SHELL 99**

SHELL 99 es un elemento tridimensional de placas, octa-nodal que cuenta con seis grados de libertad en cada nodo traslación en los ejes X, Y y Z y rotaciones respecto a los ejes X, Y y Z. Este elemento está diseñado para modelar estructuras de placas y cáscaras de espesor moderado con una relación espesor-lado de 10 o mayor.

El elemento SHELL 99 permite un número máximo de 250 láminas de espesor no uniforme.

### 3.3.2 – CONSTANTES REALES

Las constantes reales son usadas en Ansys, dependiendo del tipo de elemento, para definir el material y propiedades geométricas presentes en el elemento. En el caso particular de SHELL 99 las constantes reales definen el número, material, ángulo de orientación y espesor de las láminas en el elemento.

El número de láminas corresponde al total de láminas en cada secuencia de laminado de la estructura de la nave. El ángulo de orientación define la orientación del sistema coordenado de cada lámina respecto al sistema coordenado del elemento. El material de cada lámina define que tipo de material es usado en cada capa del laminado permitiendo así el uso de distintos materiales en cada capa. Finalmente el espesor indica el espesor de cada capa del laminado considerando fibra y matriz.

Se definieron un total de 11 constantes reales las cuales se muestra en la tabla estas representan los 11 laminados distintos presentes en la zona de la nave en estudio.

Constantes reales SHELL 99	Laminación
1	Cuaderna
2	Cubierta Principal
3	Vagra
4	Mamparo Mástil
5	Mamparo
6	Underwing
7	Cubierta Interior
8	Fondo
9	Costados
10	Viga Underwing
11	Vigas Monolíticas

**TABLA 3.3.1 CONSTANTES REALES**

### **3.3.3 – PROPIEDADES DEL MATERIAL**

Las propiedades mecánicas para materiales ortotropicos están orientadas de forma paralela al sistema de coordenadas de cada lamina, el cual esta definido por el sistema coordinado del elemento y el ángulo de orientación de cada lamina (definido en la constantes reales).

Cabe mencionar que las propiedades mecánicas de los materiales utilizados fueron determinadas de acuerdo al reglamento “Rules for the construction and classification of high speed craft” de la casa clasificadora Bureau Veritas para el caso de las pieles, para los núcleos se utilizó la información proporcionada por los fabricantes de las mismas.

Se debe mencionar que, si bien existen pieles bi y triaxiales en la construcción de la nave, para determinar las propiedades de las mismas, se consideraron solo pieles unidireccionales con el gramaje y porcentaje correspondiente a cada una.

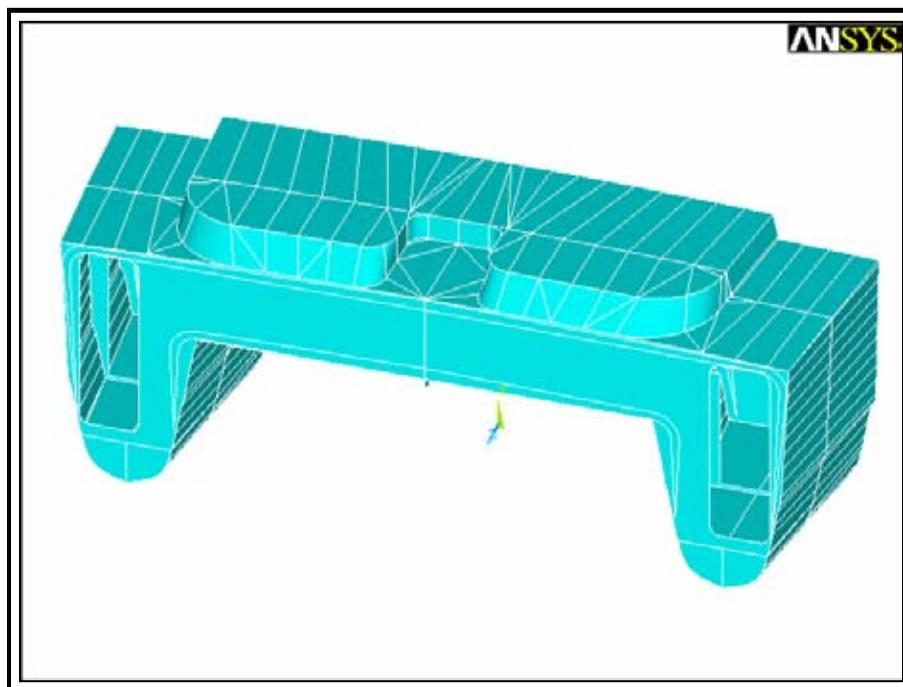
Los materiales utilizados en la creación del modelo de elementos finitos se muestran en la tabla a continuación.

Nº	Material	Tipo
1	Chop strand mat	Isotropico
2	Unidireccional	Ortotropico
3	Biaxial 1700 -5	Ortotropico
4	Triaxial 2200 - 10	Ortotropico
5	Triaxial 3300 - 10	Ortotropico
6	Divinycell	Isotropico

**TABLA 3.3.2 MATERIALES EMPLEADOS**

### **3.3.4 – GENERACION DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS**

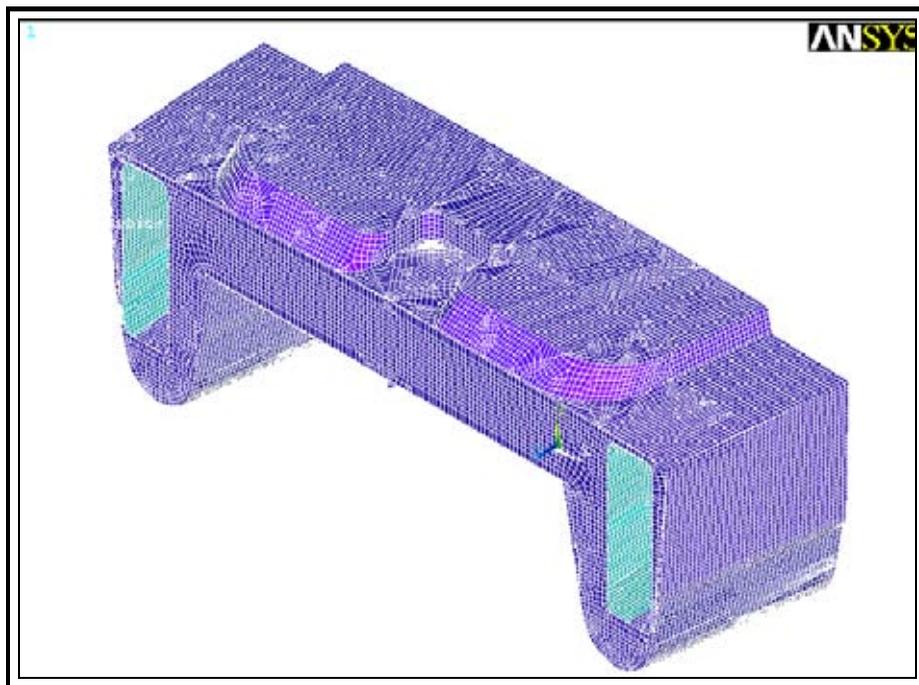
El modelo de elementos finitos mostrado en la figura 3.3.3 fue generado a partir de los planos de la nave, de estos planos se generaron tablas de puntos que describen los contornos de los mamparos que delimitan la zona a estudiar y de la cuaderna que se encuentra entre ellos, esta información fue ingresada en Ansys creando de esta manera una serie de Keypoints los cuales describen la geometría de la nave, posteriormente, a través de estos puntos se generaron áreas obteniéndose así el modelo tridimensional, cabe mencionar que hasta esta fase aun no se ha generado mas que un modelo geométrico que de ninguna manera sirve para realizar cálculo alguno, por otro lado, al contar el modelo con simetría con respecto a la crujía se modeló solo una banda para luego reflejar las áreas y obtener el modelo geométrico final.



**FIGURA 3.3.2 MODELO GEOMETRICO**

Una vez completado el modelo, se procedió al mallado de las áreas mediante la opción de mallado automático solo especificando la longitud de los elementos a utilizar en el mallado por el programa.

Con esto se llegó a obtener un modelo de elementos finitos compuesto de 98410 nodos y de 32864 elementos, es en esta etapa en la cual ya se está en condiciones de aplicar las cargas y condiciones de borde adecuadas que permitan llegar a la obtención de resultados útiles.



**FIGURA 3.3.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS**

### **3.3.5 – ANALISIS ESTÁTICO**

El análisis estático calcula los efectos de cargas inmóviles en una estructura ignorando los efectos inerciales y de amortiguamiento tales como los causados por cargas que varíen en el tiempo. Sin embargo, un análisis estático puede incluir fuerzas inerciales inmóviles tales como la gravedad o la velocidad rotacional y, más importante aun, cargas que varíen en el tiempo que pueden ser aproximadas a cargas estáticas o cuasi estáticas.

Un análisis estático en Ansys puede ser lineal o no lineal. Dentro de los tipos de no linealidades aceptadas por Ansys se cuentan: plasticidad, rigidización por esfuerzo, deflexiones de grandes magnitudes, hiperelasticidad, superficies de contacto y creep.

