



# Universidad Austral de Chile

Facultad de Ciencias de la Ingeniería

Escuela de Ingeniería Naval

## “CORRELACIÓN DE TENSIONES Y DEFORMACIONES ENTRE HÉLICES DE DISTINTOS MATERIALES A TRAVÉS DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS”

Tesis para optar al Grado de:  
Licenciado en Ciencias de la Ingeniería.

PROFESOR PATROCINANTE:

Sr: Richard Luco Salman.

Dr. Ingeniero Naval.

RODRIGO AMAGNO SEPÚLVEDA BENAVIDES  
VALDIVIA – CHILE  
2006

Esta Tesis ha sido sometida para su aprobación a la Comisión de Tesis, como requisito para obtener el grado de Licenciado en Ciencias de la Ingeniería.

La Tesis aprobada, junto con la nota de examen correspondiente, le permite al alumno obtener el título de **Ingeniero Naval**, mención **Arquitectura Naval**.

### EXAMEN DE TITULO:

Nota de Presentación	(Ponderada) (1)	: 4,694
Nota de Examen	(Ponderada) (2)	: 1,400
Nota Final de Titulación	(1 + 2)	: 6,094

### COMISION EXAMINADORA:

PROF. FREDY RIOS M.

DECANO



FIRMA

PROF. DR. RICHARD LUCO S.

EXAMINADOR

FIRMA

PROF. NELSON PEREZ M.

EXAMINADOR

FIRMA

PROF. CARLOS SANGUINETTI V.

EXAMINADOR

FIRMA

PROF. MILTON LEMARIE O.

SECRETARIO ACADEMICO

FIRMA

Valdivia, JULIO 14 DE 2006

Nota de Presentación =  $NC/NA * 0,6 + \text{Nota de Tesis} * 0,2$   
Nota Final =  $\text{Nota de Presentación} + \text{Nota Examen} * 0,2$   
NC = Sumatoria Notas de Currículo, sin Tesis  
NA = Número de asignaturas cursadas y aprobadas, incluida Práctica Profesional.

*No puedo dejar pasar esta oportunidad para agradecer el incondicional respaldo y confianza que me ha entregado mi familia, en especial mis hermanos Sonia, Ruby, Ana, Lucy, Mary, Guido y Angélica, quienes durante toda mi vida me han demostrado que puedo contar con ellos en cualquier circunstancia. A mi madre, que sin duda, le pertenece este logro y quien nos ha dedicado su vida por completo y a mi papá, que me ha apoyado cuando ha podido hacerlo.*

*A quienes me han recibido en sus casas y me han integrado como uno más de sus familias, a mis compañeros, a los profesores y a todas las personas que hicieron de mi estadía en Valdivia un lugar agradable durante estos años.*

## ÍNDICE

<b>RESUMEN</b>	<b>VII</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>VIII</b>
 <b>INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	
1.1- Planteamiento general del método.	1
1.1.1 - Modelo matemático.	2
1.1.1.1 - LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD	2
1.1.2 - Discretización del dominio.	5
1.1.2.1 - Elección del elemento	5
1.1.2.2 - Generación de la malla.	7
1.1.3-Funciones de aproximación.	8
1.1.3.1 - Series polinómicas.	8
1.1.3.2 - Funciones de forma.	10
1.1.4 - Ecuaciones de compatibilidad.	11
1.1.5 - Matriz de rigidez elemental.	13
1.1.6 - Condiciones de contorno.	15
1.1.7 - Obtención de los desplazamientos y tensiones.	16
1.1.8. - Presentación de resultados.	16
 1.2 - Análisis tridimensional de tensiones.	 16
1.2.1 - Funciones de desplazamiento.	17
1.2.2 - Matriz de deformaciones.	19
1.2.3 - Matriz de elasticidad.	20
 1.3. - Tipos de análisis estructural.	 21
 1.4. - Instrumentos informáticos.	 22
 <b>MATERIALES COMPUESTOS</b>	
2.1 - Introducción:	24
 2.2 - Análisis micromecánico de láminas.	 27
2.2.1 - Materiales componentes.	28
2.2.2 - Regla de mezcla - Constantes de ingeniería.	31
2.2.3 - Tensión y deformación axial.	32
2.2.4 - Transformación de coordenadas y tensión-deformación no axial.	33
2.2.5 - Rigidez no axial y conformidad (matriz de rigidez inversa).	34

2.2.6 - Resistencia de una lámina.	35
2.2.6.1 - Criterio de máxima tensión.	35
2.2.6.2 - Criterio de máxima deformación.	36
2.2.6.3 - Criterio de falla de Tsai-Wu.	36
2.3 - Análisis de laminado.	37
2.3.1 - Rigidez de láminas en el plano.	33
2.3.2 - Rigidez a la flexión del laminado.	38
2.3.3 - Resistencia de laminados.	41
<b>ELEMENTOS FINITOS PARA MATERIALES COMPUESTOS</b>	
3.1 - Elementos rectangulares para compuestos delgados.	42
3.2 - Elementos rectangulares para compuestos gruesos.	45
<b>GEOMETRÍA DE LA HÉLICE</b>	
4.1 - La hélice como elemento propulsor.	47
4.2 - Superficies helicoidales.	49
4.3 - Representación gráfica de la hélice.	52
a) Proyección lateral.	53
b) Proyección frontal.	53
c) Perfiles expandidos.	53
4.4 - Relaciones geométricas.	54
<b>RESISTENCIA MECÁNICA DE LAS PALAS</b>	
5.1 - Generalidades.	56
5.2 - Esfuerzos debidos al par y al empuje.	56
5.3 - Esfuerzos debidos a la fuerza centrífuga.	60
5.4 - Cálculo de los esfuerzos unitarios.	61
5.4.1 - Fórmula de Tayton	62
5.4.2 - Fórmulas de Romson.	63
5.5 - Cálculo de una hélice por reglamento.	64
5.5.1 - Materiales.	64
5.5.2 - Cálculo del espesor de las palas.	64
<b>CARACTERÍSTICAS DE LA HÉLICE</b>	
6.1 - Características.	68
6.2 - Condiciones de operación.	68
6.3 - Geometría de la hélice.	68

