

Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Escuela de Ingeniería Acústica



Profesor Patrocinante:
Dr. Jorge Arenas Bermúdez
Instituto de Acústica
Universidad Austral de Chile

*Una metodología para estimar numéricamente
la radiación sonora de placas vibratorias*

Tesis presentada como parte
de los requisitos para optar al
Grado Académico de Licenciado
en Acústica y al Título Profesional
de Ingeniero Acústico.

Cristóbal Andrés Albarracín González
Valdivia, Chile
2007

INDICE

1.-Introducción

Resumen.....	2
Abstract.....	3
Introducción.....	4

2.-Objetivos

Objetivo general.....	5
Objetivos específicos.....	5

3.-Marco Teórico

Vibración de placas.....	6
Teoría de la matriz de resistencia de radiación.....	18
Radiación sonora de una placa montada sobre un sonodeflector infinito.....	20
Discretización de una placa elíptica.....	21
Discretización de placas circulares, anulares y rectangulares.....	24

4.-Resultados numéricos

Placas elípticas.....	27
Modos de radiación.....	28
Modos estructurales axisimétricos.....	33
Placas anulares.....	34
Modos de radiación.....	34
Modos estructurales axisimétricos.....	36
Placas rectangulares.....	37
Modos de radiación.....	37
Modos estructurales	41

5.-Análisis de resultados.....

6.-Conclusiones.....

7.-Agradecimientos.....

8.-Referencias Bibliográficas.....

Apéndice.....

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método para estimar la radiación sonora de placas vibratorias. Se asume una placa delgada, homogénea e isotrópica, montada sobre un sonodiflector infinito. El método se basa en la matriz de resistencia que, combinada con el vector de velocidad de volumen sobre la superficie de la placa, permite calcular la potencia acústica total radiada. La estructura es discretizada en elementos virtuales de igual superficie y simulada por un número finito de pequeños pistones de igual área, montados sobre la superficie. El área de cada pistón es equivalente a la del elemento de superficie que representa. Mediante un análisis de autovalores de la matriz de resistencia se obtienen los modos de radiación. Además, es posible estimar numéricamente la eficiencia de radiación de algunos modos estructurales de vibración axisimétricos para ciertas geometrías simples. Subsecuentemente, el método es aplicado a placas elípticas de diferentes excentricidades y los resultados son comparados con otras teorías presentadas en la literatura, para evaluar la precisión del método. Se concluye que el método es bastante preciso para frecuencias bajo la frecuencia crítica, pero altamente dependiente del número de elementos utilizados. Este trabajo ha sido financiado por el proyecto DID-UACH No 200501 y por el proyecto FONDECYT No 1060117.

ABSTRACT

This work presents a method to estimate the sound radiation from vibrating plates. A thin, homogeneous, and isotropic baffled plate is assumed. The method is based on the resistance matrix which, combined with the volume velocity vector on the surface of the plate, allows us to calculate the total sound power radiated by the plate. The structure is discretized in small virtual elements of equal surface and it is simulated by a finite number of circular pistons of equal area flush mounted on the surface. Each piston has an area equivalent to that of its corresponding surface element. The radiation modes are obtained by performing an eigenanalysis of the resistance matrix. In addition, it is possible to estimate the radiation efficiency of some axisymmetric structural vibration modes for some simple geometries. Furthermore, the method is applied to elliptical plates of different eccentricities and the results are compared with other theories reported in literature, in order to evaluate the precision of the approach. It is concluded that this method is very accurate for frequencies below the critical frequency, but highly dependent on the number of elements used. This work has been supported by project DID-UACH No 200501 and by project FONDECYT No 1060117.

1. INTRODUCCIÓN

Los radiadores tipo placa son un importante campo de estudio dentro de la teoría acústica. Existen numerosos métodos para estimar la potencia acústica radiada por placas vibratorias de diferentes geometrías. Sin embargo, la mayoría de ellos requieren de cálculos muy complejos o de un gran número de operaciones, lo que resulta ser computacionalmente muy costoso.

El objetivo de esta tesis es aplicar el método de la Matriz de Resistencia de Radiación, que permite calcular la eficiencia de radiación de los modos radiantes de una placa vibratoria elíptica, delgada, homogénea e isotrópica. Para este propósito, es necesario dividir virtualmente la estructura vibratoria en pequeños elementos de igual superficie y simularlos por medio de pistones circulares rígidos de superficie equivalente, montados sobre un sonodeflector infinito.

La matriz de resistencia es independiente de las condiciones de contorno y depende solamente de la geometría de la placa. Sus autovalores son proporcionales a la eficiencia de radiación de los modos radiantes y sus autovectores corresponden a la distribución de velocidad sobre la placa de cada modo radiante.

Este método permite estimar la potencia acústica total radiada por una placa vibratoria de una manera rápida y computacionalmente eficiente.

Los resultados obtenidos serán comparados con resultados existentes en la literatura, de manera de evaluar la precisión del método. Se presentan también algunos resultados para placas rectangulares[1], anulares[2] y circulares[3].

2. OBJETIVOS

a) Objetivo General:

- Aplicar el método de la matriz de resistencia de radiación para estimar la eficiencia de radiación de una placa elíptica, sus modos radiantes y la forma de éstos, comparando los resultados obtenidos con los reportados en la literatura técnica.

b) Objetivos Específicos:

- Discretizar la superficie de una placa elíptica en elementos de igual tamaño y uniformemente espaciados.
- Programar una rutina en Matlab capaz de calcular la matriz de resistencia de radiación en forma eficiente, para placas de cualquier geometría y para un rango de frecuencias dado. La rutina debe tener como datos de ingreso un vector de coordenadas de los puntos centrales de cada elemento virtual, el rango de frecuencia y el tamaño del elemento virtual de superficie.
- Obtener resultados computacionales para la impedancia de radiación, incluyendo la parte imaginaria de la matriz de radiación.
- Realizar simulaciones para placas elípticas de distintas excentricidades.
- Realizar simulaciones para placas circulares, anulares y rectangulares, tratando de optimizar la eficiencia del método utilizado por otros autores, para esas geometrías.
- Programar una rutina en Matlab que permita calcular los modos estructurales axisimétricos de vibración para el caso particular de excentricidad nula (placa circular).

3. MARCO TEÓRICO

3.1 VIBRACIÓN DE PLACAS [4]

De manera similar al fenómeno vibratorio de barras, las placas tienen una rigidez de flexión, que es el elemento que proporciona la fuerza de restauración a la deformación. Sin embargo, existe una diferencia entre la flexión de barras y placas. La barra es un sistema en una dimensión. Cuando se dobla, una parte de ella es sometida a tensión y la otra a compresión, con el eje neutral actuando como división entre ambas regiones. La parte en tensión tiende a comprimirse lateralmente, mientras que la parte en compresión tenderá a expandirse lateralmente. Mientras el ancho de la barra sea pequeño, estas compresiones y expansiones laterales ocurren libremente y no existen tensiones laterales.

En la teoría elemental de barras, el ancho se asume pequeño y los efectos de deformación lateral son ignorados. Sin embargo, a medida que el ancho aumenta, dichos efectos tienden a producir flexión en la sección transversal, de manera que se produce una curvatura del plano de la sección transversal adicionalmente a la curvatura en el plano de flexión. Para explicar esto, imaginemos una placa como una serie de barras delgadas paralelas adyacentes, obtenidas dividiendo la placa por planos verticales. Dos barras adyacentes sin deformación tienen una superficie lateral común. Cuando la placa se dobla, si permitimos a estos elementos adyacentes comportarse como barras, éstos se contraerán y expandirán, de manera que la región que se expanda cruzará la superficie divisoria y pasará a ocupar un espacio que le pertenece al elemento adyacente. De manera similar, la región que se contrae se alejará de esta superficie y dejará un espacio vacío en el material. Claramente, esta situación no es posible, por lo que deben aparecer tensiones laterales internas para prevenir que esto ocurra. En el caso de una placa, uno puede imaginar dos planos de flexión produciendo dos curvaturas distintas. Además de la flexión, existe la torsión, debido a que un elemento de área de la placa puede considerarse como perteneciente a dos franjas ortogonales, de manera que la flexión en un plano puede ser observada como rotación sobre la normal al plano de flexión. Para una franja adyacente esta rotación puede ser diferente, causando una torsión de la franja ortogonal.

La teoría elemental de placas se sustenta en los siguientes supuestos:

- 1.- La deflección, w , de la placa es pequeña comparada con el espesor de la placa h .
- 2.- Las tensiones normales en la dirección transversal a la placa pueden ser ignorados.
- 3.- No existen fuerzas resultantes en la sección transversal de un elemento de la placa. El plano central de la placa no sufre deformación durante la flexión y puede ser considerado como un plano neutral.
- 4.- Cualquier línea de stress normal al plano central, previo a la deformación, seguirá siendo normal al plano normal durante la deformación.

Estos supuestos son razonables para una placa relativamente delgada y sin fuerzas actuando sobre el plano central.

La ecuación diferencial para la vibración de una placa se puede encontrar en muchos textos de teoría de elasticidad. La ecuación para una placa de espesor uniforme y sometida a una carga transversal externa por unidad de área, p , tiene la forma:

$$-D_E \nabla^4 w + p = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad D_E = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.1.1)$$

donde el operador $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ se conoce como operador biarmónico, D_E es la rigidez a la flexión de la placa y ν es el coeficiente de Poisson, que depende de las propiedades elásticas del material. En el caso de vibración libre, $p=0$, por lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$-D_E \nabla^4 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.1.2)$$

que debe satisfacerse sobre toda la superficie de la placa. Además, existen dos condiciones de contorno que deben ser satisfechas en cada punto de la frontera.

Sean n y s las coordenadas en la dirección normal y tangencial a la frontera, de manera que, para un borde empotrado, se tiene:

$$w = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (3.1.3)$$

que corresponden a las condiciones de contorno geométricas. Para un borde con soporte simple, las condiciones de contorno son:

$$w = 0 \quad \text{y} \quad M_n = 0 \quad (3.1.4)$$

donde M_n representa el momento de flexión por unidad de longitud asociado con la sección transversal y cuya normal es n . La primera de las condiciones de contorno es geométrica y la segunda es una condición de contorno natural. En el caso de borde libre las condiciones de contorno son:

$$M_n = 0 \quad y \quad V_n = Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0, \quad (3.1.5)$$

donde V_n es la fuerza vertical, Q_n es la fuerza de corte y M_{ns} es el momento de torsión sobre la dirección n . Todas estas cantidades son definidas por unidad de longitud de la frontera y están asociadas a la sección transversal cuya normal es n .

Las relaciones entre los momentos y las fuerzas de corte y las deformaciones en coordenadas normales y tangenciales son:

$$\begin{aligned} M_n &= -D_E \nabla^2 w + (1-\nu) D_E \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \\ M_{ns} &= (1-\nu) D_E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right), \\ Q_n &= -D_E \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

donde el Laplaciano tiene la forma:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \quad (3.1.7)$$

y R denota el radio de curvatura de la curva de frontera.

Para formular el problema de autovalores, sea:

$$w = Wf, \quad (3.1.8)$$

donde W depende sólo de las coordenadas espaciales y f es una función armónica dependiente del tiempo y de frecuencia ω . Con estas consideraciones, la ecuación (3.1.2) se reduce a:

$$D_E \nabla^4 W = \omega^2 \rho W. \quad (3.1.9)$$

Las condiciones de contorno para un borde empotrado se reducen entonces a:

$$W = 0 \quad y \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0. \quad (3.1.10)$$

Las condiciones de contorno para un borde con soporte simple resultan:

$$W = 0 \quad y \quad \nabla^2 W - (1-\nu) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) = 0, \quad (3.1.11)$$

y, como W es constante sobre los bordes, la ecuación anterior asume la forma simplificada:

$$W = 0 \quad y \quad \frac{\nu}{R} \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = 0. \quad (3.1.12)$$

A lo largo del borde libre, las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \nabla^2 W - (1-\nu) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 W + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} - \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial s} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Para el problema de autovalores, los operadores lineales son:

$$L = D_E \nabla^4, \quad M = \rho. \quad (3.1.14)$$

Ahora, del análisis vectorial se observa que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (uF) &= \nabla u \cdot F + u \nabla \cdot F, \\ \nabla \cdot (\Phi \nabla u) &= \Phi \nabla^2 u + \nabla \Phi \cdot \nabla u, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

donde u y Φ son funciones escalares y F es una función vectorial. Haciendo $F = \nabla \nabla^2 v$ se puede escribir:

$$\begin{aligned} u \nabla^4 v &= u \nabla^2 \nabla^2 v = u \nabla \cdot \nabla \nabla^2 v \\ &= \nabla \cdot (u \nabla \nabla^2 v) - \nabla u \cdot \nabla \nabla^2 v, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

y haciendo $\Phi = \nabla^2 v$, se obtiene:

$$\nabla u \cdot \nabla \nabla^2 v = \nabla \cdot (\nabla^2 v \nabla u) - \nabla^2 u \nabla^2 v, \quad (3.1.17)$$

Luego:

$$u \nabla^4 v = \nabla \cdot (u \nabla \nabla^2 v) - \nabla \cdot (\nabla^2 v \nabla u) + \nabla^2 u \nabla^2 v, \quad (3.1.18)$$

y, de manera similar:

$$u\nabla^4 v = \nabla \cdot (v\nabla\nabla^2 u) - \nabla \cdot (\nabla^2 u\nabla v) + \nabla^2 v\nabla^2 u. \quad (3.1.19)$$

En consecuencia, se puede formular la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \int_D (uL[v] - vL[u]) dD &= D_E \int_D (u\nabla^4 v - v\nabla^4 u) dD \\ &= D_E \int_D \nabla \cdot (u\nabla\nabla^2 v) - \nabla \cdot (v\nabla\nabla^2 u) - \nabla \cdot (\nabla^2 v\nabla u) \\ &\quad + \nabla \cdot (\nabla^2 u\nabla v) dD. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Usando el teorema de la divergencia, la integral sobre el dominio D puede transformarse a una integral sobre la frontera S .

$$\begin{aligned} \int_D (uL[v] - vL[u]) dD &= D_E \int_S [u \frac{\partial^2}{\partial n} (\nabla^2 v) - \frac{\partial^2}{\partial n} (\nabla^2 u) \\ &\quad - \nabla^2 v \frac{\delta u}{\delta n} + \nabla^2 u \frac{\delta v}{\delta n}] dS. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

El problema de autovalores es *autoadjunto* si, para cualquier par de funciones de comparación arbitrarias u y v , la integral de superficie se anula. La forma de la frontera determina el tipo de coordenadas a utilizar. Sin embargo, satisfacer las condiciones de contorno puede ser un obstáculo enorme a excepción de ciertas geometrías simples y algunas condiciones de contorno muy sencillas.

Placas rectangulares

Considérese una placa rectangular uniforme que se extiende sobre un dominio D definido por $0 < x < a$ y $0 < y < b$. La ecuación (3.9) toma la forma:

$$\nabla^4 W(x, y) - \beta^2 W(x, y) = 0 \quad \beta^2 = \frac{\omega^2 \rho}{D_E}, \quad (3.1.22)$$

donde el operador biarmónico, en coordenadas rectangulares, está dado por:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (3.1.23)$$

La ecuación (3.1.22) puede escribirse en la forma de operador como:

$$(\nabla^4 - \beta^2)W(x, y) = (\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)W(x, y) = 0, \quad (3.1.24)$$

lo que lleva a que:

$$(\nabla^2 - \beta^2)W = W_1, \quad (\nabla^2 + \beta^2)W_1 = 0. \quad (3.1.25)$$

Debido a que β^2 es constante, la solución de la primera de las ecuaciones (3.1.25) es:

$$W = W_1 + W_2, \quad (3.1.26)$$

donde W_2 es la solución de la ecuación homogénea:

$$(\nabla^2 - \beta^2)W_2 = [\nabla^2 + (i\beta)^2]W_2 = 0 \quad (3.1.27)$$

La segunda ecuación (3.1.25) puede resolverse por el método de separación de variables, haciendo:

$$W_1(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.1.28)$$

Como el Laplaciano en coordenadas rectangulares es

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}. \quad (3.1.29)$$

sustituyendo en la primera de las ecuaciones (3.1.25), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \beta^2 X(x) Y(y) = 0, \quad (3.1.30)$$

y dividiendo por $X(x)Y(y)$:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \beta^2 = 0, \quad (3.1.31)$$

Esto lleva a las ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \alpha^2 X(x) = 0, \quad (3.1.32)$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \gamma^2 Y(y) = 0, \quad (3.1.33)$$

donde $\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2$.

La solución de (3.1.32) es:

$$X(x) = C_1 \text{sen}(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) \quad (3.1.34)$$

y la solución de (3.1.33) es:

$$Y(y) = C_3 \text{sen}(\gamma y) + C_4 \cos(\gamma y) . \quad (3.1.35)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} W_1(x, y) = & A_1 \text{sen}(\alpha x) \text{sen}(\gamma y) + A_2 \text{sen}(\alpha x) \cos(\gamma y) \\ & + A_3 \cos(\alpha x) \text{sen}(\gamma y) + A_4 \cos(\alpha x) \cos(\gamma y) \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

donde $A_1, A_2, A_3, A_4, \alpha$ y γ deben ser determinados a través de las condiciones de contorno.