### **3.3.6 – CARGAS A APLICAR**

Se consideraran las siguientes cargas actuando sobre el bloque en estudio:

- ⇒ Presión hidrostática
- ⇒ Peso propio del bloque
- ⇒ Carga generado por el mástil sobre el bloque

#### **3.3.6.1 Cálculo de carga por presión hidrostática**

La presión hidrostática se determinó, simplemente considerando el calado de la nave en la condición de desplazamiento máximo, este calado en la zona en estudio, y considerando el sistema de coordenadas adoptado para el modelo de elementos finitos, es de 0.68 [m] por sobre el punto mas bajo del mamparo mástil, y para ser ingresada esta carga en Ansys se debe generar un gradiente, es decir en función de la presión máxima en el fondo de la nave y considerado el calado, se aplica como una presión constante sobre la cual actúa el gradiente y genera la variación lineal propia de este tipo de carga.

#### **3.3.6.2 Cálculo de carga del mástil**

La carga aplicada al mástil de una embarcación, es básicamente una compresión pura y para llegar a determinar esta carga diversos autores (ref. 1; ref. 7; ref. 12). han propuesto metodologías de cálculo basadas, en su mayoría, en el momento adrizante de la nave a una escora dada y en las características del velamen de la misma, es decir, en la configuración de obenques, crucetas y stays, se aplican estas metodologías de cálculo cuando se desea diseñar el mástil y los obenques, en este caso, se utilizara la metodología de cálculo entregada por Skene ( ref. 2), por lo demás al no contar con los datos de momento adrizante de la nave en estudio , estos fueron obtenidos de otras embarcaciones de similares características en cuanto a formas y plano velico.

La expresión entregada por Skene se muestra a continuación:

$$P = 1.85P_T \quad \text{donde} \quad P_T = \frac{1.5RM_{30}}{b/2}$$

Con:

RM: Momento adrizante a los 30 grados de escora

b/2: Distancia entre el mástil y el punto de apoyo del obenque en la cubierta.

1.5: Coeficiente que considera ángulos de escora mayor a los 30°

1.85: Coeficiente que considera las cargas de obenques y stay.

P: Máxima carga de compresión en la base del mástil.

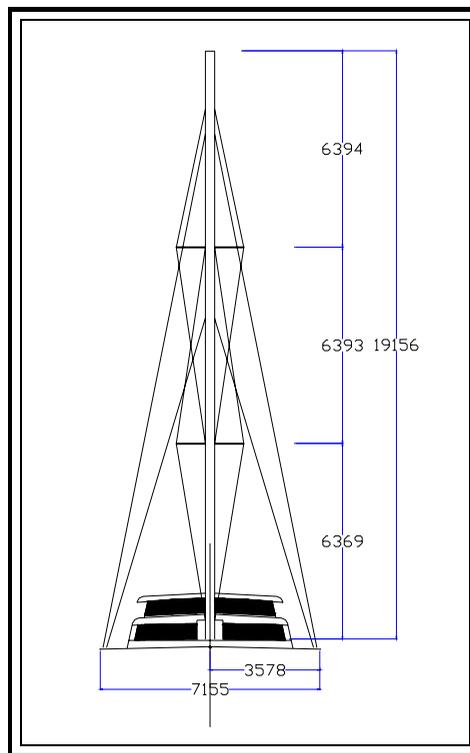
Skene entrega la siguiente expresión que relaciona el momento adrizante a 1° de escora con el momento a los 30°.

$$RM_{30} = 27RM_1$$

Donde para embarcaciones de este tamaño y superficie velica el valor de  $RM_1$  esta cercano a los 8445 Nm, por lo que el valor de  $RM_{30}$  es:

$$RM_{30} = 228015 \quad Nm$$

La distancia entre el mástil y la borda se puede apreciar en la figura 3.3.4



**FIGURA 3.3.4 PLANO MASTIL**

Por lo que el valor de  $P_T$  y  $P$  resultan:

$$P_T = 95590 \quad N$$

$$P = 176841 \quad N$$

Considerando que el mástil se apoya no solo sobre el mamparo, sino sobre dos columnas de madera que se adhieren a este y descansan sobre el underwing, formando una base con las dimensiones y resistencia suficientes para anclar el mástil a la nave, se adoptó como caso de carga más desfavorable aplicar dos tercios de la carga calculada, directamente sobre el mamparo de apoyo del mástil, puesto que las columnas de maderas transmiten los esfuerzos al underwing y la viga central de este lleva los esfuerzos a lo largo de la eslora de la nave, el considerar toda la carga en el mamparo conlleva un nulo aporte de las piezas de madera adosadas a este y no sería una situación real. Al no existir información precisa se adoptó, luego de un breve estudio, la consideración antes descrita como un caso de carga más cercano a la realidad.

Finalmente la carga actuando sobre el mamparo, producto de la presencia del mástil, se fijó en 12.5 toneladas, las cuales serán distribuidas sobre una zona del mismo.

El no modelar las columnas de madera se justifica considerando que existe incertidumbre acerca de las propiedades mecánicas de este material y por lo demás se complementa su acción con la estructura longitudinal a lo largo de la nave, y esta no ha sido modelada en este estudio.

### **3.3.7- CONDICIONES DE CONTORNO**

Se aplicaron condiciones de contorno en los extremos del bloque en la zona de cubierta de la nave en crujía, en estos nodos se restringieron los 6 grados de libertad obteniéndose un empotramiento. Posteriormente se hizo uso de la herramienta de Ansys Inertia Relief la cual calcula aceleraciones lineales y angulares para contrarrestar las reacciones en el soporte producto de diferencias de balance de fuerzas y momentos en los casos de carga.

Para el uso de Inertia Relief se requiere definir los datos necesarios para los cálculos de masa y de momentos de inercia tales como la densidad. Además se debe restringir un número de grados de libertad suficientes para evitar movimiento de sólido rígido es por esto que se adoptaron las restricciones antes descritas.

Cabe destacar que el uso de la herramienta Inertia Relief puede generar pequeños desplazamientos de sólido rígido, como rotaciones en modelos simétricos, por lo que la distribución de tensiones que se obtenga no será completamente simétrica en algunos casos de carga.

## CAPITULO IV

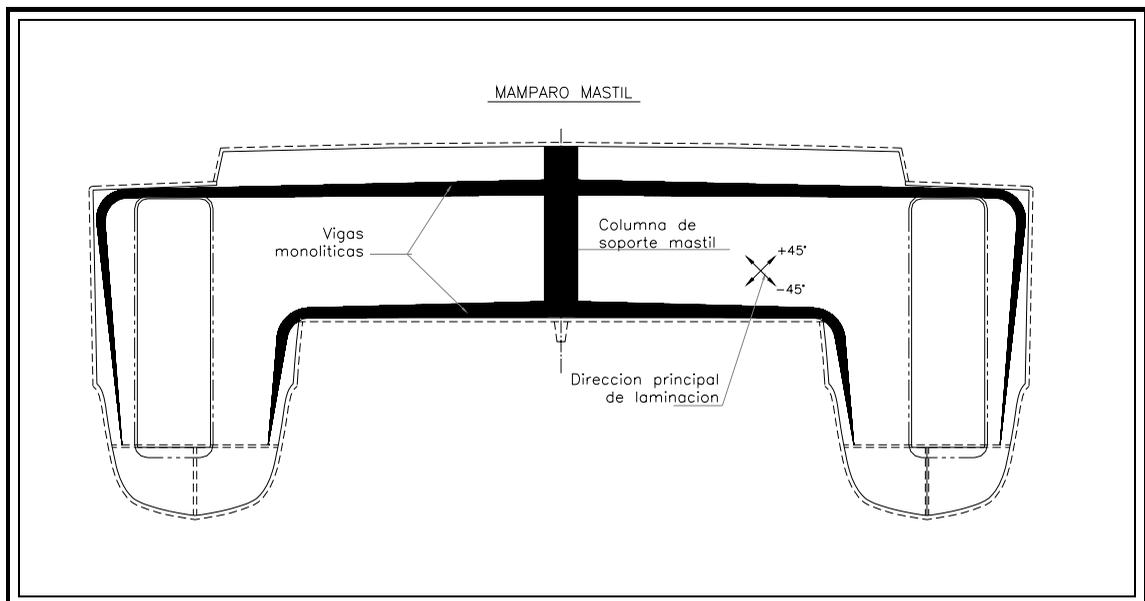
### ESTUDIO DE PROPUESTAS ESTRUCTURALES EXISTENTES

#### 4.1 – DESCRIPCION DE PROPUESTA ESTRUCTURAL PRESENTE EN LA NAVE CONSTRUIDA

##### **4.1.1 – GENERALIDADES**

La propuesta estructural con la cual se construyó la nave consiste en la fabricación en el mamparo de apoyo del mástil, y en mamparos adyacentes, de dos vigas monolíticas, es decir construidas solo con telas sin considerar la presencia del núcleo de PVC como en el resto de la estructura, que en este caso, corresponden a pieles unidireccionales orientadas en el sentido de la manga de la nave, estas vigas se insertan en el laminado correspondiente al mamparo y en conjunto con la columna central conforman una estructura ideada para soportar tanto las cargas globales de cualquier nave de tipo catamarán, como la carga local inducida por el mástil.

En la figura a continuación se muestran cada uno de los componentes de la citada estructura.



**FIGURA 4.1.1 CONFIGURACION DE MAMPARO PARA LA PROPUESTA ORIGINAL**

Como se puede apreciar en la figura, la construcción de esta zona es compleja puesto que involucra la generación de tres elementos, el mamparo como tal, las vigas y la columna, estos últimos deben ser insertados en la estructura base.

Es por la complejidad antes descrita que se hace interesante el estudio de esta zona de la estructura, en primer lugar, para conocer la real efectividad de la solución estructural propuesta y en segundo, para sentar un precedente a la hora de desarrollar una alternativa estructural.