<b>MODELADO DE LA HÉLICE</b>	
7.1 - Perfil de la cara de presión y núcleo.	70
7.2 - Superficie helicoidal en la cara de presión.	71
7.3 - Cara de succión.	73
7.4 - Unión pala - núcleo.	77
7.5 - Maliado en Algor.	79
<b>ESTIMACIÓN DE CARGAS Y CONDICIÓN DE CONTORNO</b>	
8.1 - Generalidades.	82
8.2 - Fuerzas por empuje y torque.	83
8.4 - Ubicación y vector de dirección de las fuerzas puntuales.	86
8.5 - Cálculo de las cargas a aplicar al modelo.	86
8.6 - Condición de contorno.	89
<b>CÁLCULO ESTRUCTURAL CON DISTINTOS MATERIALES</b>	
9.1 - Níquel-Aluminio - Bronce (NAB)	90
9.2 - Laminado A	93
9.3 - Comparación de resultados.	95
<b>CONCLUSIONES</b>	96
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	98

## **RESUMEN**

Durante mucho tiempo las hélices se han dimensionado de acuerdo a reglamentos de casa clasificadoras quienes a través de expresiones empíricas que relacionan una serie de variables, proporcionan los espesores del perfil en la pala a diferentes radios evadiendo así, un análisis estructural de tensiones, que a su vez implica un gran trabajo, puesto que las formulaciones sólo nos entregan el valor en un punto, por tanto hacer la distribución completa de tensiones para una hélice tomaría mucho tiempo y esfuerzo.

Gracias a las versiones más actualizadas en software de diseño y elementos finitos, que tienen una gran flexibilidad, podemos modelar geometrías complejas en uno y ejecutar todo tipo de análisis disponibles en otro.

Con tal oportunidad que nos brindan estos programas, se realizará un cálculo estructural para una hélice ya construida donde se mostrará la distribución de tensiones y las deformaciones que se producen en el propulsor cuando está operando al máximo de su capacidad y se hará una comparación de resultados evaluando diversos materiales de construcción bajo la acción de las cargas aplicadas.

## **SUMMARY**

From a long time propellers were dimensioned by rules of classification, using empiric expressions, which are related with many variables. The expressions allow us to get the foil thicknesses of the blade for a specific radius, without a structural analysis, which is labor intensive because formulas only give values for a specific point, so to make the whole tension distribution will take too much time and effort.

With the new CAD and FEM software, we can design complex geometrical shapes and later analyze these ones using different programs for both work stages

In this way, we'll effectuate a finite element structural analysis for a propeller already built where, we're analyze the tension map and deformed shape of it in a load condition, and also we'll make comparisons between different materials models under the action of loads applied.

## **INTRODUCCIÓN**

Para una comprensión en la formulación del método de elementos finitos, comenzaremos por dar un planteamiento general donde se indican los principales enunciados que caracterizan este procedimiento de cálculo, que aplicaremos para encontrar la distribución de tensiones en una hélice de bronce, la cual se comparará con una ficticia de material compuesto. Las propiedades y características de tales compuestos se exponen por separado para razonar la diferencia entre ambos materiales, quienes serán sometidos a las distintas cargas que deduciremos a través de un método empírico, que contrasta en la simpleza con una formulación entregada que nos permite realizar manualmente los cálculos de resistencia mecánica de las palas.

Los conceptos y fundamentos en el origen de la geometría para una hélice son proporcionados con el fin de tener una mayor perspectiva de la situación en estudio. La geometría del propulsor elegido fue modelada en un programa de diseño, además se explica de manera muy sencilla como hacer una hélice paso a paso y así llegar a obtener el modelo para esta estructura compleja de una manera mucho más ágil, que hacerla directamente en un software de elementos finitos.

De esta forma podremos aplicar las fuerzas que actúan en una pala para determinar de manera muy cercana a la realidad, donde se producen los esfuerzos máximos así como la deformación de la hélice bajo la acción de las cargas que está generando. Con esto podremos hacer una comparación en los resultados obtenidos con los distintos materiales para concluir cuales son las diferencias entre ellos para este caso en particular.

## **CAPÍTULO I**

### **INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

La necesidad de obtener respuestas fiables y rápidas a los diferentes problemas que se presentan en ingeniería, ha llevado al método de elementos finitos (MEF), a ser uno de los instrumentos más utilizadas en la solución de estos, destacando el área de cálculo de estructuras en donde su aplicación ha hecho posible soluciones prácticas a problemas complejos de abordar mediante otras técnicas.

#### **1.1 – Planteamiento general del método.**

El método consiste en discretizar un medio continuo mediante elementos llamados elementos finitos, que están enlazados entre si a través de nodos ubicados en el contorno de estos. En cada elemento se asume una función de aproximación que definirá el comportamiento de la variable que se esté estudiando, en el caso de las estructuras serán los desplazamientos, en función de los valores que adquiera esta variable en los nodos, es decir los desplazamientos nodales. Una vez obtenidos estos valores se plantean las ecuaciones de compatibilidad de todos los elementos y se resuelven utilizando métodos matriciales. La primera impresión es que el método es similar a lo que se conoce como “análisis matricial de estructuras”, pero como se verá más adelante, la diferencia fundamental está en la obtención de la matriz de rigidez, además de no estar limitado al análisis de estructuras discretas.

El método de elementos finitos puede plantearse en una serie de etapas, las que se pueden ordenar de la siguiente forma:

- 1.1.1. – Modelo matemático.
- 1.1.2. – Discretización del dominio.
- 1.1.3. – Funciones de aproximación.
- 1.1.4. – Ecuaciones de compatibilidad.
- 1.1.5. – Matriz de rigidez.
- 1.1.6. – Condiciones de contorno.
- 1.1.7. – Obtención de desplazamientos y tensiones.
- 1.1.8. – Presentación de los resultados.

Se detallan a continuación cada una de las etapas señaladas:

### **1.1.1 – Modelo matemático.**

Se debe seleccionar un modelo matemático que describa el comportamiento de la estructura, como por ejemplo la teoría de la elasticidad, explicado brevemente a continuación.

En casos muy contados es posible obtener una solución analítica del problema, por lo que es común utilizar técnicas numéricas, con lo que se obtiene una solución aproximada, involucrándose por lo tanto, la experiencia de quien realiza los cálculos.

#### **1.1.1.1 – LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD**

De un modo genérico se puede definir el ámbito de la teoría de la elasticidad como extendido al estudio del comportamiento de los sólidos deformables. No obstante, bajo el término de elasticidad cabe incluir el análisis de situaciones con material no lineal, de frecuente aplicación a la Mecánica del Suelo, o con grandes movimientos y deformaciones, así como extensiones de evidente interés en el estudio de la propagación de fisuras, como la teoría de la elasticidad micropolar o el caso particular de la misma conocido como elasticidad con tensiones-momentos.