La solución de la ecuación (3.1.27) tiene la misma forma que la solución de la ecuación (3.1.25), salvo que β^2 se sustituye por $(i\beta)^2$. Luego, la solución completa de la ecuación (3.1.22) es:

$$\begin{aligned} W(x, y) = & A_1 \text{sen}(\alpha x) \text{sen}(\gamma y) + A_2 \text{sen}(\alpha x) \cos(\gamma y) \\ & + A_3 \cos(\alpha x) \text{sen}(\gamma y) + A_4 \cos(\alpha x) \cos(\gamma y) \\ & + A_5 \text{senh}(\alpha_1 x) \text{sen}(\gamma_1 y) + A_6 \text{senh}(\alpha_1 x) \cosh(\gamma_1 y) \\ & + A_7 \cos(\alpha_1 x) \text{sen}(\gamma_1 y) + A_8 \cos(\alpha_1 x) \cos(\gamma_1 y), \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

donde $\alpha^2 + \gamma^2 = \alpha_1^2 + \gamma_1^2 = \beta^2$.

Para una placa con soporte simple, las condiciones generales de contorno asumen la forma:

$$W = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = 0 . \quad (3.1.38)$$

Debido a que el radio de curvatura es infinito para una curva de frontera recta, $R \rightarrow \infty$, se obtienen las siguientes condiciones de contorno:

$$W = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sobre} \quad x = 0, a \quad (3.1.39)$$

$$W = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sobre} \quad y = 0, b \quad (3.1.40)$$

Cuando se utilizan estas condiciones de contorno, se concluye que todos los coeficientes A_i , a excepción de A_1 , se anulan, obteniéndose dos ecuaciones que los parámetros α y γ deben satisfacer,

$$\text{sen}(\alpha a) = 0, \quad \text{sen}(\gamma b) = 0; \quad (3.1.41)$$

Estas son las ecuaciones características, puesto que juntas definen los valores característicos del sistema. Sus soluciones son:

$$\begin{aligned} \alpha_m a &= m\pi, & m &= 1, 2, \dots, \\ \gamma_n b &= n\pi, & n &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

de manera que las frecuencias naturales de vibración están dadas por:

$$\omega_{mn} = \beta_{mn}^2 \sqrt{\frac{D_E}{\rho}} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D_E}{\rho}}, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (3.1.43)$$

y las correspondientes formas de los modos naturales están dadas por:

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (3.1.44)$$

Se ve que las condiciones de contorno anulan la integral de línea en la ecuación (3.1.21), por lo que el problema de autovalores es autoadjunto. Esto implica que las autofunciones de la ecuación (3.1.44) son ortogonales.

Placas circulares

Considérese ahora una placa circular uniforme que se extiende sobre un dominio D dado por $0 < r < a$, donde la frontera del dominio es el círculo S definido por $r = a$. Por la geometría de la frontera, es conveniente utilizar coordenadas polares r y θ , por lo que la ecuación diferencial que debe satisfacerse sobre el dominio D es:

$$\nabla^4 W(r, \theta) - \beta^4(r, \theta) = 0, \quad \beta^4 = \left(\frac{\omega^2 \rho}{D_E} \right), \quad (3.1.45)$$

donde el operador biarmónico, en coordenadas polares, tiene la forma:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right). \quad (3.1.46)$$

La ecuación (3.1.45) se puede escribir en forma de operador, lo que lleva a:

$$(\nabla^2 + \beta^2) W_1(r, \theta) = 0 \quad (3.1.47)$$

$$[\nabla^2 + (i\beta)^2] W_2(r, \theta) = 0, \quad (3.1.48)$$

La ecuación (3.1.47) tiene solución de la forma:

$$W_1(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad (3.1.49)$$

Luego, (3.1.47) se reduce a:

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \right) \Theta + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \beta^2 R \Theta = 0, \quad (3.1.50)$$

que puede separarse en dos ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + m^2 \Theta = 0, \quad (3.1.51)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (3.1.52)$$

donde la constante m^2 debe ser elegida de manera de obtener una ecuación armónica en θ . Además, puesto que la solución de (3.1.51) debe ser continua, la solución para $\theta = \theta_0$ debe ser idéntica a la solución para $\theta = \theta_0 + j2\pi$, ($j=1,2,\dots$). Luego m debe ser un entero. Entonces la ecuación (3.1.51) tiene solución en términos de funciones trigonométricas, dadas por:

$$\Theta_m(\theta) = C_{1m} \text{sen}(m\theta) + C_{2m} \text{cos}(m\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.53)$$

La ecuación (3.1.52) es una ecuación de Bessel, cuya solución es:

$$R_m(r) = C_{3m}J_m(\beta r) + C_{4m}Y_m(\beta r), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.54)$$

donde J_m e Y_m son funciones de Bessel de orden m del primer y segundo tipo, respectivamente. La solución general puede escribirse entonces como:

$$\begin{aligned} W_m(r, \theta) = & A_{1m}J_m(\beta r)\text{sen}(m\theta) + A_{2m}J_m(\beta r)\text{cos}(m\theta) \\ & + A_{3m}Y_m(\beta r)\text{sen}(m\theta) + A_{4m}Y_m(\beta r)\text{cos}(m\theta), \end{aligned} \quad (3.1.55)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

La ecuación (3.1.48) tiene la misma solución que la ecuación (3.1.47), salvo que se debe reemplazar β por $i\beta$. Las funciones de Bessel de argumento imaginario, $J_m(ix)$ e $Y_m(ix)$, son conocidas como *funciones de Bessel modificadas o hiperbólicas* y se denotan por $I_m(ix)$ y $K_m(ix)$, respectivamente. Las funciones hiperbólicas de Bessel no son iguales, pero son proporcionales a las funciones ordinarias de Bessel con argumento imaginario. Luego, la solución de la ecuación (3.1.45) es la suma de las soluciones de (3.1.47) y (3.1.48), y es de la forma:

$$\begin{aligned} W_{mn}(r, \theta) = & [A_{1m}J_m(\beta r) + A_{3m}Y_m(\beta r) + B_{1m}I_m(\beta r) + B_{3m}K_m(\beta r)]\text{sen}(m\theta) \\ & + [A_{2m}J_m(\beta r) + A_{4m}Y_m(\beta r) + B_{2m}I_m(\beta r) + B_{4m}K_m(\beta r)]\text{cos}(m\theta), \end{aligned} \quad (3.1.56)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

Obviamente, las constantes se determinan con las condiciones de contorno.

A manera de ejemplo, considérese una placa empotrada, cuyas condiciones de contorno son:

$$W(a, \theta) = 0; \quad (3.1.57)$$

$$\left[\frac{\partial W(a, \theta)}{\partial r} \right]_{r=a} = 0. \quad (3.1.58)$$

Además, la solución debe ser finita para cada punto de la placa. Esto inmediatamente elimina las funciones de Bessel del segundo tipo, Y_m y K_m , que divergen en $r = 0$. Por lo tanto, la solución (3.1.56) se reduce a:

$$\begin{aligned}
 W_{mn}(r, \theta) = & [A_{1m}J_m(\beta r) + B_{1m}I_m(\beta r)]\text{sen}(m\theta) \\
 & + [A_{2m}J_m(\beta r) + B_{2m}I_m(\beta r)]\text{cos}(m\theta), \quad (3.1.59) \\
 & m = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

La condición de contorno (3.1.57) implica que:

$$\begin{aligned}
 B_{1m} = -\frac{J_m(\beta a)}{I_m(\beta a)}A_{1m}, \quad B_{2m} = -\frac{J_m(\beta a)}{I_m(\beta a)}A_{2m}, \quad (3.1.60) \\
 m = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 W_m(r, \theta) = \left[J_m(\beta r) - \frac{J_m(\beta a)}{I_m(\beta a)}I_m(\beta r) \right] (A_{1m}\text{sen}(m\theta) + A_{2m}\text{cos}(m\theta)) . \quad (3.1.61) \\
 m = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

La condición de contorno (3.1.58) conduce al conjunto de ecuaciones características:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} J_m(\beta r) - \frac{J_m(\beta a)}{I_m(\beta a)} \frac{\partial}{\partial r} I_m(\beta r) \right] = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.62)$$

Pero:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} J_m(\beta r) = \beta \left[J_{m-1}(\beta r) - \frac{m}{\beta r} J_m(\beta r) \right], \\
 \frac{\partial}{\partial r} I_m(\beta r) = \beta \left[I_{m-1}(\beta r) - \frac{m}{\beta r} I_m(\beta r) \right], \quad (3.1.63)
 \end{aligned}$$

así que el conjunto de ecuaciones características se reduce a:

$$J_{m-1}(\beta a)I_m(\beta a) - J_m(\beta a)I_{m-1}(\beta a) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.1.64)$$

Para un m dado, la ecuación (3.1.64) debe resolverse numéricamente para obtener los autovalores β_{mn} y luego las frecuencias naturales:

$$\omega_{mn} = \beta_{mn}^2 \sqrt{\frac{D_E}{\rho}}. \quad (3.1.65)$$

Para cada frecuencia ω_{mn} existen dos modos naturales correspondientes, excepto para $m=0$, donde se obtiene sólo un modo. Por lo tanto, todos los modos para los cuales $m \neq 0$ son modos *degenerados*. Los modos se pueden escribir como:

$$W_{0n}(r, \theta) = A_{0n} [I_0(\beta_{0n} a)J_0(\beta_{0n} r) - J_0(\beta_{0n} a)I_0(\beta_{0n} r)], \quad (3.1.66)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

$$W_{mnc}(r, \theta) = A_{mnc} [I_m(\beta_{mn} a)J_m(\beta_{mn} r) - J_m(\beta_{mn} a)I_m(\beta_{mn} r)] \cos(m\theta),$$

$$W_{mns}(r, \theta) = A_{mns} [I_m(\beta_{mn} a)J_m(\beta_{mn} r) - J_m(\beta_{mn} a)I_m(\beta_{mn} r)] \sen(m\theta), \quad (3.1.67)$$

$$m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Se ve que las condiciones de contorno (3.1.57) y (3.1.58) anulan la integral de línea en la ecuación (3.1.21), por lo que el problema de autovalores es autoadjunto. En consecuencia, los modos naturales son ortogonales.

3.2 TEORÍA DE LA MATRIZ DE RESISTENCIA DE RADIACIÓN

La matriz de resistencia de radiación acústica R_{ik} corresponde a la función de transferencia que relaciona la velocidad superficial de una estructura vibratoria y la presión sonora en su superficie. Es una cantidad independiente de la distribución de la vibración y depende solamente de la geometría de la estructura. La dimensión de la matriz está dada por el número de subdivisiones virtuales de la estructura. Podemos definir la impedancia específica de radiación local como el cociente complejo entre la amplitud de presión sonora p_i en el punto i , debido a una fuente puntual en el punto k , y el vector de velocidad normal V_{n_k} , esto es:

$$Z_{ik} = \left(\frac{p_i}{V_{n_k}} \right)_{\text{sobre } S} \quad (3.2.1)$$

Por otro lado, la velocidad de volumen es:

$$u = \iint_S \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}}. \quad (3.2.2)$$

Asumiendo que el largo característico del elemento de superficie es pequeño, comparado con la longitud de onda, la presión y la velocidad pueden ser consideradas constantes sobre cada elemento y se pueden representar por un valor promedio. Usando la definición de la potencia acústica promediada en el tiempo, W_{rad} , y considerando que la estructura es dividida en N elementos pequeños, se puede demostrar que:

$$W_{rad} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N R_{ik} u_i u_k^* = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}^*, \quad (3.2.3)$$

donde $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$ es el vector complejo de velocidades de volumen y \mathbf{R} es la matriz real de resistencia de orden $N \times N$.

De la ecuación anterior podemos observar que W_{rad} es una cantidad positiva, de manera que la matriz \mathbf{R} es simétrica, y definida positiva. Además, la matriz \mathbf{R} puede descomponerse como $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}$, donde \mathbf{Q} es una matriz real unitaria de autovectores y $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal de autovalores positivos y reales, λ . Entonces, W_{rad} puede escribirse como:

$$W_{rad} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q} \mathbf{u}^* = \frac{1}{2} \mathbf{b}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{b}, \quad (3.2.4)$$

donde $\mathbf{b} = \mathbf{Q} \mathbf{u}^*$ es un conjunto de amplitudes transformadas por los autovectores de la matriz de resistencia y H denota el Hermitiano. Por lo tanto, la ecuación (3.2.4) puede escribirse como:

$$W_{rad} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \lambda_n |b_n|^2. \quad (3.2.5)$$

La ecuación (3.2.5) muestra que cada distribución de velocidad superficial radia sonido de forma independiente, lo que es congruente con otros modelos de radiación acústica [1] [6]. Queda establecido que si la estructura vibra con una velocidad superficial proporcional a uno de los autovectores de la matriz \mathbf{R} , entonces la vibración corresponde sólo a un modo de radiación. Entonces, las eficiencias de radiación de los modos de radiación pueden calcularse mediante una descomposición en autovalores/vectores de la matriz \mathbf{R} .

3.3 RADIACIÓN SONORA DE UNA PLACA MONTADA SOBRE UN SONODEFLECTOR INFINITO.

Para calcular los elementos de la matriz de resistencia \mathbf{R} , se utilizará una técnica llamada “método de cálculo discreto” o DCM [5]. En este método, la placa vibrante se divide virtualmente en pequeños elementos. Cada elemento es tratado como un pistón circular plano de un área equivalente a la del elemento que representa (ver Fig. 1).

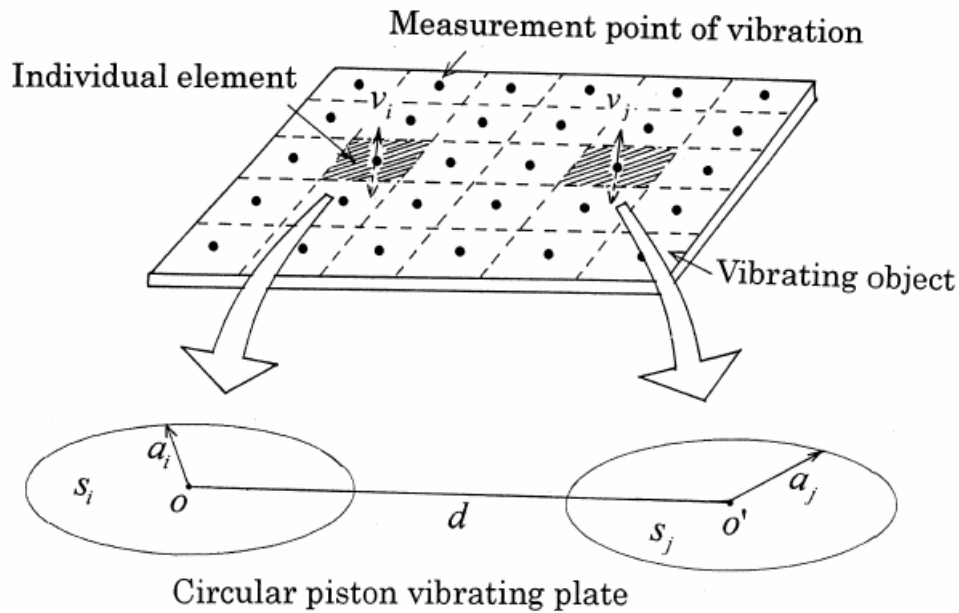


Fig.1: Placa vibrante dividida en pequeños elementos [5].

Los elementos de la matriz de resistencia corresponden a la parte real de la impedancia de radiación. Usando este método, los valores de la auto-impedancia y de la impedancia cruzada están dados por:

$$Z_{ii} = \frac{\rho_0 c}{s_i} \left[1 - \frac{J_1(2ka_i)}{ka_i} + j \frac{S_1(2ka_i)}{ka_i} \right], \quad y \quad (3.3.1)$$

$$Z_{ik} = 2 \frac{\rho_0 c}{s_i} \left[\frac{J_1(ka_i)}{ka_i} \frac{J_1(ka_k)}{ka_k} \right] \left(\frac{\sin(kr_{ik})}{kr_{ik}} + j \frac{\cos(kr_{ik})}{kr_{ik}} \right), \quad (3.3.2)$$

respectivamente, donde ρ_0 es la densidad del fluido, c es la velocidad del sonido, k es el número de onda en campo libre, s_i y s_k son las superficies de los pistones equivalentes, a_i y a_k son los radios de los pistones equivalentes, r_{ik} es la distancia entre cada elemento, J_1 es la función de Bessel de primer orden y S_1 es la función de Rayleigh-Struve . Ahora, la eficiencia de radiación sonora se define como:

$$\sigma_{rad} = \frac{\overline{W}_{rad}}{\rho_0 c S \langle |V|^2 \rangle}, \quad (3.3.3)$$

donde S es la superficie total de la placa y $\langle |V|^2 \rangle$ es la velocidad al cuadrado, promediada en el espacio y en el tiempo, y dada por:

$$\langle |V|^2 \rangle = \frac{1}{2S} \iint_S |V|^2 dS = \frac{M}{2(S)^2} u^T u^* , \quad (3.3.4)$$

donde M es el número de elementos virtuales en que se subdivide la placa. El número de elementos necesarios para obtener resultados precisos está determinado por la dimensión del elemento individual, que debería ser menor que media longitud de onda de la frecuencia crítica del panel.