#### **4.1.2 – CARACTERISTICAS DE LOS ESQUEMAS DE LAMINADO PRESENTES EN LA ESTRUCTURA**

Como se menciona anteriormente, las estructuras sándwich no son otra cosa que el apilamiento de pieles a uno y otro lado de un núcleo, que en este caso es de PVC.

En el bloque que se modelo, existían tanto laminados simétricos como asimétricos, es decir, el apilamiento de pieles a una y otra cara del núcleo puede ser idéntica o no.

El esquema de laminación llevado a cabo en la construcción de la nave se muestra en la siguiente tabla.

	ESQUEMA MAMPARO MASTIL	gr/m <sup>2</sup>	ORIENTACION
1	E-BX-1700	613	±45
2	E-BX-1700	613	±45
3	E-BX-1700	613	±45
4	E-BX-1700	613	±45
5	E-BX-1700	613	±45
6	20mm 80kg/m <sup>3</sup> P.V.C. foam		
7	E-BX-1700	613	±45
8	E-BX-1700	613	±45
9	E-BX-1700	613	±45
10	E-BX-1700	613	±45
11	E-BX-1700	613	±45

**TABLA 4.1.1 ESQUEMA DE LAMINACION PROPUESTA ORIGINAL**

Como se puede apreciar, el esquema esta compuesto únicamente de fibras biaxiales con una orientación de  $\pm 45^\circ$  respecto de la horizontal y un gramaje de 613 gr/m<sup>2</sup>, con un núcleo de 20 mm de espesor de PVC y con una densidad de 80 kg/m<sup>3</sup>.

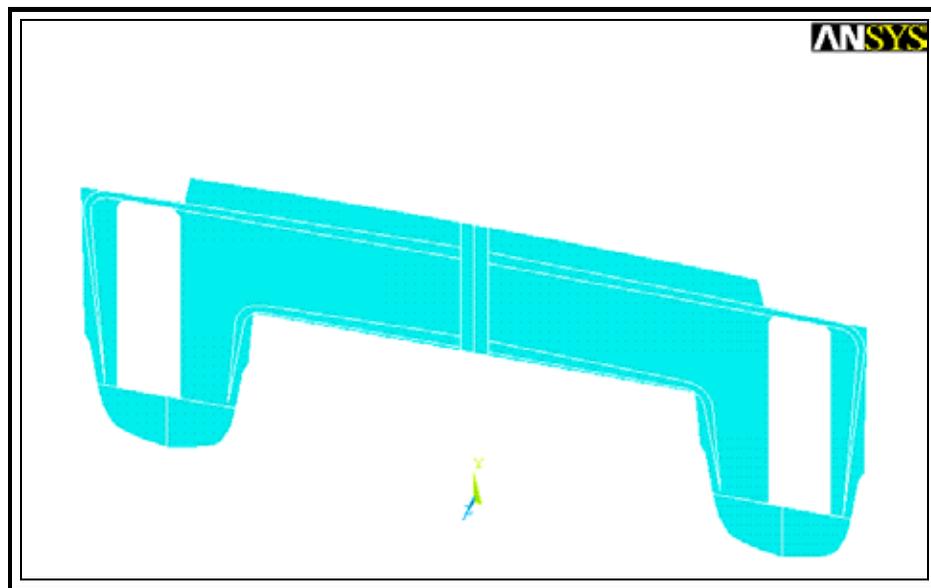
El resto de los esquemas de laminación siguen una estructura similar al mostrado anteriormente.

En tanto las vigas monolíticas y la columna de soporte están compuestas de un total de 20 laminas unidireccionales; al apilar esta cantidad de láminas se iguala el espesor final del mamparo con el espesor del laminado mostrado en la tabla anterior.

#### **4.1.3 – MODELO DE ELEMENTOS FINITOS**

En el modelo de elementos finitos desde un principio es necesario modelar áreas que representen a las vigas monolíticas y columna de soporte, para de esta manera, asignar de manera correcta y con mayor facilidad, las propiedades mecánicas que le corresponden a estas zonas.

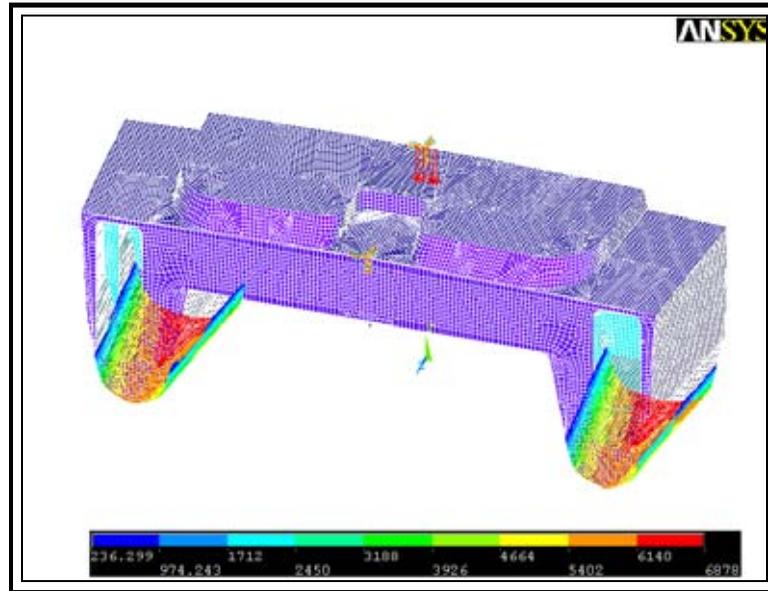
En la figura 4.1.2 se observan las áreas que representan al mamparo en estudio.



**FIGURA 4.1.2 MODELO GEOMETRICO MAMPARO MASTIL**

Como puede observarse, así como el resto de la estructura, el mamparo es plenamente simétrico respecto de la crujía de la nave.

El sistema de cargas al cual serán sometidos todos los diseños estructurales a analizar se presenta gráficamente en la figura 4.1.3, se puede observar la presión hidrostática aplicada en el calado especificado anteriormente, las condiciones de borde adoptadas y la carga producto del mástil, la cual ha sido aplicada en 6 nodos como carga puntual, precisamente sobre la columna monolítica que es donde cae el mástil.

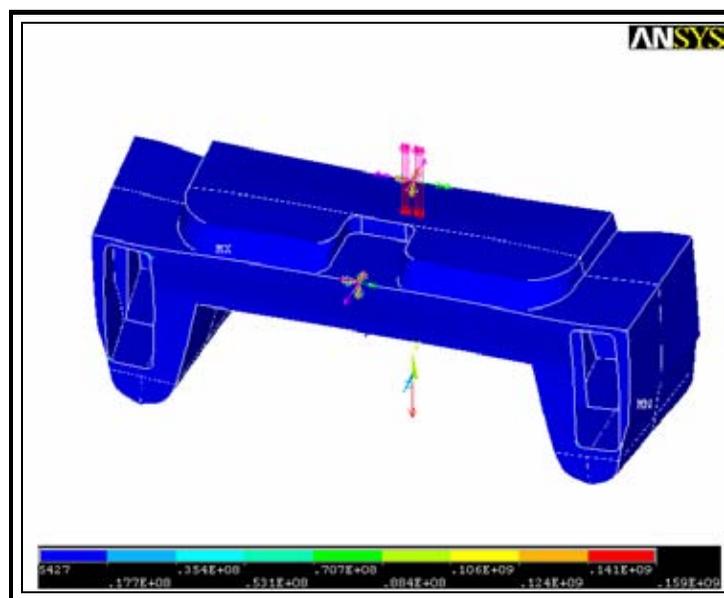


**FIGURA 4.1.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE MAMPARO MASTIL**

#### **4.1.4 – RESULTADOS DEL ANALISIS ESTATICO.**

Para las condiciones de carga antes descritas se llevo a cabo un análisis estático lineal a fin de conocer deformaciones y tensiones en el bloque en estudio.

Los resultados de este primer análisis se presentan en la figura

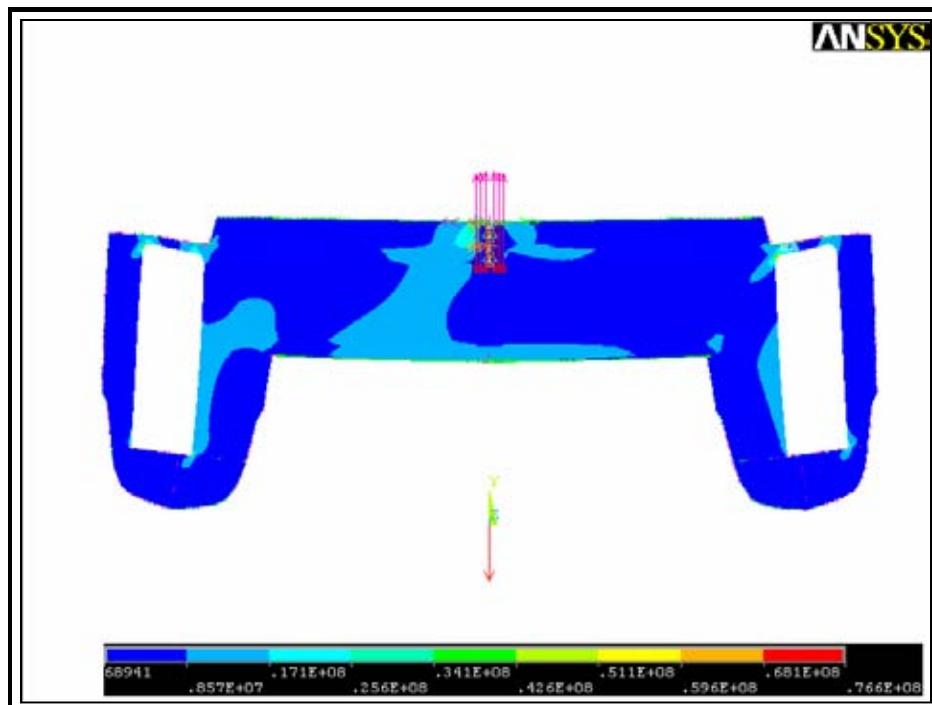


**FIGURA 4.1.4 ESFUERZOS GLOBALES**

Si bien los esfuerzos máximos encontrados son de un orden bastante alto, estos están concentrados en puntos típicos de concentración de tensiones, como lo son las uniones de paneles, sin embargo, estas zonas son reforzadas y las uniones prolijamente diseñadas de modo que los laminados, en la realidad, cambian su configuración en estas zonas siendo reforzados con mas pieles, sin lugar a dudas, el modelar este tipo de detalles seria poco eficiente a la hora de realizar un cálculo como el que se ha llevado a cabo, basta con tener presente que las tensiones que se encuentren en estos puntos son poco representativas puesto que no se ha modelado la unión por la complejidad que esto acarrea en un cálculo estructural.