En la actualidad, la utilización del computador ha permitido extender la utilidad de la teoría de la elasticidad más allá de los aspectos anteriormente comentados. En efecto, tras la aparición de los métodos de los elementos finitos y de los elementos de contorno, es posible obtener soluciones numéricas de problemas complejos en geometría, cargas y condiciones de contorno.

#### **1.1.1.2 – Concepto de sólido elástico.**

Un aspecto importante que debe considerar el ingeniero en las construcciones corresponde a su estabilidad y resistencia. Estas propiedades se comprueban mediante un modelo matemático resultado de una abstracción de la realidad, y es en este modelo, que en general no es único, sobre el que se aplican las técnicas físico-matemáticas adecuadas, con objeto de deducir unos resultados que deben ser, a su vez, trasladados a la realidad.

Por consiguiente, existen tres etapas en una comprobación de la resistencia de una construcción: idealización, cálculo e interpretación de los resultados.

La idealización de la realidad se denomina sólido elástico, conviene recordar a este respecto, que en la mecánica racional, el proceso de abstracción conducía a un modelo denominado sólido rígido. En ambos casos, se concibe el modelo de sólido como un conjunto de puntos materiales que interaccionan entre si mediante las fuerzas intermoleculares de cohesión. Los dos tipos de modelo de sólido presentan las siguientes propiedades:

- **El sólido rígido** se caracteriza por conservar invariables las distancias entre sus puntos materiales.
- **El sólido elástico**, al igual que el sólido real, corresponde a modelos que implican modificación de las distancias entre puntos materiales. Sin embargo, en el sólido elástico se supone que no existen espacios vacíos intermoleculares contrariamente al sólido real, es decir, la masa de los distintos puntos se distribuye uniformemente en su entorno. Por ello el sólido elástico se dice que es un sólido deformable continuo. Esta última propiedad implica que para todo entorno de un punto geométrico del sólido existe asociada una masa o, lo que es lo mismo, la masa es una función de distribución continua y todos los puntos geométricos son materiales.

El sólido elástico así definido es el modelo que estudia la mecánica de los medios continuos, y en particular como parte de la misma, la elasticidad. No obstante, y con objeto de reducir su ámbito y simplificar la formulación matemática, se suele considerar una clase de sólidos que sean *elásticos, homogéneos y continuos*. La propiedad elástica supone la recuperación de las distancias modificadas por una acción a la situación inicial una vez que cesa esta. Las cualidades de homogeneidad e isotropía consideran la igualdad de las características del sólido (masa, propiedades elásticas, etc.) independientemente del punto y de la dirección respectivamente.

En resumen, la elasticidad lineal estudia el comportamiento del sólido elástico definido como un sistema de puntos materiales deformable, continuo, elástico, homogéneo e isótropo.

Desde un punto de vista formal, el comportamiento del sólido elástico se rige de acuerdo con las siguientes hipótesis:

- **El sólido es continuo y permanece así bajo la acción de las cargas exteriores.**
- **El principio de superposición de efectos es válido.**
- **Existe un estado único sin tensiones en el sólido al cual se vuelve cuando cesan las acciones.**

La validez de las hipótesis anteriores exige que todas las ecuaciones que intervengan en el cálculo elástico sean lineales.

Las ecuaciones de la elasticidad se pueden clasificar en tres grandes grupos:

- (a) Ecuaciones de equilibrio o estáticas, que relacionan las fuerzas actuantes con magnitudes estáticas denominadas tensiones.**
- (b) Ecuaciones de compatibilidad o cinemáticas, que representan condiciones entre los movimientos del sólido y unas magnitudes cinemáticas llamadas deformaciones.**
- (c) Ecuaciones constitutivas o mixtas, que expresan el comportamiento del material que compone el sólido, es decir, relacionan las tensiones con las deformaciones.**

Las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad pueden deducirse mediante consideraciones de la mecánica racional. Las ecuaciones constitutivas son fenomenológicas y sólo pueden obtenerse vía ensayos experimentales.

Los tres grupos de ecuaciones anteriores tienen que ser lineales, si la hipótesis de superposición de efectos es válida. La linealidad de las ecuaciones de equilibrio o linealidad estática exige que la geometría del sólido elástico que se considere en el planteamiento de las ecuaciones sea la correspondiente a la del sólido en su posición inicial; es decir, no depende de los movimientos experimentados por el sólido.

La linealidad de las ecuaciones de compatibilidad o linealidad cinemática supone que las ecuaciones entre deformaciones y movimientos sean de primer grado lo que implica desprestigiar todos los términos cuadráticos y de los movimientos frente a las primeras potencias de estos.

Finalmente, la linealidad del material asume que este sea elástico Hookeano, es decir, las ecuaciones entre tensiones y deformaciones sean lineales. Además si se descargan las acciones, se alcanza el estado inicial único sin deformaciones permanentes (propiedad elástica del material).

### **1.1.2 – Discretización del dominio.**

La idea básica de “discretizar” es dividir el medio continuo en una serie de elementos, cuyos tamaños y orden estarán previamente establecidos, con el objeto de reducir de infinitas a finitas las incógnitas a resolver y que representarán, en este caso, el comportamiento de la estructura. Los elementos en que se divide el medio continuo se denominan *elementos finitos* y están conectados entre si por nodos ubicados generalmente en la frontera de cada uno de ellos, el conjunto de elementos finitos y nodos da por resultado una malla, la que representará lo más fielmente posible la geometría del medio continuo.

En la discretización del medio continuo se pueden diferenciar dos aspectos importantes, el primero es la tipología del elemento y el segundo la densidad de la malla a utilizar, de estos dos aspectos depende en gran medida la precisión del resultado que se obtenga.

#### 1.1.2.1 – Elección del elemento

La tipología del elemento a utilizar dependerá principalmente del problema que se quiera resolver, por lo que es recomendable tener un conocimiento a priori del comportamiento de la estructura y de la respuesta que ofrece cada elemento, esto basado principalmente en la función de aproximación asociada a éste y su geometría.

Una clasificación general de los elementos y en función principalmente de su geometría, se puede realizar como se detalla a continuación:

i) *Elementos monodimensionales*: constituidos por barras y vigas, utilizados en diversos tipos de problemas, siendo de gran utilidad en aquellos que se requiera “rigidizar” paneles mediante refuerzos.

ii) *Elementos bidimensionales*: constituidos por elementos triangulares (lineales o cuadráticos), rectangulares (lineales, lagrangianos o serendípticos) y cuadriláteros (resultantes de la eliminación del nodo central de la unión de cuatro elementos triangulares).

iii) *Elementos tridimensionales*: resultan de la generalización de los elementos bidimensionales, pudiendo diferenciarse los axisimétricos, paralelepípedos y hexaedros.