3.4. DISCRETIZACIÓN DE UNA PLACA ELÍPTICA

Para poder utilizar el DCM con cierta precisión, es necesario primero dividir la elipse en pequeños elementos de igual área. Si se toma una elipse de semiejes a y b ($a > b$), centrada en el origen, la cual se divide en N anillos elípticos concéntricos de igual excentricidad y espaciados uniformemente, es posible dividir cada anillo en elementos de igual superficie $\Delta S = \pi ab / (4N^2)$. El anillo N -ésimo tendrá $4(2N-1)$ elementos. Una manera de encontrar las coordenadas de los puntos centrales de cada elemento, es dividir el primer cuadrante de

la elipse en n sectores equivalentes, con $n = (2N-1)$ y N el anillo para el cual se buscan los ángulos, haciendo un barrido de área para encontrar el ángulo que delimita dicho sector. Para calcular esta área, se tiene:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} r^2(\theta) d\theta, \quad \text{para } 0 \leq \alpha \leq \pi/2, \quad (3.4.1)$$

donde:

$$r^2 = \frac{(a \times b)^2}{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} \quad \text{y} \quad A = n\pi ab/4. \quad (3.4.2)$$

Esto da como resultado:

$$A = \frac{1}{2} ab \left[\arctan\left(\frac{b}{a} \tan \theta\right) \right]. \quad (3.4.3)$$

Esta es una ecuación que se puede resolver numéricamente. Sin embargo, para efectos de programación, la ecuación (3.4.1) fue resuelta usando el toolbox de matemática simbólica de Matlab 7.0 y arrojó un resultado diferente a la ecuación (3.4.3), que demostró ser más eficiente para el algoritmo de cálculo (ver apéndice, programas 1 y 2).

Una vez encontrados los n ángulos α , se debe encontrar la bisectriz entre ellos, esto es:

$$\theta_N i = \frac{\alpha_i + \alpha_{i-1}}{2}, \quad \text{con } i=1, 2, \dots, n \text{ y } \alpha_0 = 0. \quad (3.4.4)$$

De esta forma, hemos encontrado los ángulos de los puntos centrales de cada elemento del anillo N -ésimo.

Ahora, para encontrar el radio de cada elemento simplemente se reemplaza el ángulo correspondiente en la ecuación polar de una elipse con semiejes:

$$a_N = \frac{2N-1}{2} \frac{a}{N^2} \quad \text{y} \quad b_N = \frac{2N-1}{2} \frac{b}{N^2}, \quad \text{con: } a_N > b_N. \quad (3.4.5)$$

Se debe repetir este proceso para cada anillo, a partir de $N=2$. Para el caso del primer anillo (el más interno) el ángulo del elemento está dado por $\arctan(b/a)$ y el radio se encuentra con el proceso ya señalado.

Esta discretización produce un vector \mathbf{u} de tamaño $4N^2 \times 1$ y una matriz \mathbf{R} de orden $4N^2 \times 4N^2$. La Fig. 2 muestra la discretización de una geometría elíptica típica.

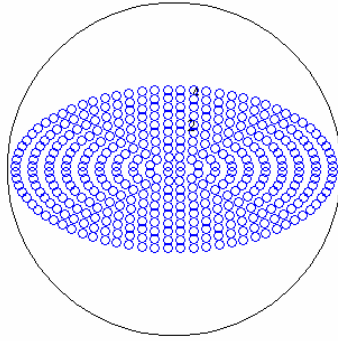


Fig. 2: Discretización de una placa elíptica usando 400 elementos.

Para calcular el valor de la velocidad al cuadrado, promediada en el espacio y en el tiempo, para una placa elíptica de semiejes a y b ($a > b$), y dividida en M pequeños elementos iguales, se puede escribir:

$$\langle |V|^2 \rangle = \frac{1}{2S} \iint_S |V|^2 dS = \frac{M}{2(\pi ab)^2} u^T u^* . \quad (3.4.6)$$

OTRAS GEOMETRÍAS

Placas circulares

Para una placa circular de radio a se puede utilizar un sistema análogo al usado en la elipse (incluso el mismo algoritmo sirve, si se hace $a=b$). Se centra la placa en el origen de un sistema polar y se divide en N anillos concéntricos igualmente espaciados. Es posible dividir cada anillo en elementos de igual superficie $\Delta s = (a/N)^2 \pi/4$. Usando esta metodología, las coordenadas centrales (r_i, θ_k) de cada elemento serán:

$$r_i = \frac{a}{2N}(2i-1), \quad \theta_i = \frac{\pi(2j-1)}{4(2i-1)} \quad (3.4.7)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, 4(2i-1)$. Esta discretización, al igual que para la placa elíptica, produce un vector \mathbf{u} de tamaño $4N^2 \times 1$ y una matriz \mathbf{R} de orden $4N^2 \times 4N^2$.

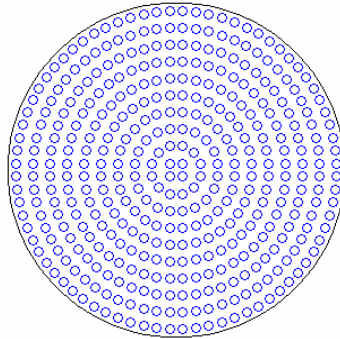


Fig. 3: Discretización de una placa circular usando 400 elementos.

Para calcular el valor de la velocidad al cuadrado, promediada en el espacio y en el tiempo, para una placa circular de radio a , y dividida en M pequeños elementos iguales, se puede escribir:

$$\langle |V|^2 \rangle = \frac{1}{2S} \iint_S |V|^2 dS = \frac{M}{2(\pi a^2)^2} \mathbf{u}^T \mathbf{u}^* \quad (3.4.8)$$

Placa anular

Para una placa anular de radio exterior a y radio interior b se puede utilizar la misma discretización que para la placa circular, pero eliminando los anillos cuyo radio sea inferior a b .

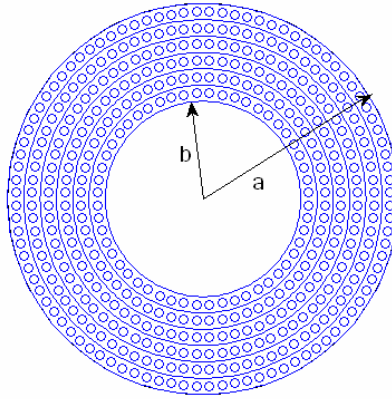


Fig. 4: Discretización de una placa anular usando 432 elementos.

Para calcular el valor de la velocidad al cuadrado, promediada en el espacio y en el tiempo, para una placa anular de radios exterior e interior a y b , respectivamente, y dividida en M pequeños elementos iguales, se puede escribir:

$$\langle |V|^2 \rangle = \frac{M}{2\pi^2 (a^2 - b^2)^2} \sum_{j=1}^M |u_j|^2 = \frac{M}{2\pi^2 (a^2 - b^2)^2} u^T u^*. \quad (3.4.9)$$

Placa rectangular

Para el caso de una placa rectangular de dimensiones L_1 y L_2 , dividida en $N_1 \times N_2$ elementos, basta con definir una discretización cartesiana en que las coordenadas de cada elemento serán

$$x_i = \frac{L_1 (2i-1)}{2N_1} \quad \text{y} \quad y_i = \frac{L_2 (2i-1)}{2N_2}. \quad (3.4.10)$$

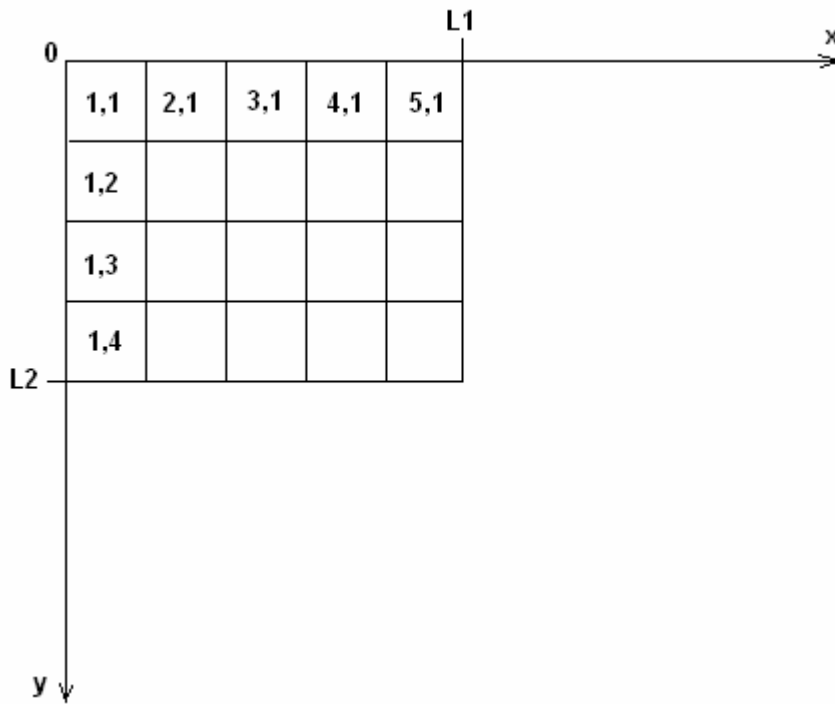


Fig. 5: Placa rectangular de dimensiones L_1 y L_2 con $N_1=5$ y $N_2=4$.

Para calcular el valor de la velocidad al cuadrado, promediada en el espacio y en el tiempo, para una placa rectangular de lados a y b , dividida en M pequeños elementos iguales, se puede escribir:

$$\langle |V|^2 \rangle = \frac{1}{2S} \iint_S |V|^2 dS = \frac{M}{2(ab)^2} u^T u^*. \quad (3.4.11)$$

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Placas elípticas

Para probar el método descrito en este trabajo, se calculó la eficiencia de radiación de los modos de radiación de un pistón elíptico plano, para distintas excentricidades, y la eficiencia de radiación de los modos estructurales axisimétricos, para el caso particular de excentricidad nula (placa circular). La placa fue dividida en 10 anillos concéntricos, dando un total de 400 elementos. Este número de elementos fue elegido comparando los resultados con la eficiencia de radiación teórica de un pistón circular plano (ver Fig. 6). Todos los cálculos fueron hechos mediante un programa escrito en Matlab.

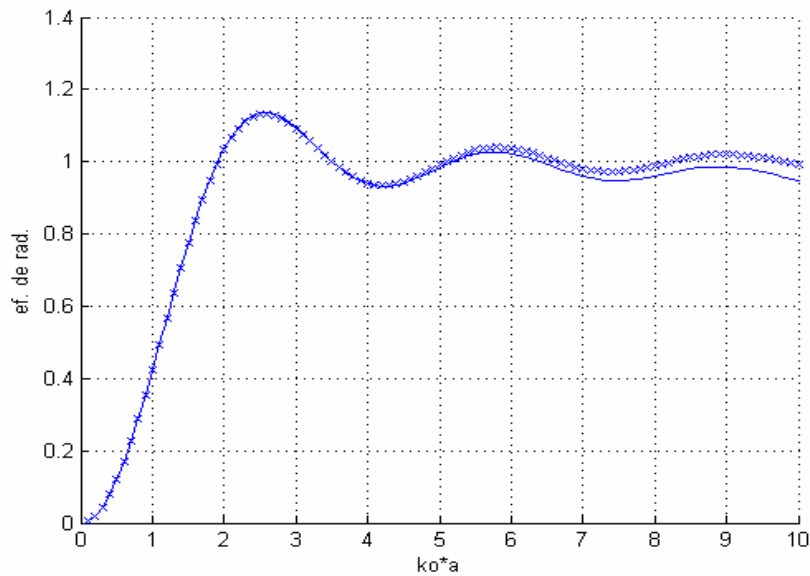


Fig. 6: Eficiencia de radiación de un pistón circular montado sobre un sonodeflector infinito calculado teóricamente (-x-) y numéricamente (—), utilizando 400 elementos.

4.1 Modos de radiación

Usando el análisis de autovalores y autovectores de la matriz \mathbf{R} , las características de los modos de radiación para placas de distintas excentricidades fueron evaluadas. Dadas las propiedades de la matriz de resistencia, y el hecho de que sólo algunos pocos autovalores y sus correspondientes autovectores son necesarios, es posible utilizar algoritmos muy eficientes y rápidos para su obtención numérica.

La Fig. 7 muestra la eficiencia de radiación de tres pistones elípticos de distintas excentricidades en función de $k_0 a$, donde k_0 es el número de onda en el aire y a es el semieje mayor de la placa. La Fig. 4 muestra la parte imaginaria de la impedancia de radiación para los mismos pistones. Los resultados son prácticamente idénticos a los presentados por Mechel [7], para la eficiencia de radiación, pero difieren un poco en la parte imaginaria de la impedancia para los valores de $k_0 a > 4$.

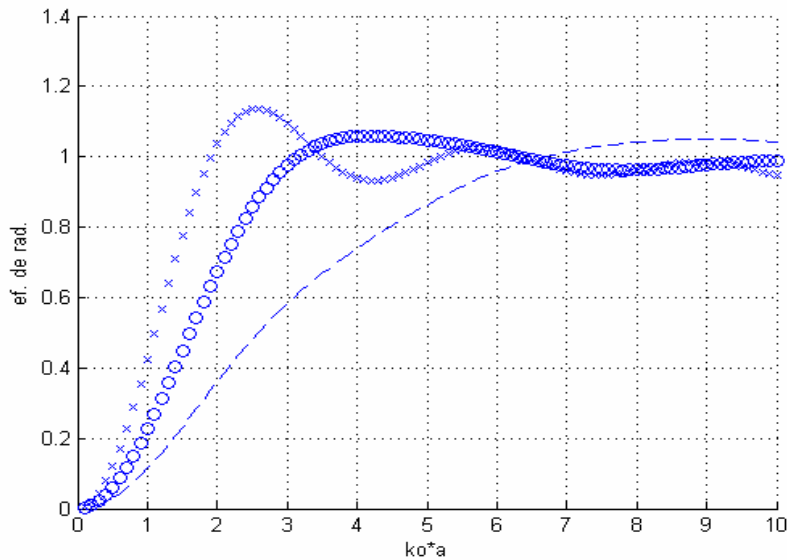


Fig. 7: Eficiencia de radiación para tres pistones elípticos montados sobre un sonodeflector infinito con $\beta=1(x)$; $\beta=0.5(o)$; $\beta=0.25(--)$, donde $\beta=b/a$.

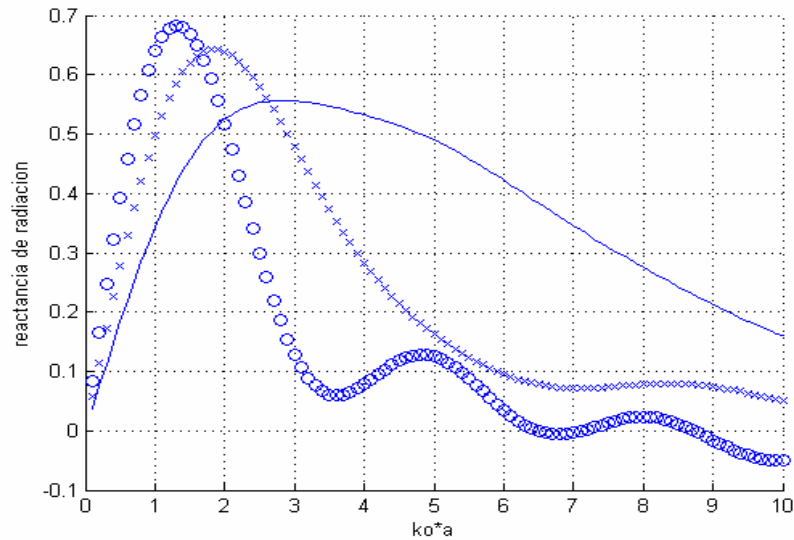


Fig. 8: Parte imaginaria de la impedancia de radiación de tres pistones elípticos montados sobre un sonodiflector infinito con $\beta=1(o)$; $\beta=0.5(x)$; $\beta=0.25(-)$, donde $\beta=b/a$.

Las eficiencias de radiación de los seis primeros modos de radiación de una placa elíptica con $b/a = 0.25$, correspondientes a los autovalores de la matriz \mathbf{R} , se grafican en función de k_0a en la Fig. 9. Se observa que, a frecuencias bajas ($k_0a \ll 1$), el modo de radiación de primer orden es mucho más eficiente radiando sonido que los modos de mayor orden. Para pequeños valores de k_0a , la eficiencia de radiación de los modos decae rápidamente al incrementar el orden modal. Esto sugiere que, al controlar el modo de radiación de primer orden, se producirá una dramática reducción en la potencia acústica total radiada. Las Figuras 10 y 11 muestran resultados similares para placas elípticas con excentricidades $b/a = 0.5$ y $b/a = 1$ (placa circular), respectivamente.