Como puede apreciarse el punto con un mayor nivel de tensiones se encuentra precisamente en una unión angular entre paneles, este problema ha sido solucionado a la hora de llevar a cabo la construcción de la nave y por ende no es una tensión significativa.

En particular la zona que nos interesa estudiar se encuentra sometida al nivel de tensiones y deformaciones que se muestran en las figuras siguientes.

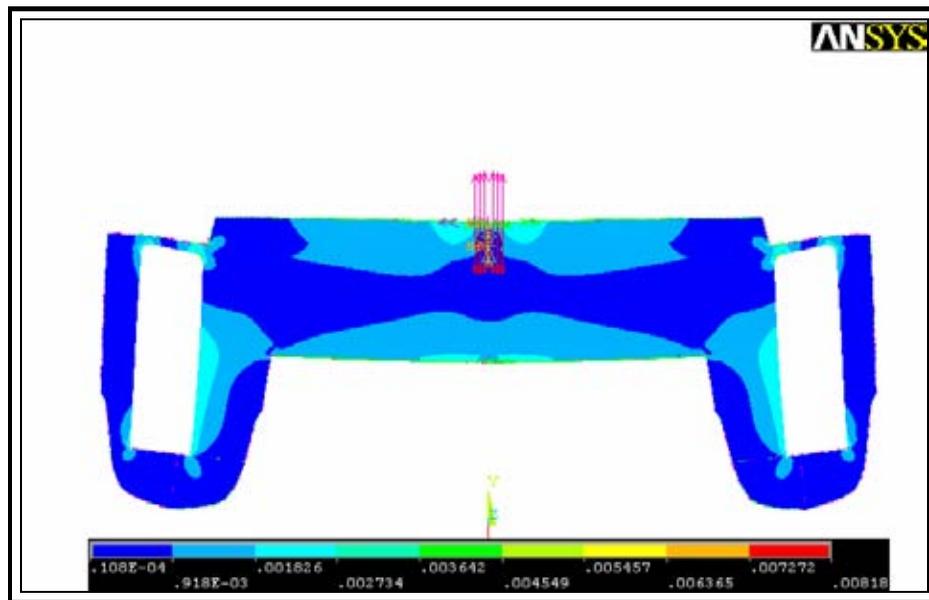


**FIGURA 4.1.5 ESFUERZOS EN MAMPARO MASTIL**

Nuevamente se muestra una situación en la que los esfuerzos máximos están elevados, sin embargo estos se presentan en una de las esquinas de la abertura del mamparo, esta es una de las zonas en las cuales se refuerza con telas unidireccionales para formar un marco el cual reduce este nivel de esfuerzo por lo que nuevamente nos

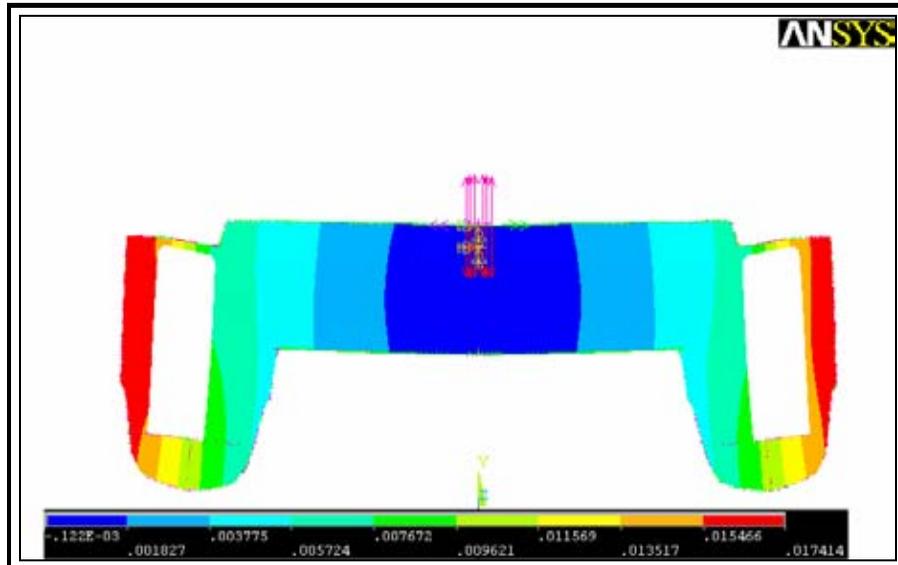
encontramos con un punto poco significativo, determinándose así que el nivel de tensiones máximo se encuentra en el orden de los 45 MPa, los esfuerzos mostrados corresponden al esfuerzo de Von Mises.

La distribución asimétrica de esfuerzos se debe a lo que se había citado anteriormente en cuanto al uso de la herramienta Inertia Relief de Ansys, que si bien determina un campo de aceleraciones angulares y lineales para evitar el movimiento del bloque, genera pequeños desplazamientos de sólido rígido, en este caso se genero una rotación del bloque en torno al eje Z, sin embargo la validez de los resultados se justifica con la distribución de los estiramientos en el modelo y que se muestran en la figura 4.1.6.



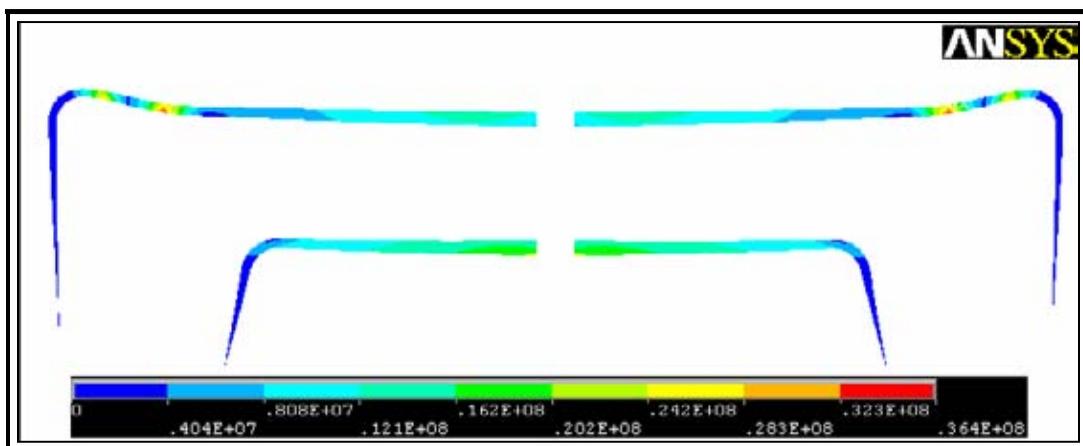
**FIGURA 4.1.6 ESTIRAMIENTOS EN MAMPARO MASTIL**

Como se puede apreciar los estiramientos poseen una distribución simétrica con lo cual se validan los esfuerzos obtenidos anteriormente ya que los resultados a nivel elemental son efectivamente simétricos, por lo demás y a fin de complementar el estudio se presentan los resultados de deformación en el sentido vertical del mamparo en estudio y como se muestra en la figura 4.1.4 es en la zona del mamparo mástil donde se producen las mayores deformaciones verticales que alcanzan un valor máximo de 17 mm.



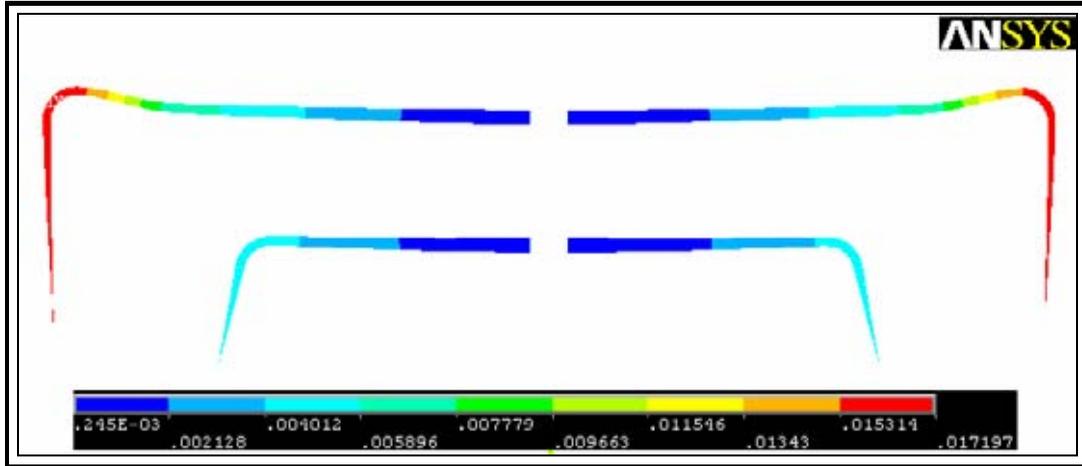
**FIGURA 4.1.7 DEFORMACION VERTICAL EN MAMPARO MASTIL**

Por ultimo a continuación se muestran las tensiones y deformaciones verticales de las vigas monolíticas presentes en el mamparo mástil para corroborar el real aporte de estas a la estructura global.