En la actualidad existe una amplia gama de elementos, dependiendo de la herramienta informática que se use, como se detalla en la figura 1.1.1, siendo necesario resaltar que para cada problema se deberá utilizar el elemento adecuado introduciendo las variables nodales correspondientes.

### TIPOS DE ELEMENTOS

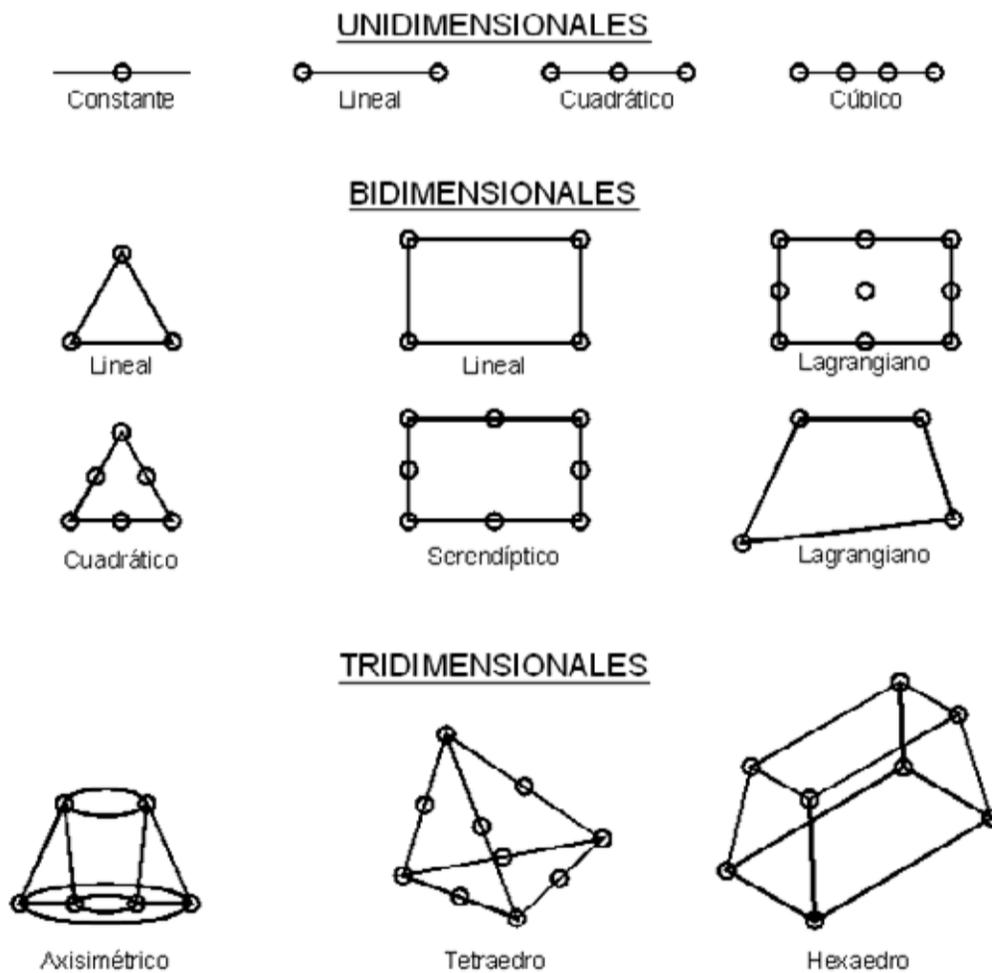


FIGURA 1.1.1 TIPOS DE ELEMENTOS

Los elementos detallados anteriormente pueden distorsionar su geometría permitiendo una mejor aproximación a la geometría del modelo en estudio, estos se conocen como elementos isoparamétricos y son generados por medio de transformaciones bilineales, teniendo la particularidad de que un elemento generatriz bidimensional, no sólo dará como resultado un elemento isoparamétrico bidimensional sino que puede generar uno tridimensional. La utilización de elementos isoparamétricos, soluciona en gran medida el problema de representación geométrica de modelos complejos, especialmente aquellos que poseen zonas con curvaturas pronunciadas y en las que sería necesario un gran número de elementos para representar fielmente su geometría. Existen además los elementos isoparamétricos degenerados, producto del desplazamiento de uno de los nodos de un elemento isoparamétrico triangular o rectangular, utilizado comúnmente en el estudio de fenómenos de mecánica de fractura.

#### 1.1.2.2 – Generación de la malla.

El conjunto de elementos finitos, conectados entre si a través de sus nodos, se denomina malla, siendo de gran importancia el orden en el que se distribuyan los elementos y la densidad de esta.

El orden de los elementos en la malla tiene directa relación con el tiempo que utilice el computador para resolver el problema, ya que, una vez obtenidas las matrices de rigidez de los elementos, el orden en el que estén dispuestos en el modelo definirá el ancho de banda de la matriz global, por consiguiente, un estudio preliminar de la distribución de los elementos en el modelo asegurará un menor esfuerzo informático.

Los programas modernos tienen una función de automallado que realiza en forma automática la optimización de la distribución de los elementos, mejorando el rendimiento del computador.

La densidad de la malla o tamaño de los elementos tiene directa relación con el grado de precisión que se requiera, ya que mientras más fina sea la malla, es decir, mientras más pequeños sean los elementos que se utilicen, mayor será el grado de precisión que se obtendrá.

Generalmente un refinamiento de la malla involucra un mayor trabajo informático, por lo tanto, la técnica utilizada es de refinar en forma progresiva y sólo en las zonas de interés, poniendo cuidado en algunos aspectos como el que la malla inicial esté contenida en la malla que resulte de disminuir el tamaño de los elementos y que el tamaño de una de las dimensiones del elemento utilizado no sea mucho mayor o menor que las otras.

En numerosos casos la generación de la malla de un modelo implica el utilizar un gran número de elementos, por lo que se debe considerar la posibilidad de aplicar condiciones de simetría, lo que traerá como resultado un ahorro del trabajo informático o una mayor exactitud de resultados.

### 1.1.3 – Funciones de aproximación.

Las funciones de aproximación o funciones de interpolación, nos permiten aproximar los valores de la variable en estudio (desplazamientos) dentro del elemento, a valores en los nodos, para ello existen dos maneras, una a través de funciones de forma y otra utilizando series polinómicas, siendo estas últimas las más utilizadas por su sencillez de manejo y porque basta con aumentar el grado del polinomio para aumentar el grado de precisión.