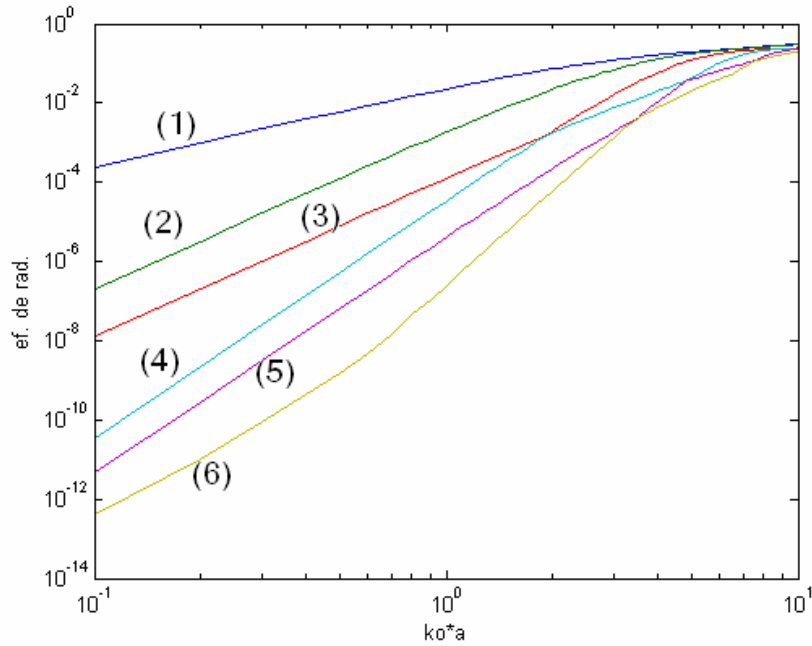


Fig. 9: Eficiencia de radiación (autovalores λ_i de la matriz \mathbf{R}) de los primeros seis modos de radiación de un pistón elíptico con $\beta=0.25$ montado sobre un sonodeflector infinito.

La distribución de velocidad para cada modo, correspondientes a los autovectores de la matriz \mathbf{R} , son dibujados en la Fig. 12, para una frecuencia de excitación correspondiente a $k_0a = 0.1$. Estas distribuciones de velocidad dependen débilmente de la frecuencia, siendo casi independientes de la frecuencia de excitación para $k_0a \ll 1$. Se observa que la distribución de velocidad del modo de radiación (1) es más eficiente y corresponde al desplazamiento neto de volumen de la placa.

Los resultados mostrados en la Fig. 9, permiten cuantificar la magnitud en que otras distribuciones de velocidad radian significativamente a distintas frecuencias de excitación. Se ha establecido que el número de modos estructurales que deberían ser medidos y controlados por un sistema activo puede ser mucho mayor que el número de modos de radiación que deberían ser controlados para bajas frecuencias.

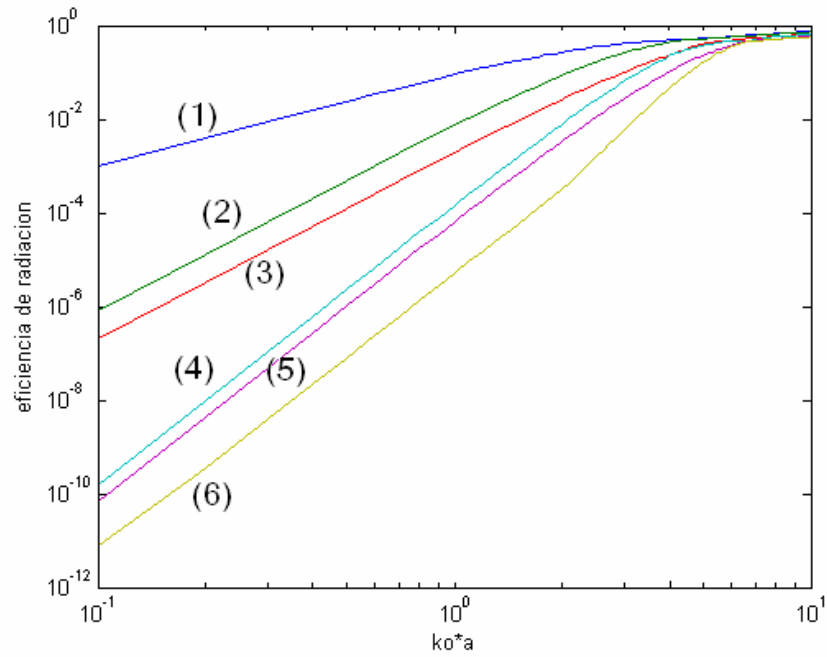


Fig. 10: Eficiencia de radiación (autovalores λ_i de la matriz \mathbf{R}) de los primeros seis modos de radiación de un pistón elíptico con $\beta=0.5$ montado sobre un sonodeflector infinito.

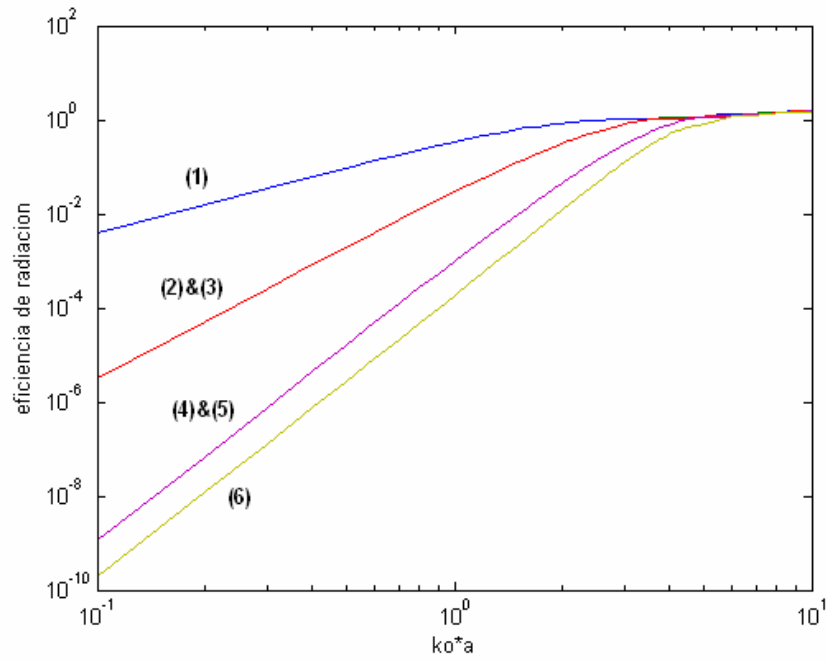
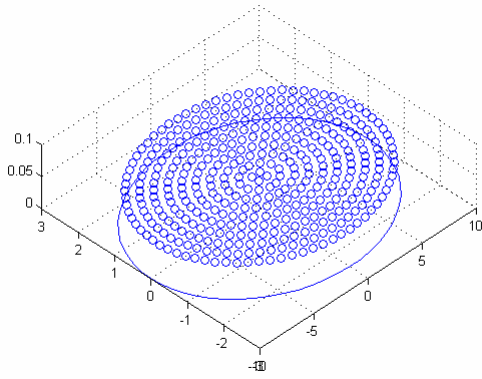
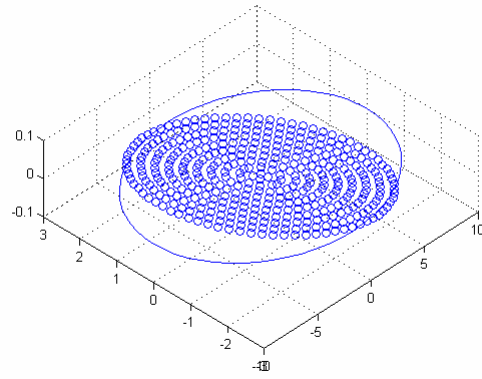


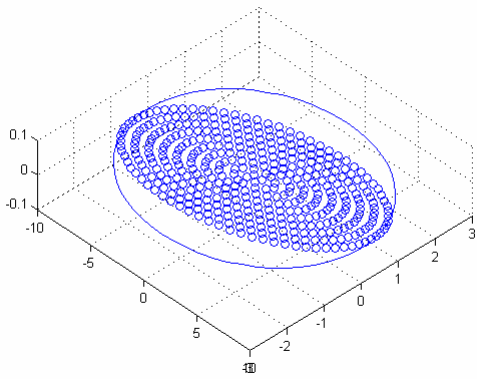
Fig. 11: Eficiencia de radiación (autovalores λ_i de la matriz \mathbf{R}) de los primeros seis modos de radiación de un pistón circular montado sobre un sonodeflector infinito.



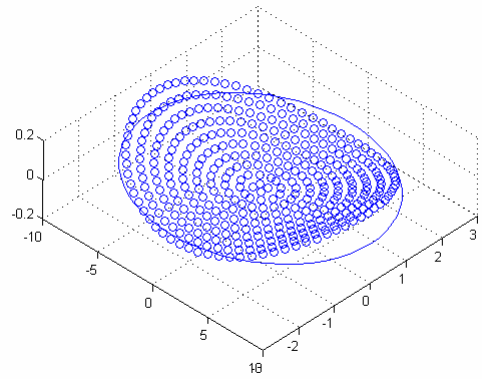
modo 1



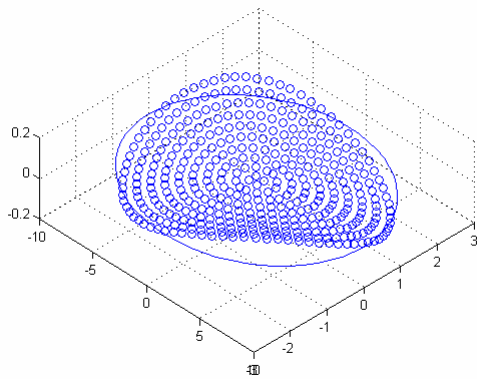
modo 2



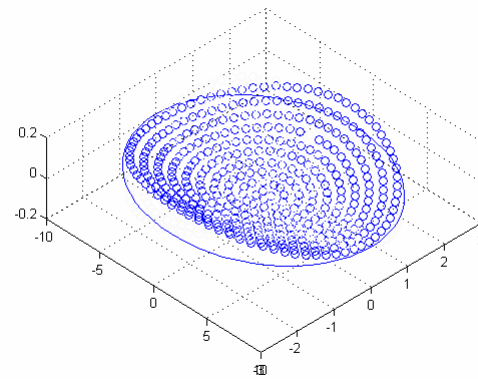
modo 3



modo 4



modo 5



modo 6

Fig. 12: Distribuciones de velocidad que radian sonido de forma independiente (autovectores de la matriz \mathbf{R}) de los primeros seis modos de radiación de una placa elíptica montada sobre un sonodeflector infinito, con $b/a=0.5$, para $k_0a=0.1$.

4. 2 Radiación de los modos estructurales axisimétricos

La vibración axisimétrica libre para una placa circular delgada, está representada por la función modal de velocidad normal [2]:

$$v_n(r) = v_{0n} \left[J_o(k_n r) - \frac{J_o(\lambda)}{I_o(\lambda)} I_o(k_n r) \right], \quad (4.2.1)$$

donde r es la distancia radial al centro de la placa, J_o e I_o son funciones de Bessel de orden cero, $k_n = k_p = \lambda / a$ y $\lambda = a\sqrt{\omega}(\rho / D)^{1/4}$ son las raíces de la ecuación de frecuencia:

$$J_o(\lambda)I_1(\lambda) + J_1(\lambda)I_o(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{para borde empotrado} \\ \frac{2\lambda}{1-\nu} J_o(\lambda)I_o(\lambda) & \text{para borde con soporte simple} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

donde ρ es la densidad de masa por unidad de área de la placa, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ es la rigidez de flexión y ν es el coeficiente de Poisson.

La Fig. 13 muestra los resultados para la eficiencia de radiación de los primeros seis modos axisimétricos, calculados mediante las ecuaciones (3.1.3), (4.2.1) y (4.2.2). Los resultados están graficados como función del parámetro adimensional k_o/k_p , donde k_p es el número de onda estructural. Estas curvas son aplicables cuando la respuesta de la placa está dominada por un modo, es decir, en resonancia. Cuando la respuesta de más de un modo es significativa (condición fuera de resonancia), el cálculo de la eficiencia de radiación requiere de un análisis más complejo.

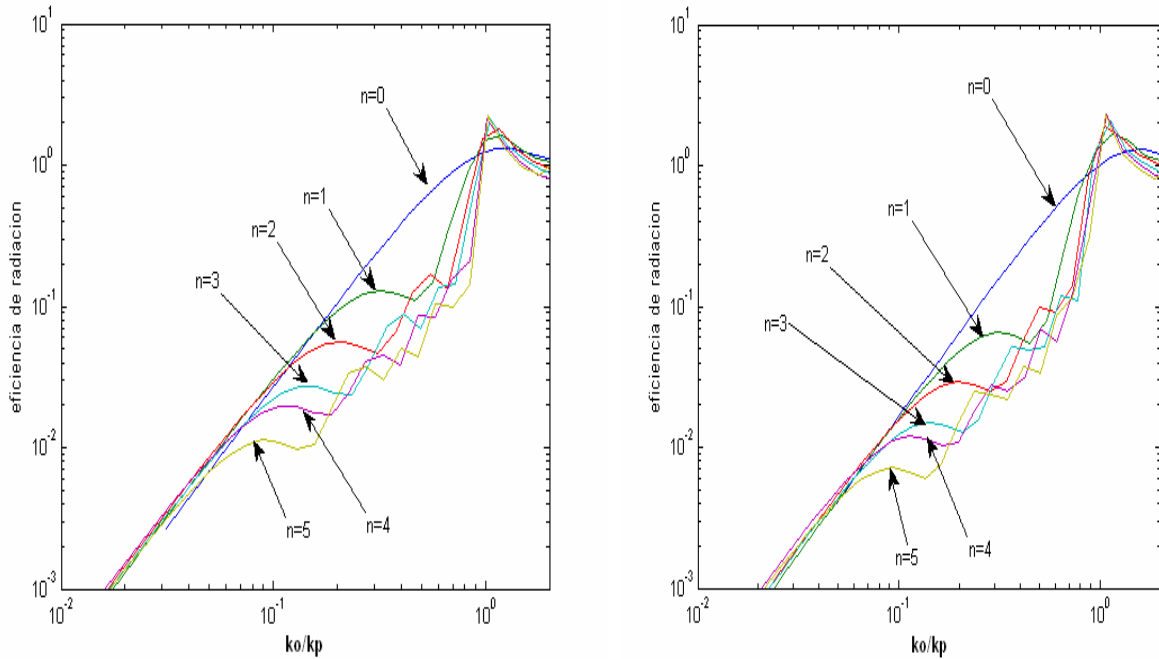


Fig. 13: Eficiencia de radiación para seis modos axisimétricos de una placa circular empotrada (izquierda) y simplemente soportada (derecha) graficados en función del parámetro adimensional ko/kp .

4.3 Placas anulares

Utilizando una discretización de 400 elementos se repitió el proceso utilizado anteriormente, calculando los modos de radiación, las distribuciones de velocidad de los modos y algunos modos axisimétricos para una placa con condiciones de borde guiadas.

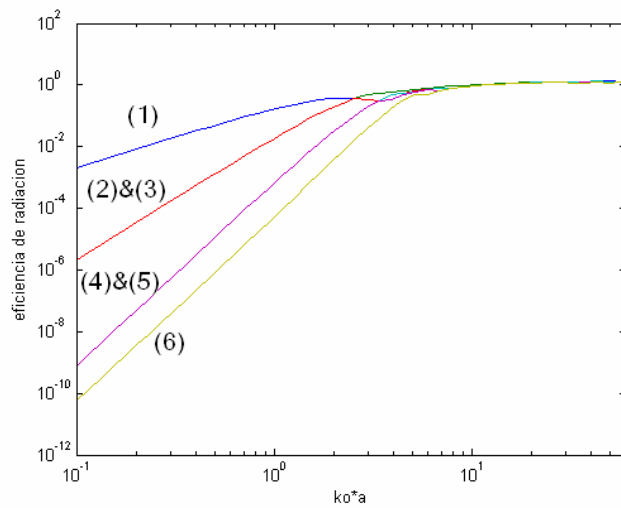


Fig. 14: Eficiencia de radiación (autovalores λ_i de la matriz \mathbf{R}) de los primeros seis modos de radiación de un pistón anular con $a/b=2$ montado sobre un sonodeflector infinito.