**FIGURA 4.1.8 TENSIONES EN VIGAS MONOLITICAS**

Las tensiones máximas se encuentran en la zona donde comienzan los radios en la viga superior, en esta zona se reduce la sección de la misma, y alcanza un valor de 36 MPa, el cual es menor al esfuerzo máximo en el mamparo, que mostró un valor de 45 MPa.



**FIGURA 4.1.9 DEFORMACION VERTICAL EN VIGAS MONOLITICAS**

Las deformaciones máximas se encuentran en la zona vertical de las vigas alcanzando un valor de 17 mm.

En resumen las tensiones y deformaciones tanto en el mamparo como en las vigas y el peso del bloque se presentan en la tabla siguiente

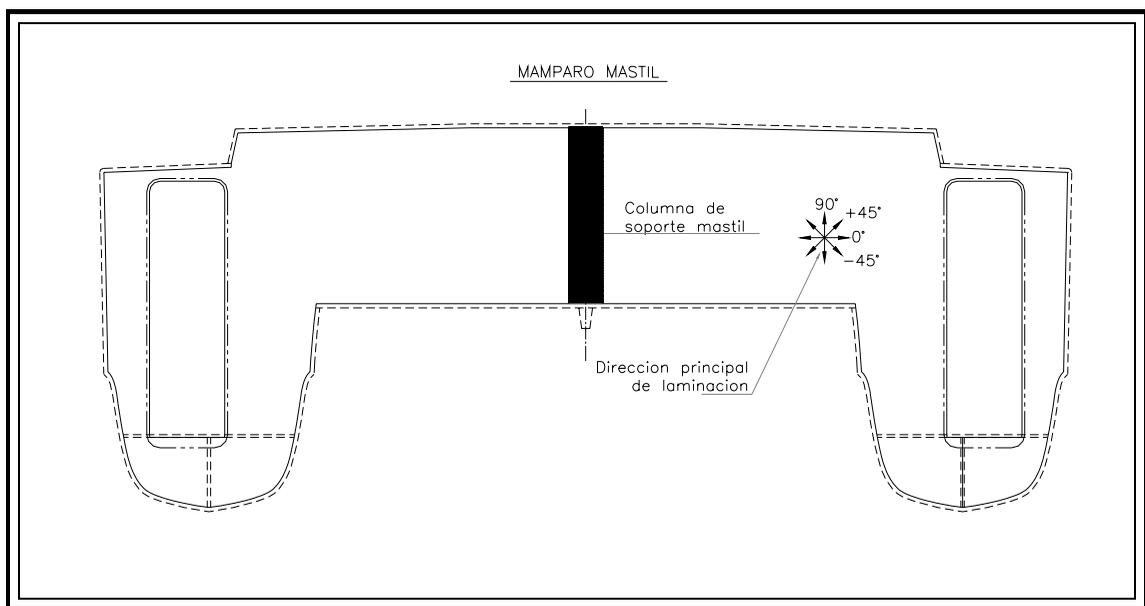
Parámetro	Unidades	Vigas	Mamparo
Esfuerzo	MPa	36	45
Deformación vertical	m	0.017	0.017
Peso	Kg	955	

**TABLA 4.1.2 RESUMEN DE RESULTADOS PROPUESTA ORIGINAL**

## **4.2 – DESCRIPCION DE PROPUESTA ESTRUCTURAL BASADA EN LA LITERATURA TECNICA CONSULTADA**

### **4.2.1 – GENERALIDADES**

La propuesta estructural a analizar a continuación nace del libro *Sailing Yacht Design Practice* de los autores *Claughton, Wellicome and Sheno* (ref. 12) en este texto se muestra el diseño de un catamarán de placer de características muy similares a la nave en estudio, en esta propuesta se da una configuración de laminados mucho mas sencilla que la anteriormente mostrada , puesto que como se vera en la figura 4.2.1, se considera la presencia de un esquema de laminado clásico a excepción de la columna central de soporte que se encuentra en la mayor parte de los diseños consultados para este trabajo.



**FIGURA 4.2.1 CONFIGURACION DE MAMPARO SEGÚN LITERATURA TECNICA**

Se aprecia que la construcción adoptando este esquema de laminación se torna mucho mas sencillo, ya que solo considera pieles biaxiales y el núcleo de PVC que conforma la estructura sándwich.

Un aspecto a resaltar es la presencia de fibras en el sentido vertical, es decir orientadas en 90° respecto de la horizontal.

#### 4.2.2 – CARACTERISTICAS DE LOS ESQUEMAS DE LAMINADO PRESENTES EN LA ESTRUCTURA

El esquema de laminado que se presenta en esta publicación considera la siguiente secuencia de apilamiento de pieles.

	ESQUEMA MAMPARO MASTIL	gr/m <sup>2</sup>	ORIENTACION
1	E-BX-1700	613	90/0
2	E-BX-1700	613	±45
3	E-BX-1700	613	90/0
4	E-BX-1700	613	±45
5	E-BX-1700	613	90/0
6	E-BX-1700	613	±45
7	20mm 80kg/m <sup>3</sup> P.V.C. foam		
8	E-BX-1700	613	±45
9	E-BX-1700	613	90/0
10	E-BX-1700	613	±45
11	E-BX-1700	613	90/0
12	E-BX-1700	613	±45
13	E-BX-1700	613	90/0

**TABLA 4.2.1 ESQUEMA DE LAMINACION SEGÚN LITERATURA TECNICA**

Se considera la presencia de dos pieles mas con respecto al esquema anterior, una a cada lado del núcleo manteniendo la simetría del laminado.

Al haber quitado las vigas monolíticas, se aprecia una disminución en el peso de la estructura que da una ventaja inmediata frente a la propuesta anterior.

#### 4.1.3 – MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

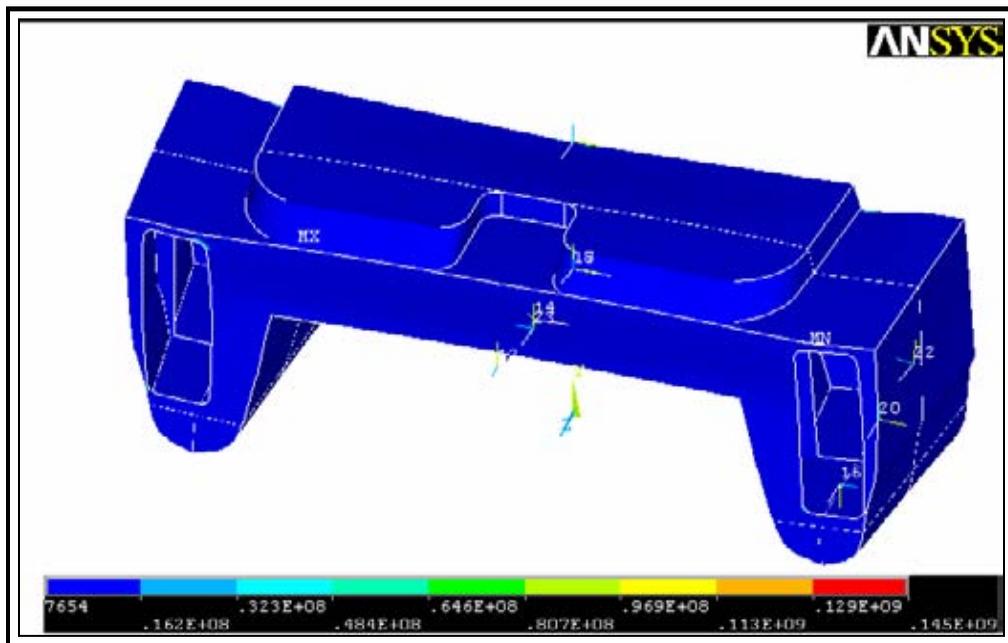
Sobre el modelo de elementos finitos mostrado en la sección anterior, se pueden realizar ilimitados cambios en su configuración, en este caso simplemente se dio a los elementos presentes en las áreas que representan a las vigas monolíticas las propiedades del resto del laminado del mamparo, con esto se demuestra la versatilidad

del programa a la hora de hacer cambios y lograr probar una serie de alternativas de forma expedita y con resultados en corto plazo.

El sistema de cargas al que se encuentra sometido el modelo de elementos finitos es idéntico a anterior.