#### 1.1.3.1 – Series polinómicas.

Este método define la función de desplazamientos dentro del elemento mediante un polinomio completo  $M(x,y,z)$ , de grado  $n$  igual al número de grados de libertad de los nodos del elemento, es decir:

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6y^2 \\ + a_7z^2 + a_8xy + a_9yz + a_{10}xz + \dots + a_mz^n \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

que expresado en forma matricial será:

$$\Phi(x,y,z) = M^T A$$

$$M^T = \{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx, \dots, z^n\}$$

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} \quad (1.1.2)$$
$$m = \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot (n+2-i)$$

donde  $m$  es el número de términos del polinomio.

En un elemento, con un número de nodos igual a  $m$ , la función de interpolación en función de los valores nodales queda:

$$\Phi_n = [M_n] A$$
$$\Phi_n = \begin{Bmatrix} \Phi(\text{nodo}_1) \\ \Phi(\text{nodo}_2) \\ \vdots \\ \Phi(\text{nodo}_m) \end{Bmatrix}$$
$$M_n = \begin{bmatrix} M^T(\text{nodo}_1) \\ M^T(\text{nodo}_2) \\ \vdots \\ M^T(\text{nodo}_m) \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

Si despejamos la matriz  $A$ , obtenemos el valor de los coeficientes del polinomio de interpolación en función de los valores nodales:

$$A = [M_n]^{-1} \cdot \Phi_n \quad (1.1.4)$$

$[M_n]$  es matriz cuadrada  $m \times m$ , no singular y característica para cada elemento.

Sustituyendo (1.1.4) en (1.1.2) se tiene el valor de la función en cualquier punto del elemento:

$$\Phi = M^T A = M^T [M_n]^{-1} \Phi_n = N \Phi_n \quad (1.1.5)$$

donde  $N$  es la matriz de forma del elemento.

Este procedimiento de aproximación es muy utilizado, pero presenta algunas desventajas como por ejemplo la necesidad de obtención de la matriz inversa.

### 1.1.3.2 – Funciones de forma.

Las funciones de forma pueden obtenerse mediante polinomios de interpolación como los desarrollados por Lagrange y Hermite, cumpliendo con definir unívocamente el campo de desplazamientos en el interior del elemento en función de los desplazamientos nodales:

$$\Phi(x,y,z) = [N_i(x,y,z)] \cdot \{\Phi_n\} = [N] \cdot \{\Phi_n\} \quad (1.1.6)$$

Donde:

- $\Phi(x,y,z)$  : es el campo de desplazamientos en el interior del elemento.
- $[N]$  : matriz de funciones de forma.
- $N_i(x,y,z)$  : función de forma asociada a los nodos del elemento.
- $\{\Phi_n\}$  : vector de desplazamientos nodales.

Con el objeto de asegurar que la solución que se obtiene mediante la función de aproximación elegida converja a la solución, esta debe cumplir con la condición de conformidad, que se refiere a la continuidad de resultados entre elementos, siendo necesario que la función adquiriera el valor cero en todos los nodos menos en el nodo que se esté considerando, en donde adquiere el valor de la unidad, además debe cumplir con la condición de complitud, es decir, asegurar la continuidad de la función dentro del elemento, cumpliendo con las ecuaciones que plantea el modelo matemático. Lo anterior implica que la función debe ser diferenciable hasta el grado más alto de las derivadas que aparezcan en la formulación de la energía potencial del sistema, esto se cumple cuando la suma de las funciones de aproximación asociadas a los nodos, en cualquier punto del elemento, es igual a la unidad.

Estas dos condiciones pueden resumirse como:

$$N_i(x,y,z) = 0, \text{ en cualquier nodo } i \neq j$$

$$N_i(x,y,z) = 1, \text{ en cualquier nodo } i = j$$

$$\sum_{i=1}^n N_i(x,y,z) = 1$$

Entre los criterios para seleccionar el elemento a utilizar en el modelo, además de lo descrito en lo referido a discretización del dominio, es importante considerar el tipo de función de forma que está asociada al elemento, así por ejemplo, habrán elementos Lagrangianos que utilizan polinomios de Lagrange para generar la función de forma; Hermíticos, en donde se utilizan polinomios de Hermite y que son de especial interés cuando se requiere conocer los valores de la función y de su derivada; Serendípitos, en que el interés es que los nodos se encuentren en el contorno del elemento y cuya función de forma se obtiene multiplicando los términos de grado  $n$  del polinomio elegido en una variable por términos lineales en la otra, con lo cual se obtiene un resultado similar a los polinomios de Lagrange en los contornos.

#### 1.1.4 – Ecuaciones de compatibilidad.

Se sabe por la teoría de la elasticidad que la relación entre tensiones y deformaciones unitarias es:

$$\sigma = [D]\varepsilon \quad (1.1.7)$$

En el caso de la tensión tridimensional, las deformaciones y tensiones, toman las siguientes expresiones:

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}\}$$

$$\sigma^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}$$

$$[D] = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

Donde:

$$A = \frac{(1-2\nu)}{2}$$

$\lambda$  = coeficiente de Lamé.

$E$  = módulo de Young.

$\nu$  = coeficiente de Poisson.

En el caso de la tensión plana tenemos que:

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\}$$

$$\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}$$

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu^2)}{2} \end{bmatrix} \quad (1.1.8)$$

El vector de deformaciones unitarias puede expresarse en función de los desplazamientos nodales de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x) \\ (\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial y) \\ (\partial w / \partial x) + (\partial u / \partial z) \end{Bmatrix} \quad (1.1.9)$$

donde  $u, v, w$ , son los desplazamientos definidos por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} \quad (1.1.10)$$

si  $[L]$  es el operador:

$$[L] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \end{bmatrix} \quad (1.1.11)$$

la deformación puede expresarse como:

$$\varepsilon = [L] \cdot \Phi \quad (1.1.12)$$

sustituyendo (1.1.5) en (1.1.12) resulta:

$$\varepsilon = [L] \cdot [N] \cdot \Phi_n \quad (1.1.13)$$

llamando  $[B]$  a  $[L] \cdot [N]$  obtenemos la expresión:

$$\varepsilon = [B] \cdot \Phi_n \quad (1.1.14)$$

con lo que se consigue expresar las deformaciones en función de los valores nodales, análogamente, sustituyendo en (1.1.6) se obtendrán los valores de las tensiones en función de los valores nodales:

$$\sigma = [D] \cdot [B] \cdot \Phi_n \quad (1.1.15)$$

### 1.1.5 – Matriz de rigidez elemental.

Para la obtención de las matrices de rigidez elementales, que relacionan las cargas exteriores aplicadas al elemento con los desplazamientos nodales independientes que este experimenta, se utiliza un principio variacional como el principio de energía potencial mínima. Principio que establece que entre todos los desplazamientos admisibles, aquel que además satisface las condiciones de equilibrio de la estructura convierte el funcional energético en estacionario. Por lo tanto, aplicándolo al elemento, el procedimiento será el siguiente:

La energía de deformación almacenada en el interior del elemento está expresada por:

$$\Gamma_e = \iiint_V \frac{1}{2} \cdot \{\varepsilon\}^T \cdot [D] \{\varepsilon\} \cdot dV \quad (1.1.16)$$

Donde:

$\{\varepsilon\}$  = vector de deformaciones.