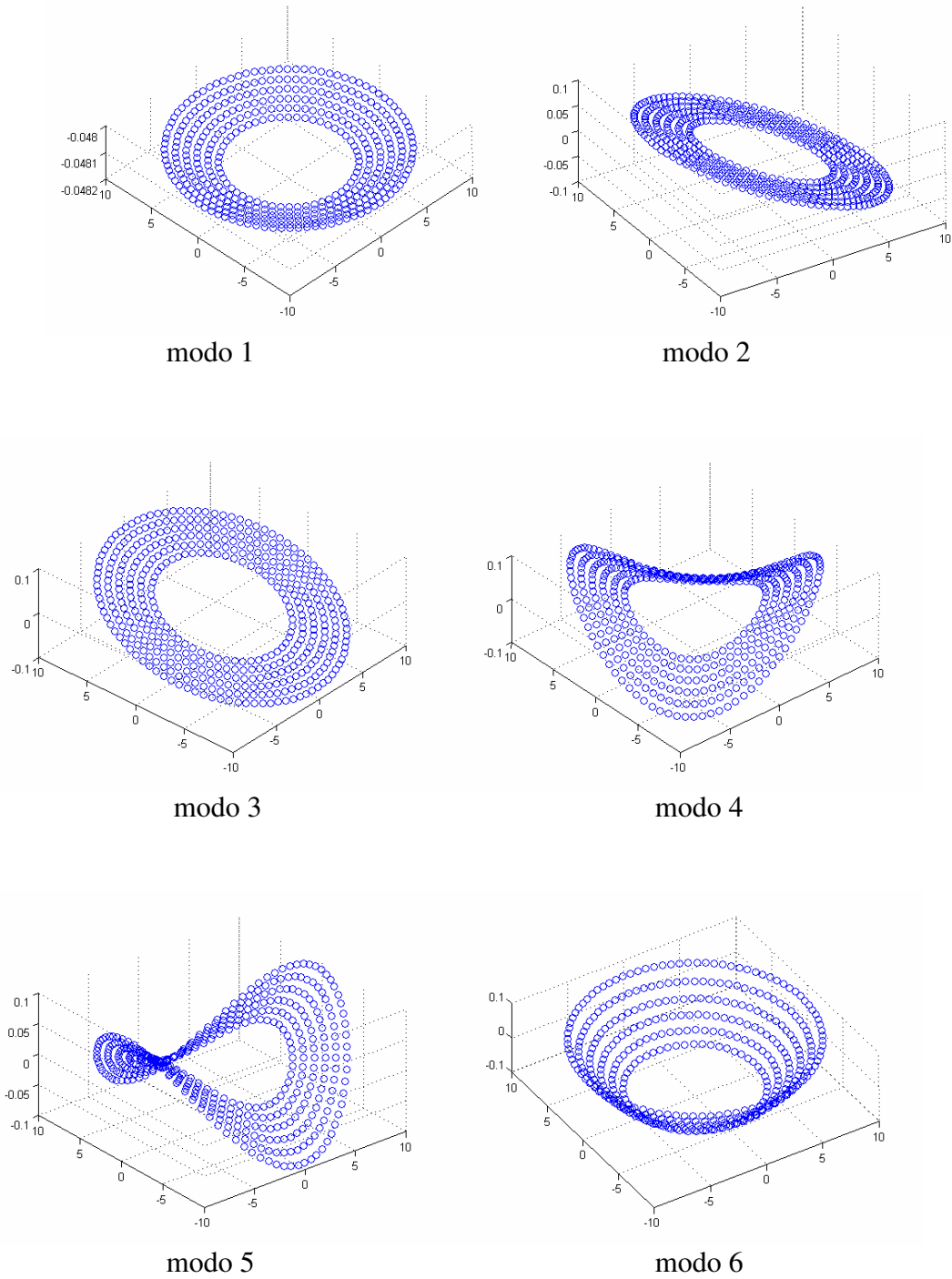


Fig. 15: Distribuciones de velocidad que radian sonido de forma independiente (autovectores de la matriz \mathbf{R}) de los primeros seis modos de radiación de una placa anular montada sobre un sonodeflector infinito, con $b=5$ y $a=10$, para $k_0a=0.1$.

Modos de vibración axisimétricos

La vibración axisimétrica libre de una placa anular guiada está dada por:

$$v_n(r) = v_{0n} \left[J_0(k_n r) - \frac{J_1(\beta)}{Y_1(\beta)} Y_0(k_n r) \right], \quad (4.3.1)$$

donde r es la distancia radial al centro de la placa, v_{0n} es una amplitud constante de velocidad, J_0 y J_1 son funciones de Bessel del primer tipo e Y_1 e Y_0 son funciones modificadas de Bessel del segundo tipo, $k_n = k_p = \beta/b$ es el número de onda estructural, y $\beta = b\sqrt{\omega}(\rho/D)^{1/4}$ son las raíces de la ecuación de frecuencia:

$$J_1(\alpha\beta)Y_1(\beta) + J_1(\alpha\beta)Y_1(\beta) = 0 \quad (4.3.2)$$

donde ρ es la densidad de masa por unidad de área de la placa, D es la rigidez de flexión y ν es el coeficiente de Poisson y $\alpha = a/b$, con a y b los radios externo e interno, respectivamente.

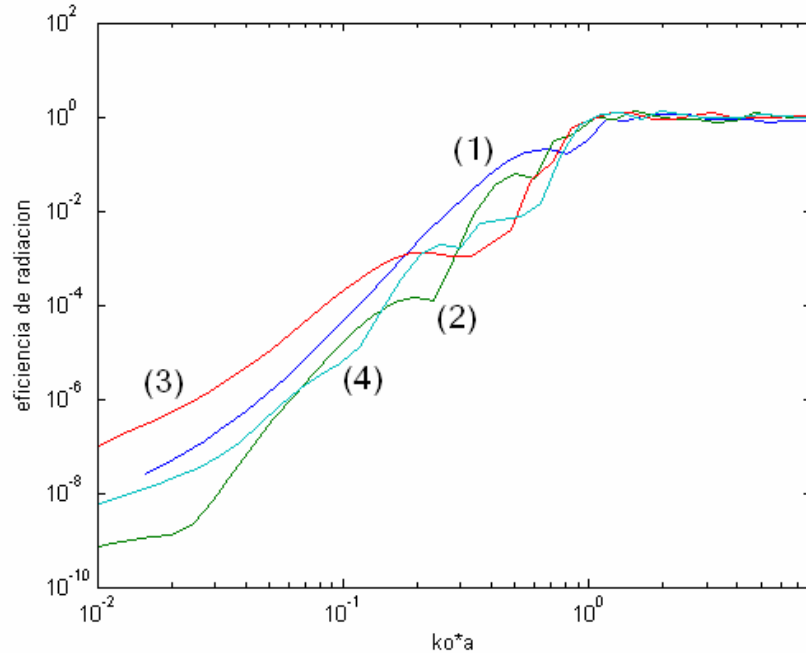


Fig.16: Eficiencia de radiación de los primeros cuatro modos de vibración axisimétricos para una placa anular de $a/b=2$

4.4 Placas rectangulares

Como otro ejemplo numérico, se repitió el proceso anterior, calculando la resistencia y reactancia de radiación para placas rectangulares con tres diferentes relaciones de aspecto, utilizando una discretización de 400 elementos. La Fig. 17 muestra la eficiencia de radiación de tres pistones rectangulares de distintas relaciones de aspecto en función de $k_0 a$, donde k_0 es el número de onda en el aire y a es la dimensión mayor de la placa. La Fig. 18 muestra la parte imaginaria de la impedancia de radiación (reactancia), para los mismos pistones. Los resultados son prácticamente idénticos a los presentados por Mechel [7], para la eficiencia de radiación, pero difieren un poco en la parte imaginaria de la impedancia para los valores de $k_0 a > 4$, especialmente para el caso del pistón cuadrado.

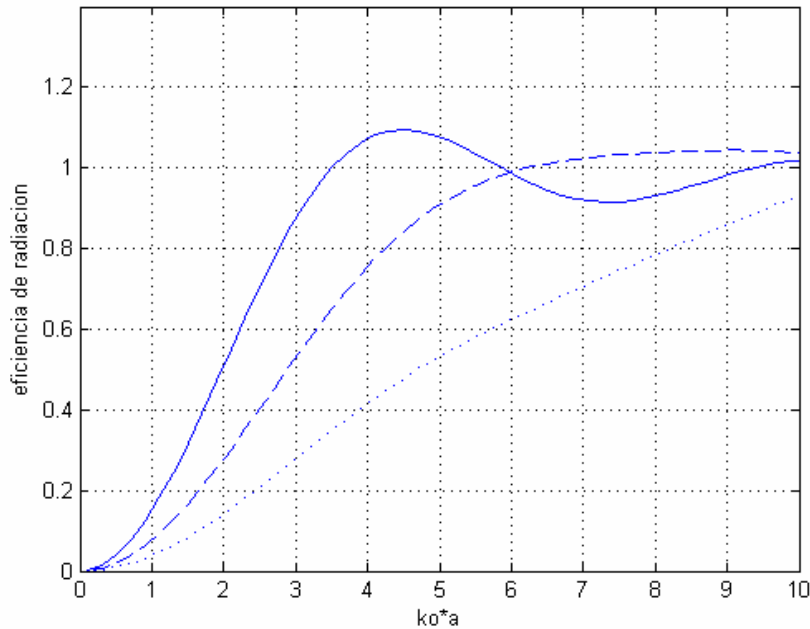


Fig. 17: Eficiencia de radiación de tres pistones rectangulares con $\beta=(-)1$, $\beta=0.5(--)$ y $\beta=0.25(...)$.

Las Figuras 19, 20 y 21 muestran los resultados de la eficiencia de radiación de los primeros seis modos de radiación (autovalores λ_i de la matriz \mathbf{R}), para placas rectangulares montadas sobre un sonodeflector infinito, para distintos valores de la relación de aspecto β . La Fig. 22 muestra los resultados de la distribución de velocidad de seis modos de radiación para una placa rectangular con $\beta=0.5$.

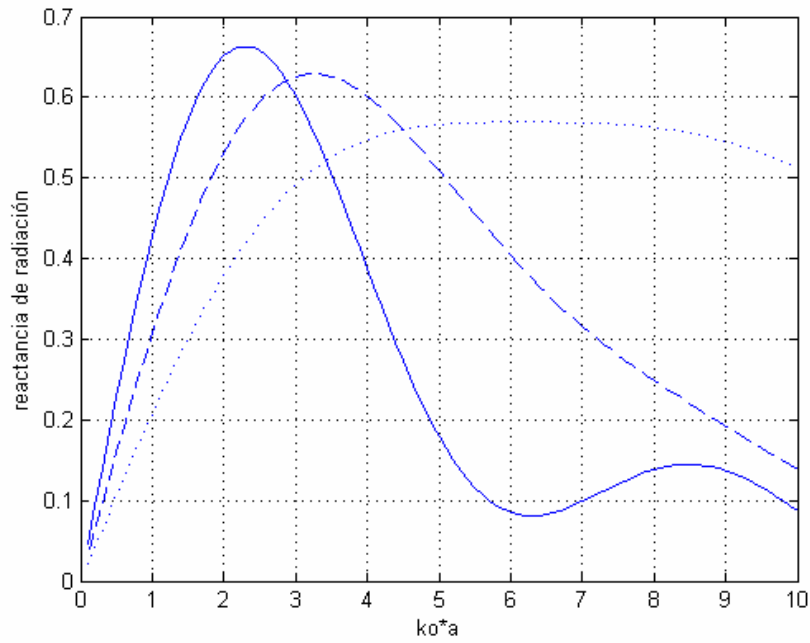


Fig. 18: Reactancia de radiación de tres pistones rectangulares con $\beta=(-)1$, $\beta=0.5(-)$ y $\beta=0.25(...)$.

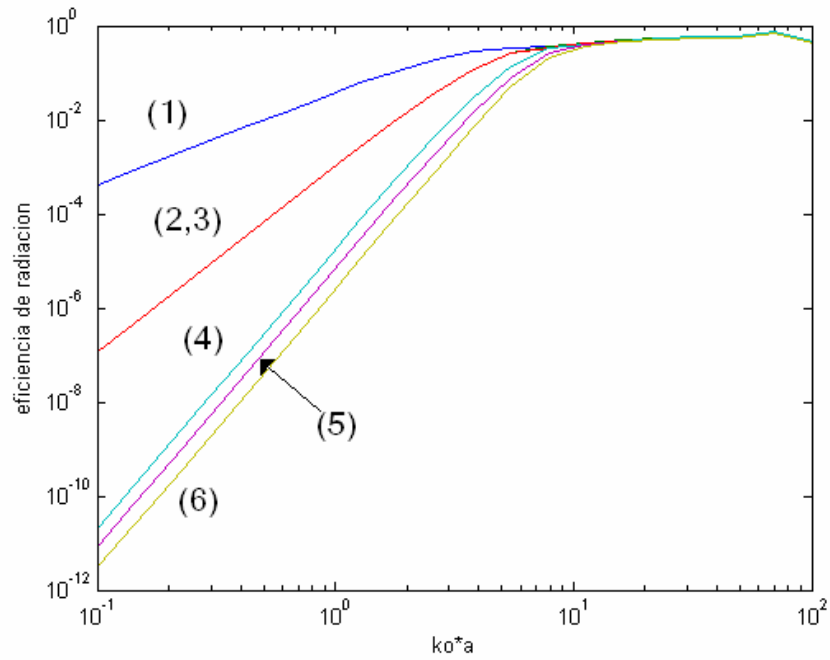


Fig. 19: Eficiencia de radiación de los primeros seis modos de radiación (autovalores λ_i de la matriz \mathbf{R}) de un pistón cuadrado montado sobre un sonodeflector infinito.

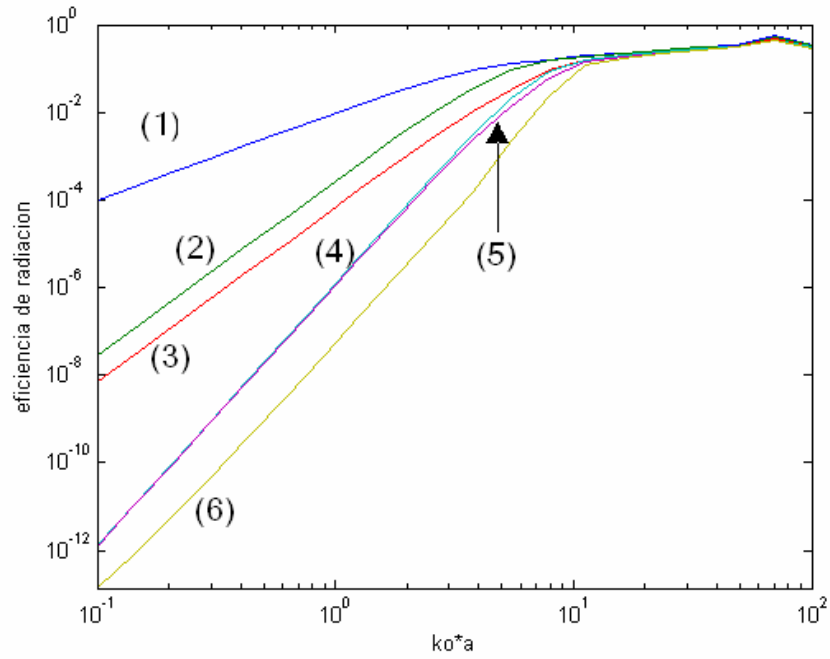


Fig. 20: Eficiencia de radiación de los primeros seis modos de radiación (autovalores λ_i de la matriz \mathbf{R}) de un pistón rectangular con $\beta=0.5$ montado sobre un sonodeflector infinito

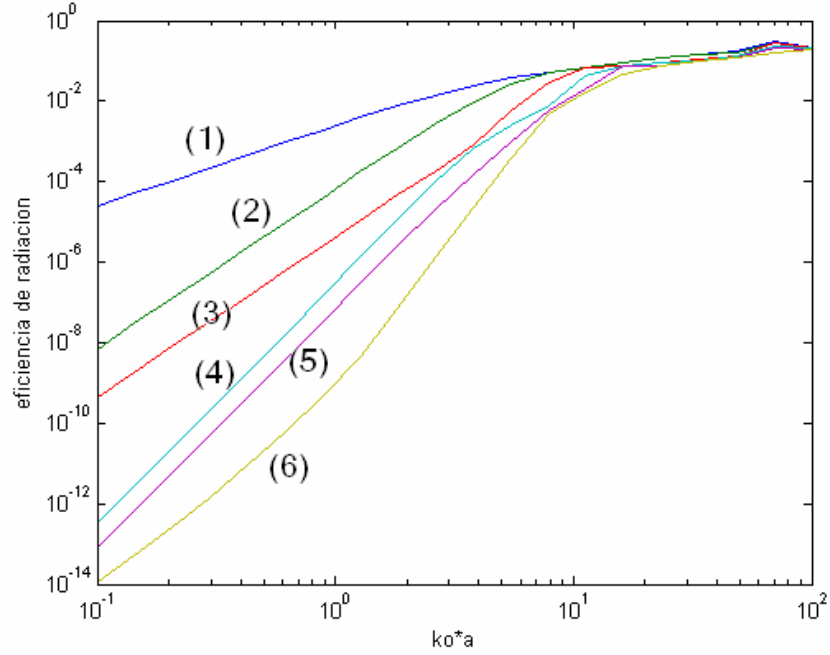
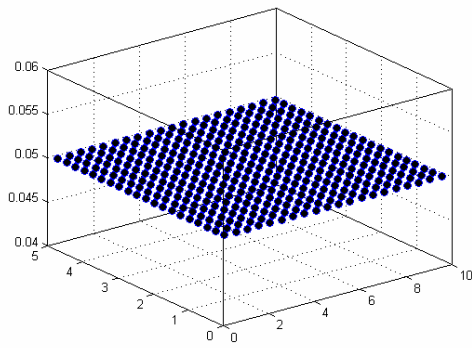
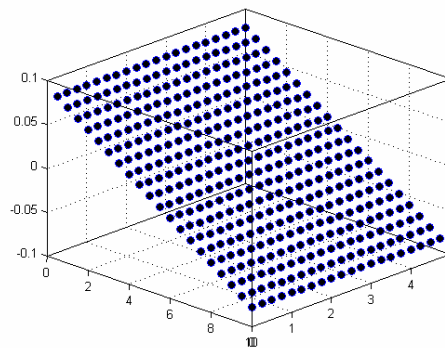