#### 4.2.4 – RESULTADOS DEL ANALISIS ESTATICO.

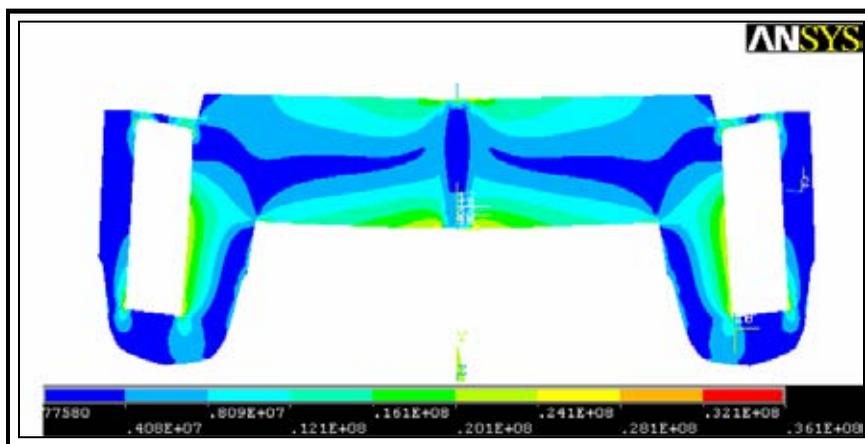
Luego de completar el análisis estático los resultados globales se muestran a continuación en la figura 4.2.2



**FIGURA 4.2.2 ESFUERZOS GLOBALES**

Nuevamente los esfuerzos máximos se dan en la zona de cubierta donde se genera una unión angular, pero esta tensión no es significativa.

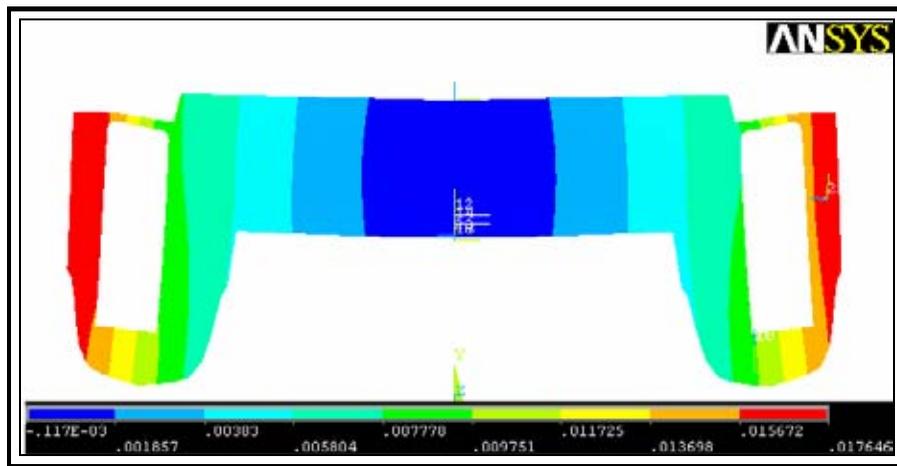
Las tensiones presentes en la zona de interés se muestran en la figura 4.2.3



**FIGURA 4.2.3 ESFUERZOS GLOBALES EN MAMPARO MASTIL**

En este caso la tensión máxima se presenta en la zona de cubierta en donde se apoya el mástil sobre el mamparo, llegando a un valor de 36 [MPa], es destacable el hecho que quitar las vigas monolíticas genero una disminución notable en las tensiones y en el peso de la estructura, por lo demás, se eliminaron los puntos de concentración de tensiones en los marcos de las aberturas del mamparo y la distribución del esfuerzo se torna mucho mas homogénea.

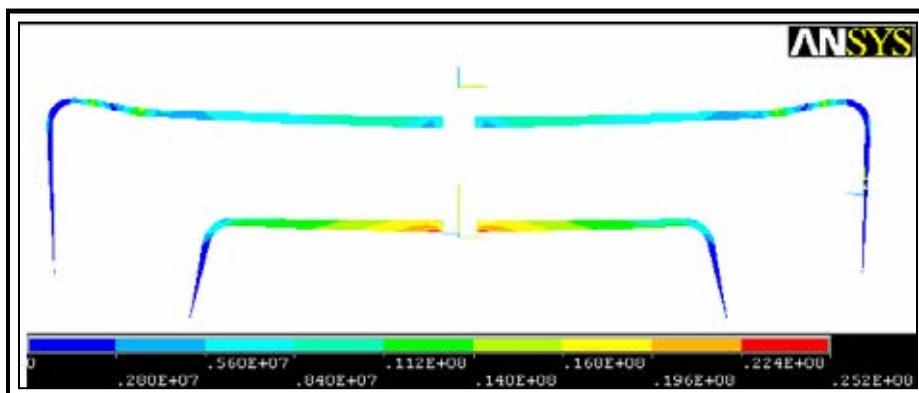
Los desplazamientos en la dirección vertical del mamparo se presentan en la figura 4.2.4



**FIGURA 4.2.4 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES EN MAMPARO MASTIL**

Nuevamente los resultados globales de deformación indicaron que su máximo valor se alcanza en la zona del mamparo mástil y corresponden a un valor de 17 mm similar a lo que se había obtenido anteriormente, es interesante el hecho que se haya disminuido el nivel de las tensiones manteniéndose el nivel de las deformaciones verticales, además se puede apreciar una leve asimetría en los desplazamientos debido al uso de la herramienta Inertia Relief.

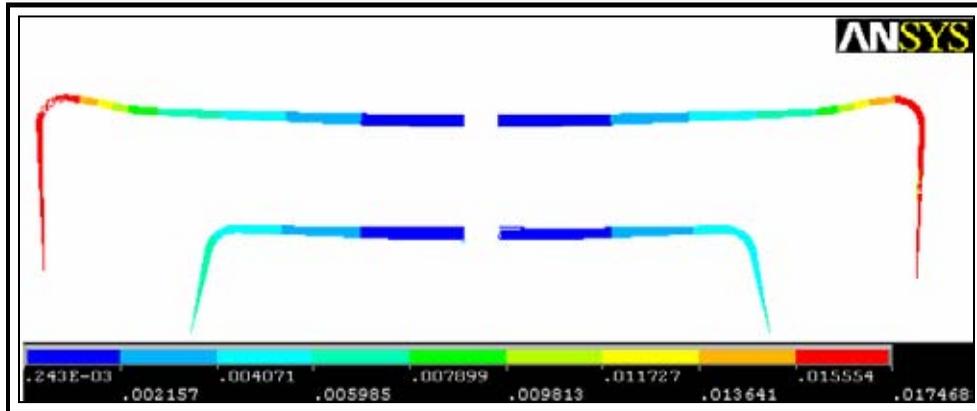
A fin de tener una visión de lo que ocurre en la zona en donde se modifico la configuración estructural, se muestran los esfuerzos y deformaciones en las áreas que antes comprendían la presencia de las vigas en el mamparo.



**FIGURA 4.2.5 ESFUERZOS EN AREAS CORRESPONDIENTES A LA POSICION DE VIGAS MONOLITICAS**

La tensión máxima se encuentra ubicada en la zona de la viga inferior, en la unión entre esta, la columna y el underwing alcanzando un valor máximo de 25 MPa lo cual es bastante menor que la tensión encontrada en el caso anterior, por lo demás nuevamente se obtiene una distribución mucho mas homogénea del esfuerzo en las vigas y la presencia de puntos altamente tensionados es prácticamente nula.

En cuanto a las deformaciones se obtiene lo siguiente.



**FIGURA 4.2.6 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES EN AREAS CORRESPONDIENTES A LA POSICION DE VIGAS MONOLITICAS**

La deformación máxima en el sentido vertical se da en la zona donde antes estaba la viga superior y alcanza un valor de 17 mm.

En resumen las tensiones y deformaciones tanto en el mamparo como en las vigas y el peso del bloque en esta condición de estudio se presentan en la tabla 4.2.2

Parámetro	Unidades	Zona de Vigas	Mamparo
Esfuerzo	MPa	25	36
Deformación vertical	m	0.017	0.017
Peso	Kg	923	