$[D]$  = matriz elástica de rigidez del material.

El trabajo de las cargas exteriores queda:

$$W_e = \iiint_V \{\Phi_e(x, y, z)\}^T \{f\} dV \quad (1.1.17)$$

Donde:

$\{\Phi_e(x, y, z)\}$ : campo de desplazamientos.

$\{f\}$  : vector de cargas exteriores.

la energía potencial total del elemento será:

$$\Pi_e = \Gamma_e - W_e \quad (1.1.18)$$

la energía potencial total en toda la estructura será:

$$\Pi = \sum \Pi_e$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \Phi_n^T \cdot \left[ \sum \iiint_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \right] \cdot \Phi_n - \Phi_n^T \sum \iiint_V \{\Phi_e(x, y, z)\}^T \{f\} \cdot dV \quad (1.1.19)$$

derivando e igualando a cero (1.1.19), para obtener la energía potencial mínima, se obtiene la matriz de rigidez elemental:

$$\partial \Pi / \partial \Phi_n = 0$$

$$[K_e] = \iiint_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \quad (1.1.20)$$

La integración se extiende dentro del subdominio constituido por los límites del elemento y se resuelve mediante métodos de integración numérica, los coeficientes de la matriz obtenida dependen de la geometría y del material del elemento seleccionado.

La matriz de rigidez de la estructura (matriz de rigidez global) de orden  $M \times M$  siendo  $M$  el número de nodos del elemento, se obtiene mediante el ensamblaje de las matrices elementales, es decir, partiendo de la matriz de rigidez del elemento de orden  $m \times m$ , ampliándola con ceros en los lugares correspondientes a los grados de libertad de los nodos que no pertenecen al elemento, hasta completar el orden  $M \times M$ , la matriz de rigidez del sistema será:

$$[K] = \sum [K_e] \quad (1.1.21)$$

de esta forma queda:

$$\{f\} = [K] \cdot \{\Phi_n\} \quad (1.1.22)$$

Donde:

$\{f\}$  : vector de cargas nodales equivalentes.

$[K]$ : matriz de rigidez global.

El vector de cargas equivalentes aplicadas en los nodos al elemento, queda definido por:

$$\{f_n\} = \{f_v\} + \{f_s\}$$

$$\{f_n\} = \iiint_V [N]^T \cdot \{f_v\} \cdot dV + \iint_S [N]^T \cdot \{f_s\} \cdot dS + \sum \{p_i\} \cdot d_i \quad (1.1.23)$$

Donde:

$\{f_v\}$  : fuerzas de volumen o másicas.

$\{f_s\}$  : fuerzas de superficies.

$\{p_i\}$  : fuerzas puntuales.

El vector de cargas totales de la estructura queda definido por:

$$\{f_v\} = \sum \{f_n\} \quad (1.1.24)$$

### 1.1.6 – Condiciones de contorno.

Con el objeto de resolver las ecuaciones, que llevan por incógnitas los desplazamientos, se restringen los grados de libertad o desplazamientos en determinadas direcciones de un conjunto de nodos, con lo cual la ecuación (1.1.22), puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lr}] \\ [K_{rl}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_l \\ \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_l \\ f_r \end{bmatrix} \quad (1.1.25)$$

Donde:

$\Phi_l$  : vector grados de libertad no restringidos.

$\Phi_r$  : vector grados de libertad restringidos

$f_l$  : vector de carga sobre los grados de libertad no restringidos.

$f_r$  : vector de carga sobre los grados de libertad restringidos.

como el valor de los desplazamientos en los nodos restringidos es nulo:

$$\begin{aligned} [K_{//}] \cdot \Phi_l &= f_l \\ [K_{rr}] \cdot \Phi_l &= f_r \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

se pueden obtener los valores de los desplazamientos en las direcciones no restringidas con la primera de las ecuaciones (1.1.26), y sustituyendo en la segunda, se obtienen las reacciones en las restricciones.

### **1.1.7 – Obtención de los desplazamientos y tensiones.**

Una vez obtenidos los valores de los desplazamientos nodales, como se indica en las ecuaciones (1.1.26), las tensiones se obtienen aplicando la expresión (1.1.25). Existen muchos procedimientos para la resolución de ecuaciones lineales que pueden ser implementados en el computador, pudiendo emplearse métodos directos, iterativos, gradiente conjugado y métodos frontales. La resolución de estos últimos se realizan al mismo tiempo que se van ensamblando las matrices.

### **1.1.8. – Presentación de resultados.**

Existen diferentes formas de presentación de resultados, dependiendo del sistema informático que se utilice, pero en general se obtendrán resultados mediante listados, en donde se detallan los valores de desplazamientos y tensiones en los nodos y mediante representaciones gráficas de la pieza estructural que se esté estudiando, en donde se representan en base a código de colores en imágenes las variables en estudio.

## **1.2 – Análisis tridimensional de tensiones.**

Los problemas de análisis de tensiones en cuerpos tridimensionales, evidentemente abarcan la mayoría de los casos prácticos, aunque en algunos casos puede obtenerse un modelo adecuado y sencillo utilizando distintas aproximaciones bidimensionales.

El elemento continuo bidimensional más simple es el triángulo. Su equivalente tridimensional es el tetraedro, que tiene cuatro nodos, uno en cada vértice y sobre cuya formulación básica se tratará en este capítulo.