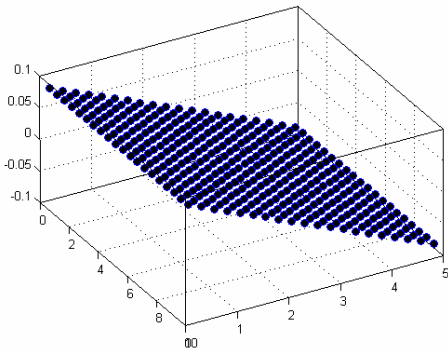
Fig. 21: Eficiencia de radiación de los primeros seis modos de radiación (autovalores λ_i de la matriz \mathbf{R}) de un pistón rectangular con $\beta=0.25$ montado sobre un sonodeflector infinito



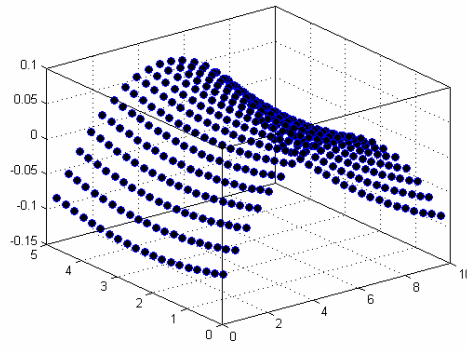
modo 1



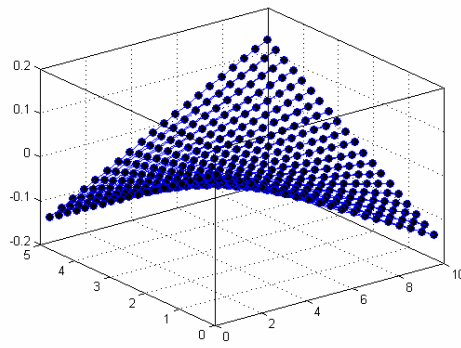
modo 2



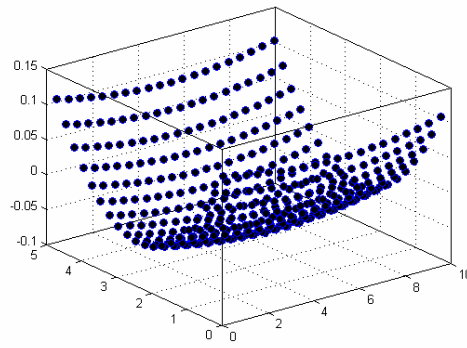
modo 3



modo 4



modo 5



modo 6

Fig. 22: Distribuciones de velocidad que radian sonido de forma independiente de los primeros seis modos de radiación (autovectores de la matriz \mathbf{R}) de una placa rectangular montada sobre un sonodeflector infinito, con $b=5$ y $a=10$, para $k_0 a=0.1$.

Modos de vibración

La vibración de una placa rectangular con soporte simple está dada por:

$$V(x, y) = V_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.4.1)$$

donde V_0 es una amplitud constante de velocidad normal, a y b son las dimensiones de la placa a lo largo del eje x y el eje y , respectivamente. El número de onda k_p se calcula mediante la expresión:

$$k_p = \sqrt{\frac{\lambda_{m,n}}{a}} \quad (4.4.2)$$

donde $\lambda_{m,n}$ es un parámetro adimensional que corresponde al modo (m,n) y se calcula con la siguiente expresión:

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 (m^2 + n^2) \quad (4.4.3)$$

El caso de una placa con bordes empotrados es mucho más difícil de analizar, y no existe una forma analítica para calcular el parámetro $\lambda_{m,n}$, pero varios valores pueden encontrarse en la literatura. La Tabla 1 presenta algunos valores calculados por Arenas y Crocker[1].

Tabla 1: Resultados del parámetro $\lambda_{m,n}$ para distintos modos de vibración.

m,n	$\lambda_{m,n}$
1,1	36.109
1,2	73.737
2,2	108.85
1,3	132.48
2,3	165.92
1,4	211.34
3,3	220.90
2,4	244.03
3,4	297.49

La vibración de una placa rectangular con bordes empotrados está dada por [4]:

$$V(x, y) = \theta(x)\zeta(y) \quad (4.4.4)$$

donde

$$\theta_m(x) = J(\beta_n x/a) - \frac{J(\beta_n)}{H(\beta_n)} H(\beta_n x/a), \quad (4.4.5)$$

$$\text{y} \quad \zeta_n(y) = J(\beta_n y/b) - \frac{J(\beta_n)}{H(\beta_n)} H(\beta_n y/b), \quad (4.4.6)$$

donde las funciones J y H están definidas por:

$$\begin{aligned} J(s) &= \cosh(s) - \cos(s) \\ H(s) &= \operatorname{senh}(s) - \operatorname{sen}(s) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Aquí, β_m y β_n son las raíces de la ecuación:

$$\cosh(\beta)\cos(\beta) - 1 = 0. \quad (4.4.8)$$

La Fig. 23 muestra la eficiencia de radiación calculada para algunos modos estructurales de una placa cuadrada, para las dos condiciones de borde discutidas anteriormente. Los resultados se presentan en conjunto en la Fig. 24, para su comparación visual.

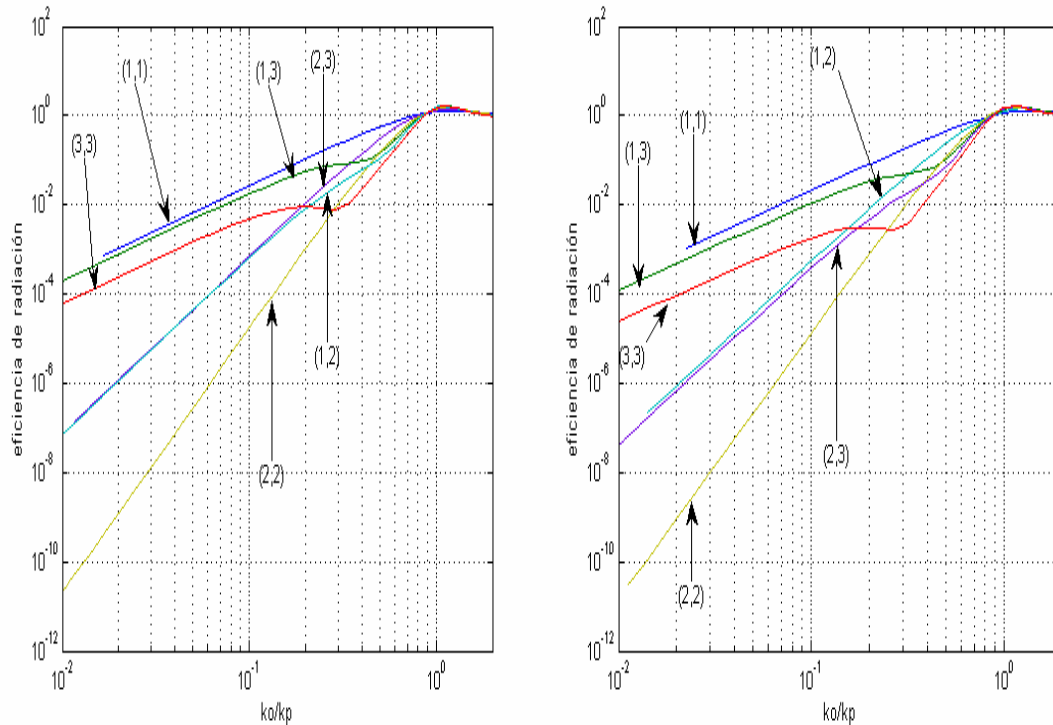


Fig. 23: Eficiencia de radiación de algunos modos estructurales para una placa cuadrada de lado a , empotrada (izquierda) y con soportes simples (derecha)

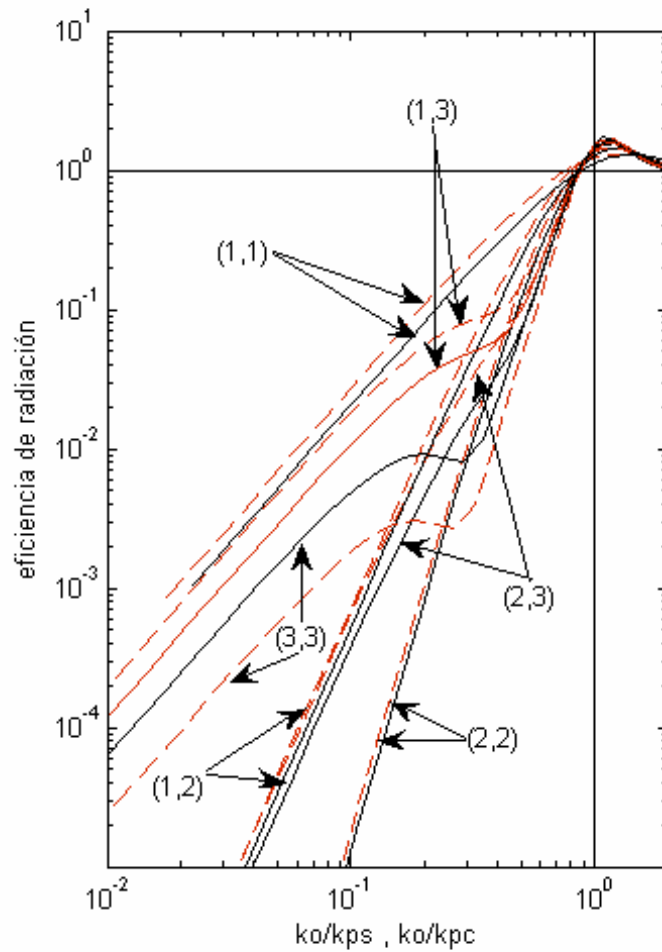
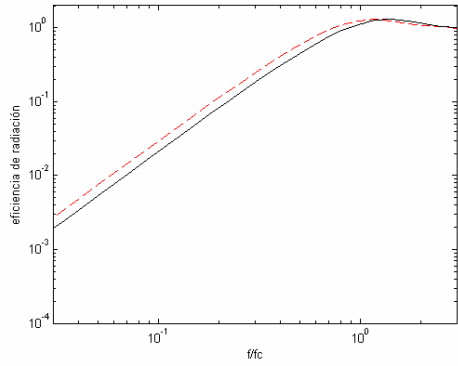
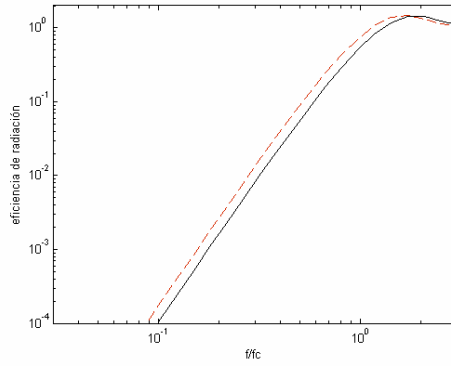


Fig. 24: Eficiencia de radiación de algunos modos estructurales para una placa cuadrada de lado a , empotrada (línea segmentada, rojo) y de soportes simples (línea continua, negro), k es el número de onda en el aire, kps y kpc son el número de onda estructural para soporte simple y empotrado, respectivamente.

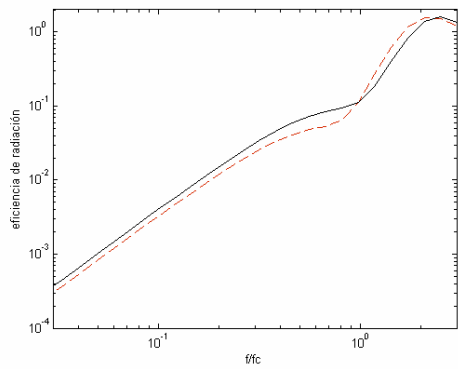
La Fig. 25 muestra los resultados de la eficiencia de radiación de seis modos de vibración estructural, para un ejemplo de placa cuadrada, con dos condiciones de borde. Notar que la eficiencia de radiación se ha dibujado como función de la razón entre la frecuencia y la frecuencia crítica de la placa.



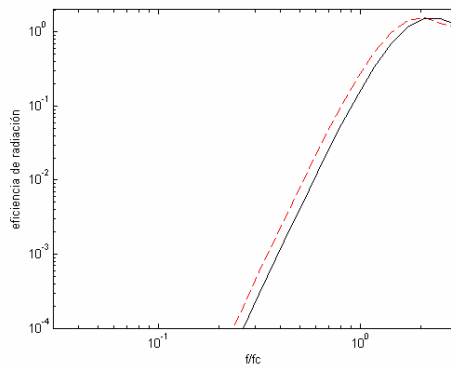
modo 1,1



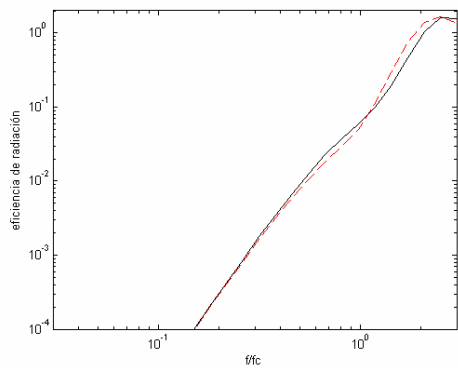
modo 1,2



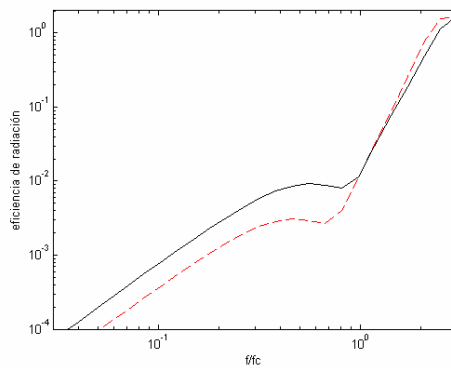
modo 1,3



modo 2,2



modo 2,3



modo 3,3

Fig. 25: Eficiencia de radiación de algunos modos de vibración para una placa cuadrada empotrada (línea segmentada, rojo) y con soportes simples (línea continua, negro) con $h=0.005$ m, $\rho_s=6.5$ kg/m², $E=6 \times 10^9$ N/m² $\nu=0.293$, graficados en función del parámetro adimensional f/f_c , donde f_c es la frecuencia crítica.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se observa una similitud entre la eficiencia de radiación de los modos de radiación para el caso de los pistones elípticos y rectangulares. La eficiencia de radiación disminuye al disminuir la relación de aspecto. Se observa que, para el caso de la placa anular y la placa circular, los modos de radiación 2 y 3 y los modos 4 y 5 coinciden (Figuras 11 y 14). Esto se debe a la simetría de estas placas, y que la forma de los modos es la misma, pero en otra dirección (ver Fig. 15). Un fenómeno similar ocurre en las placas cuadradas, donde coinciden solamente los modos 2 y 3 (ver Figuras 19 y 22).

Los resultados obtenidos para los pistones elípticos y rectangulares son idénticos a los presentados por Mechel[7], para la eficiencia de radiación en todo el rango estudiado y para la reactancia de radiación para valores de k_0a inferiores a 4. Para valores de k_0a sobre 4, se observan discrepancias para la reactancia de radiación. Los resultados obtenidos para los modos estructurales de placas rectangulares son idénticos a los presentados por Arenas y Crocker[1].

Para todas las geometrías estudiadas, los modos estructurales alcanzan su mayor eficiencia de radiación en $k/k_p=1$, es decir, en la frecuencia crítica, lo que es consistente con la teoría. Las Figuras 23 y 24 sugieren que la eficiencia de radiación de los modos estructurales es mayor para una placa cuadrada con bordes empotrados que para una con soporte simple. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto, pues están graficadas en función del parámetro adimensional k/k_p , y el número de onda estructural es diferente para cada condición de contorno. Por esta razón, la Fig. 25 muestra los mismos modos pero graficados en función de f/f_c , donde f_c es la frecuencia crítica de la placa. En ella se observa que, para los modos (1,1), (1,2) y (2,2), la eficiencia de radiación es mayor para placas con soporte simple. Para los modos (1,3) y (3,3), la eficiencia de radiación es mayor para la placa empotrada.