**TABLA 4.2.2 RESUMEN DE RESULTADOS PROPUESTA LITERATURA TECNICA**

## CAPITULO V

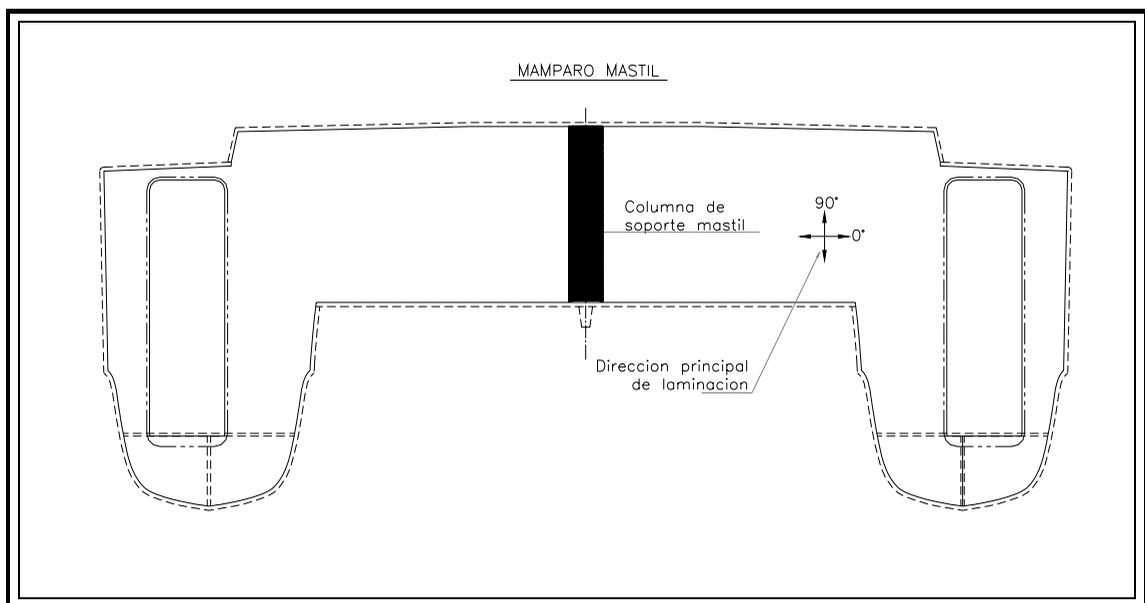
### PROPUESTA ESTRUCTURAL

#### 5.1 – DESCRIPCION DE NUEVA PROPUESTA ESTRUCTURAL BASADA EN LOS RESULTADOS ANTERIORES

##### 5.1.1 – GENERALIDADES

La propuesta a analizar a continuación se basa en los resultados anteriormente obtenidos y en una serie de iteraciones de cálculo en las cuales se vario tanto las fibras como la orientación de las mismas en el mamparo mástil, considerando que la presencia de la columna central de soporte se encuentra presente en la mayoría de los diseños consultados en la literatura técnica disponible, esta se mantiene sin mayor discusión, las vigas monolíticas, por comprobar en el segundo caso de estudio que su aporte en mínimo, han sido suprimidas, en tanto que para el laminado propiamente tal, se considera la presencia de fibras orientadas en el sentido vertical por el buen resultado obtenido en el segundo caso de estudio, por lo demás, la facilidad de construcción es otro punto que se consideró en esta propuesta , de este modo se trato de trabajar solo con un tipo de pieles en el mamparo y con la menor cantidad de las mismas de modo de lograr una laminación sencilla y rápida a la vez que impida el cometer errores al apilar las pieles.

Considerando todo lo anteriormente descrito se opto por trabajar con pieles triaxiales cuyas direcciones principales se ven en la figura 5.1.1



**FIGURA 5.1.1 PROPUESTA ESTRUCTURAL MAMPARO MASTIL**

### 5.1.2 – CARACTERISTICAS DE LOS ESQUEMAS DE LAMINACION PRESENTES EN LA ESTRUCTURA

El esquema de laminado que se propone considera la siguiente secuencia de apilamiento de pieles.

	ESQUEMA MAMPARO MASTIL	gr/m <sup>2</sup>	ORIENTACION
1	E-TLX-3300	1170	90
2	E-TLX-3300	1170	0
3	E-TLX-3300	1170	90
4	20mm 80kg/m <sup>3</sup> P.V.C. foam		
5	E-TLX-3300	1170	90
6	E-TLX-3300	1170	0
7	E-TLX-3300	1170	90

**TABLA 5.1.1 ESQUEMA DE LAMINACION PROPUESTO**

Como se puede apreciar, es un laminado muy sencillo a la hora de construir, con la única consideración que existen dos direcciones principales para la fibra central presente en el triaxial considerado, esto para mantener una fibra en la dirección vertical.

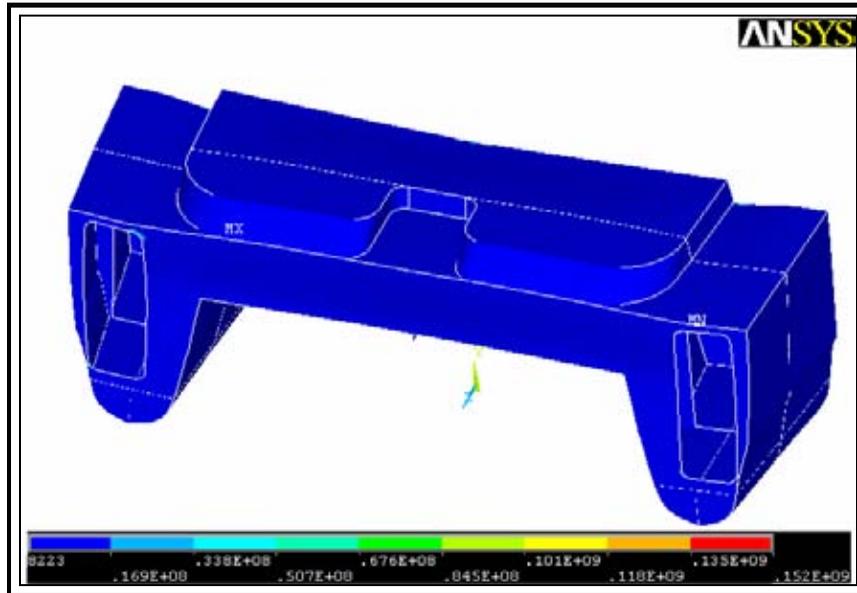
### 5.1.3 – MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Nuevamente aprovechando la facilidad que entrega Ansys a la hora de hacer cambios, se modifico el esquema presente en el mamparo mástil ingresando las orientaciones y espesores de fibras que correspondían, la geometría se mantiene en todo momento invariable tan solo se procuro eliminar las vigas y establecer un único laminado para el mamparo en estudio.

Al igual que la geometría el sistema de cargas y las condiciones de borde se mantienen sin variaciones.

#### 5.1.4 – RESULTADOS DEL ANALISIS ESTATICO.

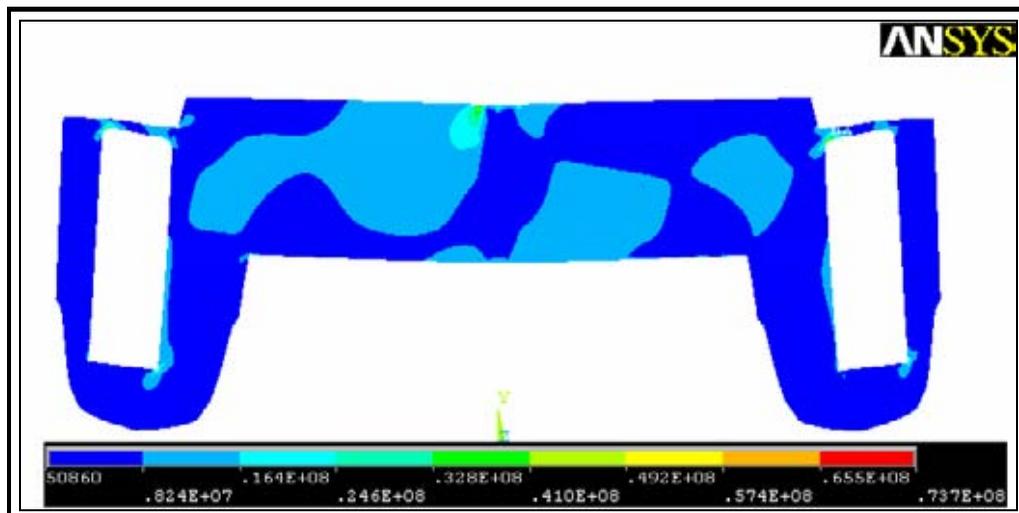
Luego de completar el análisis estático los resultados de esfuerzos globales se muestran a continuación en la figura 5.1.2



**FIGURA 5.1.2 ESFUERZOS GLOBALES**

Nuevamente se repite la zona de máximo esfuerzo, es decir en una unión angular en la cubierta de la nave, pero ya se ha comentado que en esta zona existe la presencia de pieles extras que no son modeladas por la complejidad y poca eficiencia que esto trae consigo, por lo demás, es absolutamente esperable que esta situación aparezca en la zona citada.

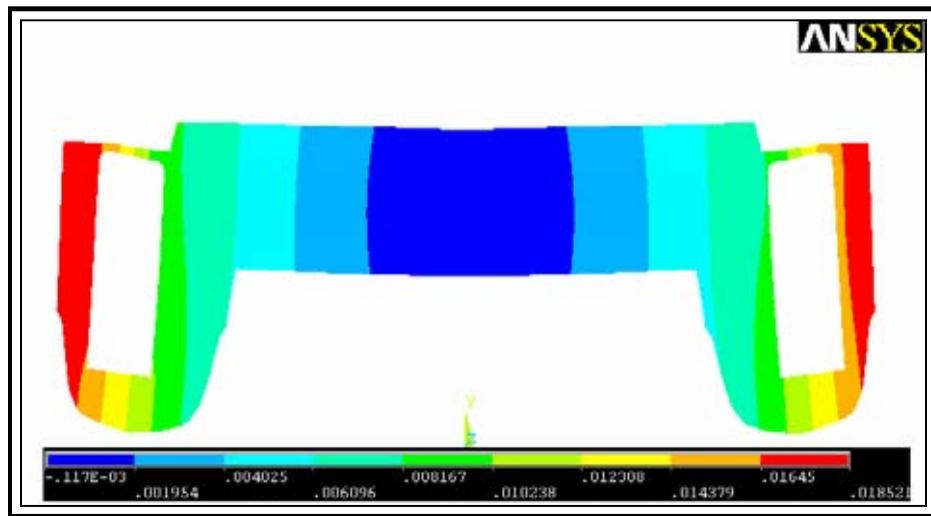
Los esfuerzos existentes en el mamparo de soporte se muestran en la figura 5.1.3



**FIGURA 5.1.3 ESFUERZOS GLOBALES EN MAMPARO MASTIL**

Se presenta una distribución asimétrica de tensiones puesto que al usar la herramienta Inertia Relief, como ya se mencionó, se producen pequeños desplazamientos de sólido rígido, en este caso una rotación en el eje de crujía, teniendo en cuenta esto se puede observar que los esfuerzos máximos se dan en la zona del marco de la abertura en el mamparo, zona reforzada en la construcción por tanto de poco interés, los esfuerzos máximos significativos se encuentran en un orden los 36 MPa en la zona superior de la abertura del mamparo, de todas formas es un nivel mas bajo que los obtenidos en la propuesta original.