### 1.2.1 – Funciones de desplazamiento.

En la figura 1.2.1 se representa un elemento tetraédrico  $i, j, m, p$  en el espacio definido por las coordenadas  $x, y, z$ . El desplazamiento de un punto queda definido por tres componentes  $u, v, w$  en las direcciones de los ejes cartesianos  $x, y, z$ , por tanto:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.2.1)$$

Al igual que en un triángulo plano los tres valores nodales definían la variación lineal de una cantidad, aquí una variación lineal vendrá definida por cuatro valores nodales. Como en el caso de la ecuación (1.1.1) podemos escribir, por ejemplo que:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \quad (1.2.2)$$

Igualando los valores de los desplazamientos en los nodos, tenemos cuatro ecuaciones del tipo:

$$u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 z_i + \dots \quad (1.2.3)$$

de donde podemos calcular desde  $a_1$  a  $a_4$ .

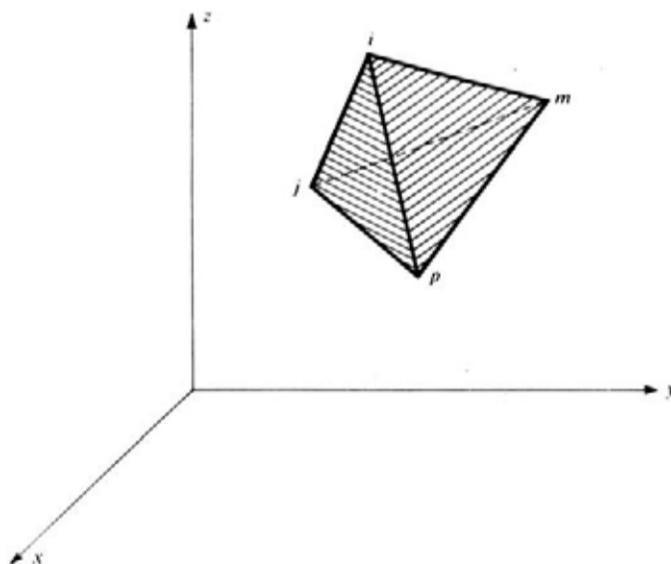


FIGURA 1.2.1 VOLUMEN TETRAÉDRICO

Además podemos escribir la solución empleando el determinante, o sea:

$$u = \frac{1}{6V} \left\{ \begin{aligned} & (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j + \\ & (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)u_p \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

Siendo:

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (1.2.5a)$$

en la que observamos que el valor de  $V$  representa el volumen del tetraedro. Desarrollando, los otros determinantes por cofactores, obtenemos:

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad b_j = \det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (1.2.5b)$$

$$c_j = \det \begin{vmatrix} x_i & 1 & z_i \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} \quad d_i = \det \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}$$

obteniéndose el resto de las constantes mediante permutación cíclica de los subíndices  $p, i, j, m$ .

La ordenación de los números nodales  $p, i, j, m$ , debe seguir la “regla de la mano derecha” como se deduce claramente de la figura 1.2.1. Los tres primeros nodos se han numerado en esta siguiendo un orden contrario al sentido de las agujas del reloj, mirando desde el último nodo.

El vector de desplazamientos del elemento viene definido como sigue por las doce componentes de desplazamiento de los nodos.

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_p \end{Bmatrix} \quad (1.2.6)$$

siendo:

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \text{ etc.}$$

Podemos describir el desplazamiento de un punto cualquiera así:

$$\mathbf{u} = [N_i, N_j, N_m, N_p] \mathbf{a}^e \quad (1.2.7)$$

con funciones de forma definidas por:

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}, \text{ etc.} \quad (1.2.8)$$

De nuevo, las funciones de desplazamientos utilizadas satisfarán obviamente las condiciones de continuidad en los contornos de separación entre elementos. Este hecho es consecuencia directa de la naturaleza lineal de la variación de los desplazamientos.

### 1.2.2 – Matriz de deformaciones.

En un análisis tridimensional completo, el vector deformación en un punto tiene seis componentes. La matriz de deformaciones se puede definir ahora siguiendo la notación general del texto de elasticidad de Timoshenko, como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x) \\ (\partial v / \partial z) + (\partial w / \partial y) \\ (\partial w / \partial x) + (\partial u / \partial z) \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (1.2.9)$$

Empleando las ecuaciones (1.2.4) a (1.2.7) se comprueba fácilmente que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}^e = [\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j, \mathbf{B}_m, \mathbf{B}_p] \mathbf{a}^e \quad (1.2.10)$$

en la cual:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x}, & 0, & 0, \\ 0, & \frac{\partial N_i}{\partial y}, & 0, \\ 0, & 0, & \frac{\partial N_i}{\partial z}, \\ \frac{\partial N_i}{\partial y}, & \frac{\partial N_i}{\partial x}, & 0, \\ 0, & \frac{\partial N_i}{\partial z}, & \frac{\partial N_i}{\partial y}, \\ \frac{\partial N_i}{\partial z}, & 0, & \frac{\partial N_i}{\partial x}, \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (1.2.11)$$

obteniéndose las restantes submatrices de forma similar, permutando simplemente los subíndices.

Las deformaciones iniciales, tales como las debidas a la dilatación térmica, pueden escribirse de la forma habitual como vector de seis componentes que, por ejemplo, en una dilatación térmica isótropa serian sencillamente:

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.2.12)$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación y  $\theta^e$  o el incremento medio de la temperatura en el elemento.

### 1.2.3 – Matriz de elasticidad.

Si existe la anisotropía completa, la matriz  $D$  que relaciona las seis componentes de la tensión con los componentes de la deformación puede contener 21 constantes independientes.

Así pues en general:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (1.2.13)$$

Aunque el cálculo no presenta en si gran dificultad cuando se trata con estos materiales, ya que la multiplicación nunca se efectúa explícitamente, es conveniente recoger aquí la matriz  $D$  para un material isotrópico. Se puede escribir esta en función de las constantes elásticas usuales  $E$  (módulo de Young) y  $\nu$  (coeficiente de Poisson).

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1, & \frac{\nu}{(1-\nu)}, & \frac{\nu}{(1-\nu)}, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)}, & 1, & \frac{\nu}{(1-\nu)}, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)}, & \frac{\nu}{(1-\nu)}, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (1.2.14)$$

### **1.3. – Tipos de análisis estructural.**

El tipo de análisis estructural que se realice, depende del objetivo que se quiere alcanzar con la aplicación del método, por ejemplo, comprobación de cálculos, optimización estructural, optimización de peso, nuevo diseño, etc., se suma a esto la capacidad del instrumento informático y el tiempo que se desee invertir en el análisis. En general, la gran mayoría de los software de elementos finitos poseen la capacidad de ofrecer al menos las siguientes opciones de análisis:

- Análisis estático lineal, determinando desplazamientos debido a cargas en los nodos, cargas de presión, cargas de temperatura nodal y cargas de gravedad debido al peso propio.