6. CONCLUSIONES

Uno de los objetivos importantes de este trabajo, consistía en estimar las características de la radiación sonora de un pistón elíptico, determinadas numéricamente usando el método de la matriz de resistencia. A partir de lo expuesto en este trabajo, podemos concluir que:

- 1) Los resultados muestran buena concordancia con los resultados teóricos, por lo cual el método presentado es muy útil para la modelación de problemas vibroacústicos,
- 2) Combinando este método con mediciones de vibraciones, es posible predecir la potencia acústica radiada sin medir el campo acústico,
- 3) La matriz de resistencia resulta útil en la etapa de diseño, si se combina con métodos numéricos para calcular la respuesta vibratoria de una estructura, de manera de predecir la potencia acústica total radiada. Se debe notar que el método está restringido para frecuencias bajo la frecuencia crítica. Para frecuencias más altas, un mayor número de elementos virtuales sería necesario para obtener resultados precisos. Sin embargo, esto puede producir matrices muy grandes y requerir una enorme memoria de computador para poder almacenar los procesos. Por este motivo, para frecuencias por sobre la frecuencia crítica, se recomienda el uso de aproximaciones asintóticas.
- 4) Los programas utilizados calculan la matriz de Resistencia y Reactancia como arreglos tridimensionales llamados hipermatrices. Esto permite guardar la matriz para un gran número de frecuencias y utilizarla para todos los cálculos sin necesidad de calcularla cada vez. Esto hace los programas muy eficientes en cuanto a tiempo de cómputo y entrega gran versatilidad, puesto que la matriz es independiente de las condiciones de contorno y el material de la placa, lo que permite utilizar la misma matriz para distintos problemas.
- 5) Se consiguió programar rutinas capaces de calcular y graficar rápida y eficazmente la eficiencia de radiación de los modos de radiación de placas elípticas, anulares y rectangulares, los modos estructurales de vibración de placas anulares y rectangulares, además de la eficiencia de radiación de pistones elípticos y rectangulares de distintas relaciones de aspecto.

- 6) Los resultados obtenidos para la eficiencia y reactancia de radiación de pistones elípticos y rectangulares concuerdan con los presentados en la literatura [7] para $k_0 a < 4$.
- 7) La eficiencia de radiación de una placa elíptica y rectangular depende de las condiciones de contorno, de la relación de aspecto y de la frecuencia de vibración.
- 8) En resumen, se concluye que el método presentado en este trabajo es muy eficiente para predecir la potencia acústica radiada por una estructura vibratoria para frecuencia bajo la frecuencia crítica.

7. AGRADECIMIENTOS

Hay mucha gente a quien debo agradecer, y espero no olvidarme de nadie, y de ser así, espero que me disculpen por mi mala memoria.

En primer lugar debo agradecer a mis padres, por su confianza, apoyo y paciencia, sin ustedes y su ejemplo no sería lo que soy hoy.

A Gabriela, por estar siempre conmigo y acompañarme en Valdivia durante el año y medio que demoré en terminar esta tesis, sé que no fue fácil y te estaré siempre en deuda por ello.

A los profesores Jorge Santamarina, Luis Vergara y Hugo Ramírez, por su ayuda y disposición.

A Klaus Hornig, por su amistad y por su ayuda con mis problemas de programación.

A Sofía Lehmann, mi mejor amiga y compañera de estudio. Son muchas las cosas que hiciste por mí durante toda la carrera como para enumerarlas, así es que simplemente, gracias por TODO!

Por último al Dr. Jorge Arenas, mi profesor patrocinante, por la confianza que depositó en mí para ser su ayudante y tesista.

A todos Uds., gracias!

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto DID-UACH No 200501 y por el proyecto FONDECYT No 1060117.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J.P. Arenas & M.J. Crocker (2002), Sound radiation efficiency of a baffled rectangular plate excited by harmonic point forces using its surface resistance matrix, *International Journal of Acoustics and Vibration* **7**(4), pp. 217-232.
- [2] J.P. Arenas (2005), Numerical estimation of sound radiation from some annular baffled plates, *Proc. Internoise 2005*, Río de Janeiro, Brasil, Paper 1756.
- [3] J.P. Arenas (2004), Sound Radiation efficiency of some circular baffled plates, *Proc. International Congress on Sound and Vibration 2004*, San Petersburgo, Rusia, pp. 3661-3668.
- [4] L. Meirovitch (1967), *Analytical Methods in Vibrations*, Collier-Macmillan Limited, London, pp.179-189.
- [5] N. Hashimoto (2001), Measurements of sound radiation efficiency by the discrete calculation method, *Applied Acoustics*, **62**, pp. 429-446.
- [6] J.P. Arenas On the vibration análisis of rectangular clamped plates using the virtual work principle, *Journal of Sound and Vibration* **266** (2003), pp. 912-918.
- [7] F.P. Mechel (2002), *Formulas of Acoustics*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 214-231.

ANEXOS

Programas utilizados:

Rutinas discretizadoras (discreliptika, cuadrada, redonda, anular)

Programa1:

%programa ayb.
%parte importante de la discretización de la elipse.
%encuentra la función de área para un a y un b definidos,
%esta función debe ser reemplazada el programa discreliptika, segunda parte

syms x t a b

A=a^2+b^2;
B=a^2-b^2;
h=(a*b)^2/(b^2+B*sin(x)^2); %ecuacion en polares de la elipse, r en funcion de teta
h1=int(h,0,t)
%f=h1-2*S; % esa es la que se debe reemplazar en discreliptika de
%manera explicita.

Programa2

%function [pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
%discretiza la elipse y encuentra las coordenadas de los elementos
%virtuales de superficie.
%a=semieje mayor
%b=semieje menor
%n1=numero de anillos

function [pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
A=a/n1; %semieje mayor del primer anillo
B=b/n1; %semieje mayor del primer anillo
nn=n1-1;
m=1:nn;
A1=pi*a*b/4; %superficie del cuarto de la placa
ds=pi*A*B/4; %superficie pistones equivalentes

%Parte 2 calcula los angulos para dividir la elipse en areas equivalentes,f
%es la función entregada por matlab en el programa ayb.

for n=1:nn
S1=A1/(2*n+1);

```

for i=1:2*n+1
    S=i*S1;
    f=@(t)b*(a^2*atan(tan(1/2*t)*b/(-b^2+2*a^2+2*(a^2*(a-b)*(a+b))^(1/2))^(1/2))...
        *(-b^2+2*a^2-2*(a^2*(a-b)*(a+b))^(1/2))^(1/2)+atan(tan(1/2*t)*b/...
        (-b^2+2*a^2+2*(a^2*(a-b)*(a+b))^(1/2))^(1/2))*(-a^2*b^2+a^4)^(1/2)*...
        (-b^2+2*a^2-2*(a^2*(a-b)*(a+b))^(1/2))^(1/2)+a^2*atan(tan(1/2*t)*b/...
        (-b^2+2*a^2-2*(a^2*(a-b)*(a+b))^(1/2))^(1/2))*(-b^2+2*a^2+2*(a^2*(a-b)...
        *(a+b))^(1/2))^(1/2)-atan(tan(1/2*t)*b/(-b^2+2*a^2-2*(a^2*(a-b)...
        *(a+b))^(1/2))^(1/2))...
        *(-a^2*b^2+a^4)^(1/2)*(-b^2+2*a^2+2*(a^2*(a-b)*(a+b))^(1/2))^(1/2))...
        /(-b^2+2*a^2+2*(a^2*(a-b)*(a+b))^(1/2))^(1/2)/...
        (-b^2+2*a^2-2*(a^2*(a-b)*(a+b))^(1/2))^(1/2)-2*S;
    d=fzero(f,[0,1.01*pi/2]);
    dd(i,n)=d;
end
end

```

```

%Parte 3, calcula el angulo del punto central del elemento virtual de superficie
[M,N]=size(dd);
M1=zeros(1,N);
M2=[M1;dd];           %agrego una fila de zeros a dd, (la primera fila)
for n=1:nn
    for i=2:2*n+2
        teta(i-1,n)=(M2(i,n)+M2(i-1,n))/2; %Calcula el angulo medio, el que sirve
    end
end
end

```

```

%Parte 4,calcula el radio del punto central del elemento virtual de superficie

```

```

k=(2*m+1)/2;           %factor de multiplicacion que define cada anillo de elipse
for n=1:nn
    for i=1:2*n+1
        aa=A*k(n);
        bb=B*k(n);
        e=bb^2*cos(teta(i,n))^2+aa^2*sin(teta(i,n))^2;
        rr(i,n)=sqrt((aa*bb)^2/e);           %encuentra el largo de r reemplazando teta
                                                %en la ecuacion polar de la elipse
    end
end
teta1=atan(B/A); %calcula el angulo del primer elemento, del primer anillo
e=(B/2)^2*cos(teta1)^2+(A/2)^2*sin(teta1)^2; %**
rr1=sqrt((A*B/4)^2/e); %junto con ** calcula el radio del primer elemento
r1=nonzeros(rr); %entrega los elementos de erre en orden
r=[rr1;r1]; %agrega el valor del radio del primer elemento,q se calculo aparte
teta2=[teta1;nonzeros(teta)]; %agrega el angulo del primer elemento, q se calculó aparte

```

```

P=[r,teta2]; %entrega las coordenadas polares de cada elemento del cuarto de elipse
q=length(r);
index=1:q;

pp=[index' P;(q+index)' P(:,1) pi-P(:,2);(2*q+index)' -P(:,1) P(:,2);(3*q+index)' P(:,1) -
P(:,2)]; %entrega las coordenadas
%polares de cada elemento
%polar(pp(:,3),pp(:,2),'o') %grafica la elipse discretizada (opcional,si se requiere
%se debe eliminar el signo de comentario %)

```

Programa3:

```

%cuadrada
%entrega las coordenadas de los puntos centrales de una placa rectangular
%de lados L1(x),L2(y) dividida en N1xN2 elementos.N1 la dimension x y N2 la
%dimension y
function [XY,ds]=cuadrada(L1,L2,N1,N2);
i1=1:N1;
i2=1:N2;
ds=L1*L2/(N1*N2);
x=(L1/N1)*(2*i1-1)/2
y=(L2/N2)*(2*i2-1)/2
index=1:N1*N2;
CC=0;
for i=1:N2
    for k=1:N1
        CC=[CC x(k)-j*y(i)];
    end
end
end

CC=nonzeros(CC);
XY=[index' real(CC) imag(CC)]; %[indice x y]

```

Programa4:

```

%function [ZZ,DS]=redonda(N,a)
%calcula las coordenadas de cada
%elemento de superficie en coordenadas polares para una placa redonda.
%N=numero de anillos,a=radio placa
%ZZ=vector de coordenadas polares con indice, theta y erre
function [ZZ,ds]=redonda(N,a)
ds=((a/N)^2)*pi/4; % elemento de superficie
i=[1:N];
L=sqrt(-1);

r=(2*i-1)*a/(2*N);
k=1;

```

```

for k=1:N;
    x=4*(2*k-1);
    j=1:x;
    A=2*j-1;
    R(k,j)=r(k)*ones(1,x);
    B=2*k-1;
    C=pi/(4*B);
    o(k,j)=C*A;
    D=o+L*R;
end
s=nonzeros(D.');
z=length(s);
ZZ=[[1:z]' real(s) imag(s)];

```

Programa 5

```

%function [ZZ,DS]=anular(N,n,a)
%calcula las coordenadas de cada
%elemento de superficie de una placa anular en coordenadas polares.
%N=número de anillos,a=radio exterior,b=radio interior.
%se debe cumplir que b=na/N, con n entero.
%ZZ=vector de coordenadas polares con índice, theta y erre
function [ZZ,ds]=anular(N,n,a)
ds=((a/N)^2)*pi/4; % elemento de superficie
i=[1:N];
L=sqrt(-1);
n1=1:n;
y=4*N^2;
y1=sum(4*(2*n1-1));
r=(2*i-1)*(a)/(2*N);
k=1;
for k=1:N;
    x=4*(2*k-1);
    j=1:x;
    A=2*j-1;
    R(k,j)=r(k)*ones(1,x);
    B=2*k-1;
    C=pi/(4*B);
    o(k,j)=C*A;
    D=o+L*R;
end
s=nonzeros(D.');
z=length(s);
ZZ1=[[1:z]' real(s) imag(s)]; %index,theta,r
ZZ=[ZZ1(y1+1:y,:)]';
polar(ZZ(:,2),ZZ(:,3),'o');

```

Rutinas para el cálculo de la matriz de resistencia (arreglo tridimensional)

Programa6:

```
%struve
%calcula la funcion de struve para una frecuencia t, que es un escalar.
function h=struve(t)
x=t;
sw=@(t)sin(t-x*sin(t))/pi;
h=2/pi-quad(sw,0,pi);
```

Programa7:

```
%function [RR]=loop(MXY,s,ko);
%calcula la matriz de resistencia, necesita el vector con las coordenadas
%centrales de los elementos de superficie
%ds=si superficie pistones equivalentes
%MXY vector de coordenadas centrales (cartesianas)
%de los pistones equivalentes
```

```
function [RR]=loop(MXY,ds,ko);
```

```
% parte 1:calcular r, la matriz con las distancias
% entre los elementos de superficie.
```

```
x=MXY(:,2);y=MXY(:,3);
```

```
N=length(x);
for i=1:N
    for k=i:N
        X(i,k)=x(i)-x(k);
        Y(i,k)=y(i)-y(k);
    end
end
re=sqrt(X.^2+Y.^2);
r=re+re';
```

```
% parte 2 :calcular la diagonal de la matriz de resistencia
a=sqrt(ds/pi); %radio de los pistones circulares equivalentes
po=1.21;
c=344;
H1=besselj(1,2*ko*a)/(ko*a);
```

```
b=po*c*(1-H1)/ds;
R1=b*ones(1,N);
```

```
% parte 3: calcular la matriz para i distinto de k
```

```
con=(2*po*c*ko^2)/pi; %constantes
for i=1:N
    for k=i:N
        if i~=k; %este ciclo reemplaza sin(x)/x si x=0 por 1
            sinc(i,k)=sin(ko*r(i,k))./(ko*r(i,k));
        else i==k;
            sinc(i,k)=1;
        end;
    end
end
end
```

```
H=(besselj(1,ko*a)/(ko*a)).^2;
R2=con*H*sinc;
```

```
% parte 4: cambiar la diagonal de la matriz por la q se calculo al comienzo
```

```
d=diag(R1,0);
d1=diag(R2);
d2=diag(d1,0);
d3=R2-d2;
RR=d3+d3'+d;
```

Programa8:

```
function [Xj]=Mreactancia(MXY,ds,ko);
%calcula la matriz de reactancia, necesita el vector con las coordenadas
%centrales de los elementos de superficie
% ds=si superficie pistones equivalentes
% MXY vector de coordenadas centrales (cartesianas)
%de los pistones equivalentes
```

```
% parte 1:calcular r, la matriz con las distancias
% entre los elementos de superficie.
```

```
x=MXY(:,2);y=MXY(:,3);
```

```
N=length(x);
for i=1:N
```

```

    for k=i:N
        X(i,k)=x(i)-x(k);
        Y(i,k)=y(i)-y(k);
    end
end
re=sqrt(X.^2+Y.^2);
r=re+re';

```

```

% parte 2 :calcular la diagonal de la matriz de resistencia
a=sqrt(ds/pi); %radio de los pistones circulares equivalentes
po=1.21;
c=344;
H1=struve(2*ko*a)/(ko*a);
b=po*c*H1/ds;
R1=b*ones(1,N);

```

% parte 3: calcular la matriz para i distinto de k

```

con=(2*po*c*ko^2)/pi; %constantes
for i=1:N
    for k=i:N
        if i~=k; %este ciclo reemplaza sin(x)/x si x=0 por 1
            cosc(i,k)=cos(ko*r(i,k))./(ko*r(i,k));
        else i==k;
            cosc(i,k)=1;
        end;
    end
end
end

```

```

H=(besselj(1,ko*a)/(ko*a)).^2;
R2=con*H*cosc;

```

% parte 4: cambiar la diagonal de la matriz por la q se calculo al comienzo

```

d=diag(R1,0);
d1=diag(R2);
d2=diag(d1,0);
d3=R2-d2;
Xj=d3+d3'+d;

```


Programa9:

```
%matriz3d
% calcula y guarda los valores de la matriz de resistencia de una placa circular para %varias
frecuencias en un arreglo tridimensional. Cada pagina corresponde a una
%frecuencia.
%para acceder a la matriz ya creada usar "load "
ko=logspace(-2,2,50);
[z,ds]=redonda(10,10);
index=1:length(z)
[x,y]=pol2cart(z(:,2),z(:,3))
c=[index' x y]
for i=1:length(ko)
    R(:,i)=loop(c,ds,ko(i));
End
```

Programa10:

```
%matriz3dEliptika
% calcula y guarda los valores de la matriz de resistencia de una placa elíptica para varias
frecuencias en un arreglo tridimensional. Cada pagina corresponde a una
%frecuencia.
%a,b semiejes mayor y menor respectivamente
%ko=número de onda, puede ser un vector o un escalar según sea conveniente
%para acceder a la matriz ya creada usar: 'load '

a=10;
b=5;
ko=0.01*[1:100];
[pp,ds]=discreliptika(a,b,10);
index=1:length(pp);
[x,y]=pol2cart(pp(:,3),pp(:,2));
c1=[index' x y];
for i=1:length(ko)
    RE(:,i)=loop(c1,ds,ko(i));
End
```

Programa11:

```
%matriz3dCuad
% calcula y guarda los valores de la matriz de resistencia de una placa rectangular para
%varias frecuencias en un arreglo tridimensional. Cada pagina corresponde a una
%frecuencia.
ko=logspace(-1,1,20);
[z,ds]=cuadrada(L1,L2,N1,N2);
index=1:length(z)
```

```

c=[index' z(:,2) z(:,3)]
for i=1:length(ko)
    R(:,i)=loop(c,ds,ko(i));
end

```

Programa12:

```

%matriz3dIm para placa elíptica
%calcula la matriz de reactancia como arreglo tridimensional
%function [Xj,c1]=matriz3dIm(a,b,n1,ko)
%a,b semiejes mayor y menor.
%n1=número de anillos
%ko=vector de numero de onda.