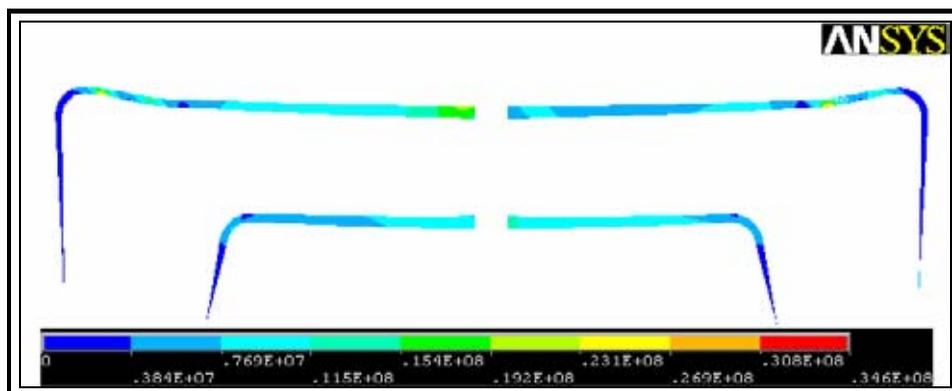
Los niveles de deformación vertical se muestran en la figura 5.1.4



**FIGURA 5.1.4 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES EN MAMPARO MASTIL**

Los máximos valores alcanzados están en las esquinas del mamparo y alcanzan un valor de 18 mm, por lo demás se puede apreciar claramente la rotación del modelo en el eje de crujía. Se aprecia un leve aumento en el valor de las deformaciones, sin ser este excesivo.

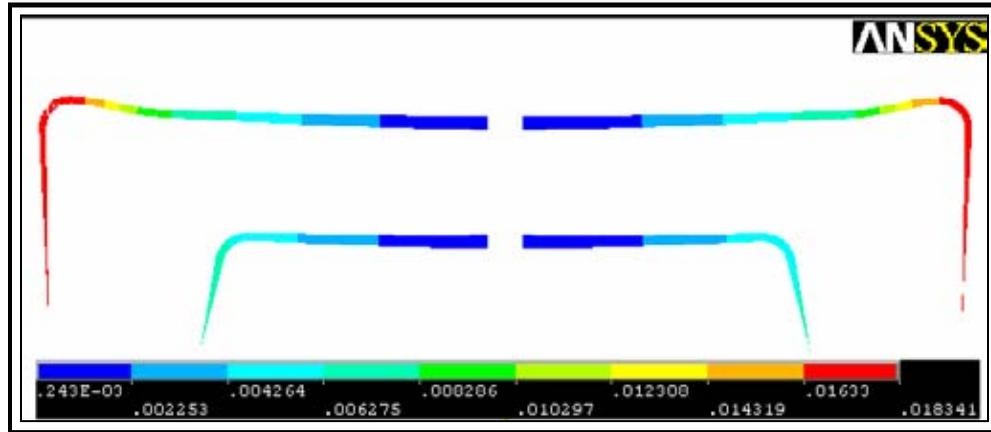
En la zona que albergaba las vigas monolíticas se encontraron los siguientes valores de tensión y deformación.



**FIGURA 5.1.5 ESFUERZOS EN AREAS CORRESPONDIENTES A LA POSICION DE VIGAS MONOLITICAS**

La zona de mayor tensión se presenta en la zona que contenía a la viga superior y alcanza un valor de 36 MPa ya que se encuentra inserta en la zona de concentración de tensiones en la zona del marco de la gran abertura del mamparo, es la misma zona donde se encuentran los esfuerzos máximos en el mamparo.

En cuanto a las deformaciones se obtuvieron los siguientes resultados mostrados en la figura 5.1.6



**FIGURA 5.1.6 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES EN AREAS CORRESPONDIENTES A LA POSICION DE VIGAS MONOLITICAS**

Los resultados corresponden precisamente a los máximos valores encontrados para el mamparo y alcanza un valor de 18 mm en la zona que albergaba a la columna superior.

En la tabla 5.1.2 se presenta el resumen de los resultados obtenidos para esta propuesta estructural.

Parámetro	Unidades	Zona de Vigas	Mamparo
Esfuerzo	MPa	36	36
Deformación vertical	m	0.018	0.018
Peso	Kg	913	

**TABLA 5.1.2 RESUMEN DE RESULTADOS PROPUESTA**

### 5.1.5 – RESUMEN Y CONCLUSIONES PRELIMINARES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LAS TRES PROPUESTAS ESTUDIADAS

Un resumen de fácil interpretación es el que se muestra en la tabla 5.1.3 a fin de poder obtener las conclusiones preliminares del estudio.

	Parámetro	Esfuerzo	Deformación Vertical	Peso Bloque
	Unidades	MPa	m	Kg
Propuesta Nº 1	Mamparo	45	0.017	955
	Vigas	36	0.017	
Propuesta Nº 2	Mamparo	36	0.017	923
	Zona de Vigas	25	0.017	
Propuesta Nº 3	Mamparo	36	0.018	913
	Zona de Vigas	36	0.018	

**TABLA 5.1.3 RESUMEN DE RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES ESTRUCTURALES ESTUDIADAS**

Como se puede observar mediante la tabla anterior, tanto en la configuración de laminado extraída de la literatura consultada como en la generada en este trabajo de tesis, se obtuvo una reducción significativa del esfuerzo global en el mamparo, alcanzándose una disminución de un 20% en el esfuerzo y 42 kilos de peso para la propuesta tres con respecto a la propuesta original de la nave, aunque con un leve aumento de las deformaciones verticales.

Se puede concluir que la zona en donde se encontraban ubicadas las vigas monolíticas no corresponde a una zona de altas tensiones por lo que su posición es cuestionable y su existencia absolutamente innecesaria ya que queda establecido que un esquema de laminación mucho mas sencillo y liviano es capaz de soportar las mismas cargas con niveles de esfuerzo bastante mas bajos y con una disminución de peso cercana al 5% , lo que para cualquier estructura naval representa una situación optima, menos peso con los mismos niveles de tensiones.

Como futuras líneas de estudio, se recomienda la modelación completa de la nave para estudiar con mayor detalle los estados tensionales no solo del mamparo mástil sino del resto de las zonas y lograr una plena optimización estructural.

## CONCLUSIONES

Como conclusión se puede mencionar el hecho que se logro el objetivo de encontrar un laminado que eliminara el uso de vigas monolíticas en la estructura para así obtener un laminado que implique menores costos en su construcción por la reducción de horas hombre que se tiene al hacer un laminado sencillo como el que se llevo a presentar en la tercera propuesta estudiada.

Por otra parte se logro una reducción en los esfuerzos de un 20% respecto de la propuesta original y un 5% en el peso de bloque, con la tercera propuesta estudiada la cual se baso principalmente en los resultados de la segunda propuesta estudiada, con lo que se determina que el uso de fibras en sentido vertical aporta un significativo cambio en la distribución de los esfuerzos en la zona de soporte del mástil.

La presencia de la columna de soporte se mantuvo en todas las alternativas estudiadas y su uso en futuras construcciones es recomendable por ser el soporte del mástil y la estructura encargada de transmitir los esfuerzos a la estructura longitudinal de la nave.

Se puede establecer que la alternativa propuesta en esta tesis es plenamente valida para ser utilizada en futuras construcciones, ya que como se demostró mediante el cálculo a través del método de elementos finitos, reduce los esfuerzos manteniendo prácticamente el mismo nivel en las deformaciones.

Como futuras líneas de estudio, se recomienda la modelación completa de la nave para estudiar con mayor detalle los estados tensionales no solo del mamparo mástil sino del resto de las zonas y lograr una plena optimización estructural, por otro lado la obtención de las propiedades mecánicas de los laminados mediante ensayos sería la manera mas certera de realizar una optimización estructural puesto que al basarse en los lineamientos de los reglamentos de clasificación, como en este trabajo, siempre se esta por debajo de los limites reales del material.

## BIBLIOGRAFIA

1. Understanding Rigs and Rigging.
  - Richard Henderson
2. Elements of Yacht Design.
  - Norman L. Skene
3. El Método de los Elementos Finitos
  - O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor
4. Introducción a los Materiales Compuestos Aplicados a Ingeniería Naval.
  - Dr. Richard Luco Salman
5. Materiales Compuestos Tecnología de los Plásticos Reforzados.
  - J. L. González Diez
6. Rules for the Construction and Classification of High Speed Craft.
  - Bureau Veritas
7. Principles of Yacht Design
  - Lars Larsson    Rolf Eliasson
8. Ansys User Manual
  - Ansys
9. Mechanics of Composite Structures
  - Laszlo P. Kollar    George S. Springer
10. Divinycell Technical Data
  - Dininycell
11. Correlación de Tensiones y Deformaciones entre Hélices de Distintos Materiales Mediante el Método de Elementos Finitos.
  - Rodrigo Sepulveda Benavides

12. Yacht Design Theory and Practice.

- Claughton , Wellicome and Sheno

13. Análisis Estático, Modal y Transiente de una Embarcación Catamarán de Materiales Compuestos, Sometida a Carga de Slamming, Usando el Método de Elementos Finitos.

- Roberto Ojeda Rabanal.

14. Theory of Plates and Shells

- Timoshenko and W. Krieger