```

```

function [Xj,c1]=matriz3dIm(a,b,n1,ko)

```

```

[pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
index=1:length(pp);
[x,y]=pol2cart(pp(:,3),pp(:,2));
c1=[index' x y]; %contiene el número del elemento y sus coordenadas(x,y)
for i=1:length(ko)
    Xj(:,i)=Mreactancia(c1,ds,ko(i));
End

```

Rutinas para el cálculo de Modos de radiación, eficiencia de radiación, modos estructurales de vibración.

programa13:

```

function [M]=rutina(a,b,N,ko,R);
% calcula los autovalores de la matriz de resistencia,
% es decir, los modos de radiación.
% a,b semiejes de la placa elíptica, N el numero de anillos.
%ko el No de onda.
%R es la matriz de resistencia sin normalizar.
%(para normalizar se debe multiplicar por (ds^2/(po*c)))
c=343;
ds=pi*a*b/(4*N^2);
po=1.21;
RR=R*ds^2/(po*c);

for i=1:length(ko);

```

```
[V,D]=eigs(RR(:,i));
M(:,i)=diag(D);
```

```
end
```

```
loglog(ko*a,M);
```

Programa14:

```
function [M]=rutinaAnular(a,b,N,ko,R);
% calcula los autovalores de la matriz de resisitencia,
% es decir, los modos de radiacion. Para una placa anular.
% b es el radio interior,se debe cumplir que b=na/N con n entero,
%a el exterior, N el numero de anillos.
%ko el No de onda.
%R es la matriz de resistencia sin normalizar.
%para normalizar se
%debe multiplicar por (ds^2/(po*c))
c=343;
ds=pi*(a^2)/(4*N^2);
po=1.21;
RR=R*ds^2/(po*c);

for i=1:length(ko);
    [V,D]=eigs(RR(:,i));
    M(:,i)=diag(D);

end
loglog(ko*a,M);
```

Programa 15:

```
function [M]=rutinaCuad(L1,L2,N1,N2,ko,R);
% calcula los autovalores de la matriz de resisitencia,
% es decir, los modos de radiacion.
% a es el radio de la placa, N el numero de anillos.
%ko el No de onda.
%R es la matriz de resistencia sin normalizar.
%SI se quiere normalizar se
%debe multiplicar por (ds^2/(po*c))
c=343;
ds=L1*L2/(N1*N2);
po=1.21;
RR=R*ds^2/(po*c);

for i=1:length(ko);
```

```
[V,D]=eigs(RR(:,i));
M(:,i)=diag(D);
```

```
end
```

```
loglog(ko*a,M);
```

Programa16:

```
%function [V,ds,kn]=rutinav(N,a,ko,condicion)
% Calcula la distribución de velocidad de los seis primeros modos
% estructurales axisimétricos para una placa circular de radio a.
% Condicion=0 para clamped, 1 para simply supported
% N=número de anillos,a= radio placa.
% V=distribución de velocidad
% ds=elemento de superficie
% kn=número de onda estructural
% cada columna de V contiene la velocidad normal de cada elemento de
% superficie para un mismo valor de beta y de kn
% o sea, cada columna de V representa la velocidad de un modo

function [V,ds,kn]=rutinav(N,a,ko,condicion)

clamped= [3.1962,6.3064,9.4395,12.5771,15.7164,...
18.8565,21.9971,25.1379,28.2789,31.4200];

simplysupported=[2.14924036154129,5.43000758429456,8.59856558113667...
11.75174019607500,14.89978603869220,18.04549508407654...
21.18994291011426,24.33363248389358,27.47683059756068];

if condicion==0;
    b=clamped;
elseif condicion==1;
    b=simplysupported;
end
[z,ds]=redonda(N,a);

r=z(:,3);

kn=b(1:6)/a;
A1=besselj(0,b(1:6)); % vector con la funcion de besselj para cada b
A2=besseli(0,b(1:6)); % vector con la funcion de besseli para cada b
for i=1:length(kn)
```

```

A3(:,i)=besseli(0,kn(i)*r); %Cada columna tiene un kn distinto
A4(:,i)=besselj(0,kn(i)*r); %Cada columna tiene un kn distinto
end
A=A1./A2; % vector.El elemento iesimo de A1 es dividido
           % por el elemento iesimo de A2
for i=1:length(A)
    AA(:,i)=A3(:,i)*A(i); % La columna iesima de AA es La columna iesima de A3
                       % multiplicada por el elemento iesimo de A
end
V=(A4-AA); % cada columna de V es la velocidad normal
           % de los elementos de superficie para un modo

```

Programa17:

```

%function [V,kn]=rutinavA(a,n,N)
% Calcula la distribución de velocidad de los modos
% estructurales axisimétricos.
% cada columna de V contiene la velocidad normal de cada elemento de
% superficie para un mismo valor de beta y de kn
% o sea, cada columna de V representa la velocidad de un modo
%se debe cumplir que b=na/N, con n entero.
function [V,kn]=rutinavA(a,n,N);
b=n*a/N;
[z,ds]=anular(N,n,a)
r=z(:,3);
beta=[3.1966
      6.3123
      9.4445
      12.5812
      15.7199
      18.8595
      21.9997
      25.1402]; % contiene las raíces de la ecuación de frecuencias

```

Vo=1;

```

kn=beta(1:6)/b;
A1=besselj(1,beta(1:6)); % vector con la funcion de besselj para cada beta
A2=bessely(1,beta(1:6)); % vector con la funcion de besseli para cada beta
for i=1:length(kn)
    A3(:,i)=bessely(0,kn(i)*r); %Cada columna tiene un kn distinto
    A4(:,i)=besselj(0,kn(i)*r); %Cada columna tiene un kn distinto
end
A=A1./A2; % vector.El elemento i-ésimo de A1 es dividido
           % por el elemento i-ésimo de A2
for i=1:length(A)
    AA(:,i)=A3(:,i)*A(i); % La columna iesima de AA es La columna i-ésima de A3

```

```

        % multiplicada por el elemento i-ésimo de A
end
V=Vo*(A4-AA); % cada columna de V es la velocidad normal
                % de los elementos de superficie para un modo

```

Programa18:

```

%function V=rutinavcuad(a,b,m,n,z)
% Calcula la distribución de velocidad de un modo
% estructural para una placa cuadrada con soporte simple.

```

```
function [V,kp]=rutinavcuad(a,b,m,n)
```

```
z=cuadrada(a,b,20,20);
lambda=pi^2*(m^2+n^2);
```

```
kp=sqrt(lambda)/a;
```

```
km=m*pi/a;
kn=n*pi/b;
x=km*z(:,2);
y=kn*z(:,3);
V=sin(x).*sin(y);
```

Programa19:

```

% function [V,kp]=rutinavclamped(m,n,a,b)
%calcula la distribucion de velocidad para el modo estructural m,n de una placa %cuadrada
clamped
%a,b dimensiones de la placa; m,n numero de modo.

```

```
function [V,kp]=rutinavclamped(m,n,a,b)
```

```

[XY,ds]=cuadrada(a,b,20,20);
x=XY(:,2);
y=XY(:,3);
C=[4.73 7.8532 10.9956 14.1372 17.2788];
sa=(C(m)*x/a);
sb=(C(n)*y/b)
Ja=cosh(sa)-cos(sa);
Jb=cosh(sb)-cos(sb);
Ha=sinh(sa)-sin(sa);
Hb=sinh(sb)-sin(sb);

```

```

Jm=cosh(C(m))-cos(C(m));
Jn=cosh(C(n))-cos(C(n));
Hm=sinh(C(m))-sin(C(m));
Hn=sinh(C(n))-sin(C(n));

```

```

E1=Ja-(Jm/Hm)*Ha;
E2=Jb-(Jn/Hn)*Hb;
V=E1.*E2;

```

```

beta=[36.109 73.737 132.48;nan 108.85 165.92;nan nan 220.90]           %contiene los
                                         % valores de la ecuación de frecuencia
                                         %cosh(beta) cos (beta)- cosh(beta) cos (beta)
kp=sqrt(beta(m,n))/a;

```

Programa20:

```

%function ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);
%Usa la matriz de resistencia ya calculada
%calcula la ef de radiación y la potencia para cada columna de V, que
%representa la velocidad de volumen de de cada elemento para cada valor de
%b(vector que contiene las raíces de la ecuación de frecuencias) y para
%cada valor de ko
%S =superficie de la placa

function ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);

u=ds*V; %superficie por velocidad normal,o sea:velocidad de volumen
        %cada columna es la velocidad de volumen de un modo
po=1.21;
c=343;
[M1,N1]=size(u);

U=diag(u'*conj(u)); %cada elemento representa una columna de u,
                   %con la suma de sus elementos al cuadrado

v2=(M1/(2*S^2))*U; %velocidad promediada espacial y temporalmente
v22=diag(v2,0);
I=ones(length(ko),N1); % matriz de length(ko)xN1,
v23=I*v22;           % matriz de length(ko)xN1,
for i=1:length(ko);
    for j=1:N1
        UU(i,j)=u(:,j)'*R(:,i)*conj(u(:,j)); %cada columna representa un modo
    end
    %cada fila una frecuencia
end
end

```

```

Wrad=0.5*UU;          %cada fila corresponde a un valor de ko
                      %cada columna a un modo
                      % matriz de length(ko)xN1, 100x10

ef=Wrad./((po*c*S)*v23); % matriz de length(ko)xN1, 100x10
                      %cada fila corresponde a un valor de ko
                      %cada columna a un modo

```

Programas para graficar

Programa21:

```

%plotea la eficiencia de radiación de los modos estructurales

function plop2(ef,ko,kn) %ef=matriz de eficiencia de radiación
                       %ko=numero de onda en el aire
                       %kn=numero de onda estructural

for i=1:length(kn)
    k(:,i)=ko/kn(i); %Cada columna de k corresponde a un modo
end

loglog(k,ef)

```

Programa22:

```

%pistonesIm
%calcula y grafica las reactancias de radiación
%de pistones elípticos de aspect ratio 1, 0.5 y 0.25
clear
hold on
n1=10;
a=10;
b=10;
S=pi*a*b; %superficie de la placa
ko=0.01*[1:100];
[pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);
[x,y]=pol2cart(pp(:,3),pp(:,2));
c1=[index' x y];
for i=1:length(ko)
    Xj(:,i)=Mreactancia(c1,ds,ko(i));
end

```



```

end
ef=rutinaef(Xj,ko,S,ds,V);

plot(ko*a,ef,'o')

clear ;
a=10; % semieje mayor
b=5; % semieje mayor
S=pi*a*b; %superficie de la placa
n1=10; % número de anillos
ko=0.01*[1:5:100];
[pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);
[x,y]=pol2cart(pp(:,3),pp(:,2));
c1=[index' x y];
for i=1:length(ko)
    Xj(:, :, i)=Mreactancia(c1,ds,ko(i));
end
ef=rutinaef(Xj,ko,S,ds,V);

```

```

plot(ko*a,ef,'X')

```

```

clear ;
a=10; % semieje mayor
b=2.5; % semieje mayor
S=pi*a*b; %superficie de la placa
n1=10; % numero de anillos
ko=0.01*[1:5:100];
[pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);
[x,y]=pol2cart(pp(:,3),pp(:,2));
c1=[index' x y];
for i=1:length(ko)
    Xj(:, :, i)=Mreactancia(c1,ds,ko(i));
end
ef=rutinaef(Xj,ko,S,ds,V);

```

```

plot(ko*a,ef)
hold off
grid

```

Programa23:

% Calcula y plotea la eficiencia de radiación de tres pistones elípticos de
% aspect ratio B=[1,05,025].

```
clear ;
a=10; % semieje mayor
b=10; % semieje mayor
n1=3; % numero de anillos
ko=0.01*[1:100];
S=pi*a*b;
[pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);
[x,y]=pol2cart(pp(:,3),pp(:,2));
c1=[index' x y];
for i=1:length(ko)
    R(:,i)=loop(c1,ds,ko(i));
end
ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);
hold on
plot(ko*a,ef,'x')
```

```
clear ;
a=10; % semieje mayor
b=5; % semieje mayor
n1=3; % numero de anillos
ko=0.01*[1:100];
S=pi*a*b;
[pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);
[x,y]=pol2cart(pp(:,3),pp(:,2));
c1=[index' x y];
for i=1:length(ko)
    R(:,i)=loop(c1,ds,ko(i));
end
ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);
```

```
plot(ko*a,ef,'o')
```

```
clear ;
a=10; % semieje mayor
b=2.5; % semieje mayor
n1=3; % numero de anillos
S=pi*a*b;
ko=0.01*[1:100];
```

```

[pp,ds]=discreliptika(a,b,n1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);
[x,y]=pol2cart(pp(:,3),pp(:,2));
c1=[index' x y];
for i=1:length(ko)
    R(:,i)=loop(c1,ds,ko(i));
end
ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);

```

```

plot(ko*a,ef,'--')
hold off
grid

```

Programa24:

% Calcula y plotea la eficiencia de radiación de tres pistones rectangulares de
 % aspect ratio B=[1,05,025].

```

clear ;
a=10; % lado mayor
b=10; % lado mayor
N1=20;
ko=0.01*[1:2:105];
S=a*b;
[pp,ds]=cuadrada(a,b,N1,N1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);

```

```

for i=1:length(ko)
    R(:,i)=loop(pp,ds,ko(i));
end
ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);

```

```

plot(ko*a,ef,'-')
hold on

```

```

clear ;
a=10; % lado mayor
b=5; % lado mayor
N1=20;
ko=0.01*[1:2:105];
S=a*b;
[pp,ds]=cuadrada(a,b,N1,N1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);

```

```

for i=1:length(ko)
    R(:,i)=loop(pp,ds,ko(i));
end
ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);

plot(ko*a,ef,'-')

clear ;
a=10; % lado mayor
b=2.5; % lado mayor
N1=20;
ko=0.01*[1:2:105];
S=a*b;
[pp,ds]=cuadrada(a,b,N1,N1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);

```

```

for i=1:length(ko)
    R(:,i)=loop(pp,ds,ko(i));
end
ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);
plot(ko*a,ef,':')
hold off
gris

```

Programa25:

% Calcula y plotea la reactancia de radiación de tres pistones rectangulares de
 % aspect ratio B=[1,05,025].

```

clear ;
a=10; % semieje mayor
b=10; % semieje mayor
N1=20;
ko=0.01*[1:100];
S=a*b;
[pp,ds]=cuadrada(a,b,N1,N1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);

for i=1:length(ko)
    Xj(:,i)=Mreactancia(pp,ds,ko(i));
end
ef=rutinaefXj(a,b,Xj,ko,ds,V,S);

plot(ko*a,ef,'-')
hold on

```

```

clear ;
a=10; % semieje mayor
b=5; % semieje mayor
N1=20;
ko=0.01*[1:100];
S=a*b;
[pp,ds]=cuadrada(a,b,N1,N1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);

for i=1:length(ko)
    Xj(:,i)=Mreactancia(pp,ds,ko(i));
end
ef=rutinaefXj(a,b,Xj,ko,ds,V,S);

plot(ko*a,ef,'-')

```

```

clear ;
a=10; % semieje mayor
b=2.5; % semieje mayor
N1=20;
ko=0.01*[1:100];
S=a*b;
[pp,ds]=cuadrada(a,b,N1,N1);
index=1:length(pp);
V=ones(length(pp),1);

for i=1:length(ko)
    Xj(:,i)=Mreactancia(pp,ds,ko(i));
end
ef=rutinaefXj(a,b,Xj,ko,ds,V,S);

plot(ko*a,ef,':')
hold off

```

Programa 26:

%calcula y plotea la eficiencia de radiacion para algunos modos
%estructurales de una placa cuadrada clamped de lado a.

```

a=10;
b=a;
S=a*b;
m=1:3;
n=1:3;
ko=logspace(-2,2);
hold on

```

```

for i=1:3
    for j=1:3

        [V,kp]=rutinavclamped(m(i),n(j),a,b)
        ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);
        plop2(ef,ko,kp)
        end
    end
end
hold off

```

Programa27:

%calcula y plotea la eficiencia de radiacion para algunos modos
 %estructurales de una placa cuadrada simple supported de lado a.

```

a=10;
b=a;
S=a*b;
m=1:3;
n=1:3;
ko=logspace(-2,2);

hold on
for i=1:3
    for j=1:3
        [V,kp]=rutinavcuad(a,b,m(i),n(j))
        ef=rutinaef(R,ko,S,ds,V);
        plop2(ef,ko,kp)
        end
    end
end
hold off
grid

```