- Análisis de esfuerzos debido a las deformaciones producto de los desplazamientos nodales.
- Análisis modal, el que incluye la determinación de frecuencias naturales y modos de vibración.
- Análisis de pandeo.
- Respuesta a cargas dinámicas.
- Análisis lineal y no lineal de conducción de calor.

Independiente del software utilizado es preponderante en cualquier tipo de análisis de estructura, la experiencia de quien recibe e interprete los resultados.

Cualquier tipo de análisis requiere comprobar si los esfuerzos obtenidos son compatibles con las tensiones admisibles.

#### **1.4. – Instrumentos informáticos.**

El método de elementos finitos ha sido implementado en computadores obteniéndose excelentes resultados, existiendo hoy en día una amplia y variada oferta de programas que resuelven numerosos problemas de ingeniería, diferenciándose entre ellos principalmente por la facilidad de uso, rapidez de cálculo, plataforma de trabajo, librería de elementos y por supuesto el costo, esto último dice relación directa con las prestaciones de la herramienta (número de nodos, grados de libertad, elementos, etc.) y el tipo de licencia (anual o perpetua), entre otras variables.

Cada herramienta informática posee innumerables opciones de modelado y presentación de resultados, unas más cómodas de trabajar que otras, pero en general, estos instrumentos cumplen con el cometido de facilitar el trabajo de quienes proyectan y diseñan estructuras.

A continuación se plantean algunas diferencias, que hacen una herramienta informática más atractiva que otra:

- Facilidad de manejo, rapidez de aprendizaje y un buen servicio postventa.
- Amplia librería de elementos, que posibiliten la realización de diferentes tipos de análisis.
- Facilidad de lectura de resultados, presentados a través de mapas de degradación de colores, listados por nodos, elementos y orientación, ubicación expedita de puntos críticos, etc.
- Plataforma de trabajo moderna y amigable, de fácil y rápida adaptación.
- Hardware mínimo necesario que permita soportar una inversión recuperable a corto plazo.
- Que posea un método optimizado de solución, disminuyendo el tiempo informático invertido en el análisis.
- Base teórica para la formulación de los elementos validada.
- Costo acorde a las prestaciones.

## CAPÍTULO II

### MATERIALES COMPUESTOS

Las exigencias de las modernas construcciones, tales como bajos costos, una mejor estética, alto rendimiento y larga vida útil, han conducido a la industria a desarrollar materiales más avanzados que satisfagan las necesidades de hoy. Tradicionalmente, materiales estructurales, tales como madera, acero y concreto, han sido combinados para formar miembros estructurales de mayor calidad. Una parte estructural construida por una combinación de diferentes materiales es considerada una pieza de *MATERIAL COMPUESTO*. El rendimiento de tales piezas es generalmente superior al rendimiento de cada uno de los componentes. El concreto reforzado es un compuesto convencional que ha sido usado satisfactoriamente en una variedad de estructuras. Otras combinaciones como acero-concreto o madera-acero, son también usadas comúnmente en estructuras modernas.

#### 2.1 – Introducción:

Una nueva generación de materiales basados en subproductos del petróleo y madera ha evolucionado desde la introducción de los plásticos. Ellos son fáciles de procesar, resistentes a la corrosión y además livianos, pero tienen una baja rigidez y resistencia comparada con los materiales convencionales. Estos plásticos pueden ser eficientemente reforzados con fibras altamente resistentes tales como la de vidrio, aramida y carbón. Usando tecnología de materiales compuestos, se pueden crear materiales que satisfacen las mayores necesidades en la construcción. Las propiedades de los materiales pueden ser creadas de acuerdo a las necesidades específicas, el uso excesivo de componentes se puede evitar y por tanto el rendimiento puede ser maximizado sin un alto incremento en el costo de la construcción. Todos estos esfuerzos han dejado estructuras más livianas y delgadas. Las reglas básicas de seguridad asociadas a la tensión máxima posible, son ahora acompañadas por la carga crítica de pandeo pues la falla de una estructura delgada es más probable que sea regida por la inestabilidad geométrica que por falla de material. Durante años la mayoría de la investigación y desarrollo ha sido enfocada sobre el comportamiento estructural en los miembros de acero, madera y concreto.

En todos los casos los materiales están asumidos como homogéneos e isotrópicos y las propiedades como el módulo de elasticidad  $E$ , la relación de Poisson  $\nu$ , y el módulo de corte  $G$ , son constantes y el único parámetro es la geometría de la estructura. Hay casos donde estos parámetros son variables, como la tensión residual en el acero, comportamiento anisotrópico de la madera y grietas en el concreto reforzado, que deben ser consideradas y realizarse un estudio más exacto.

Sin embargo las diferencias entre un análisis riguroso y uno simplificado son usualmente pequeñas. El uso de materiales completamente diferentes combinados con bajo peso y miembros estructurales delgados requiere un completo y preciso análisis que puede hacerse más complicado si se usan materiales anisotrópicos.

Los materiales pueden ser combinados en muchas formas para fabricar el material compuesto deseado. El comportamiento estructural de una pieza compuesta está regido no sólo por la geometría o el tipo de carga, también por las propiedades del material. La combinación de materiales se decide de acuerdo a las necesidades estructurales y a la relativa importancia de una variedad de propiedades como: *resistencia, peso, resistencia a la corrosión, rigidez, resistencia a la abrasión, resistencia a la fatiga, expansión termal, propiedades electro-magnéticas, comportamiento a altas temperaturas, conductividad térmica, aislamiento acústico y estética del material*. De este modo usando técnicas de optimización, la combinación para el material deseado es decidida para cada aplicación específica.

En un sistema compuesto, dos o más de los materiales componentes son combinados en un cuerpo sólido. En cada combinación, uno de los materiales componentes es llamado *matriz*. Las matrices están usualmente caracterizadas por sus relativamente bajas propiedades físicas y proveen de la cohesión con los otros materiales componentes. El otro material puede ser cualquier fibra continua, fibras tejidas, fibras en forma aleatoria, o partículas que hacen el rol de refuerzo. Otra posibilidad es combinar capas de diferentes materiales (compuestos híbridos). En todos los casos el resultado de la combinación es un nuevo material con características y propiedades diferentes a las de sus materiales constitutivos.

De acuerdo a la combinación de materiales, hay tres categorías básicas de materiales compuestos: *los compuestos de fibra* que consiste de fibras en una matriz, *el compuesto laminado* que son capas laminadas de de varios materiales, y *los compuestos particulares* que están compuestos de partículas en una matriz.

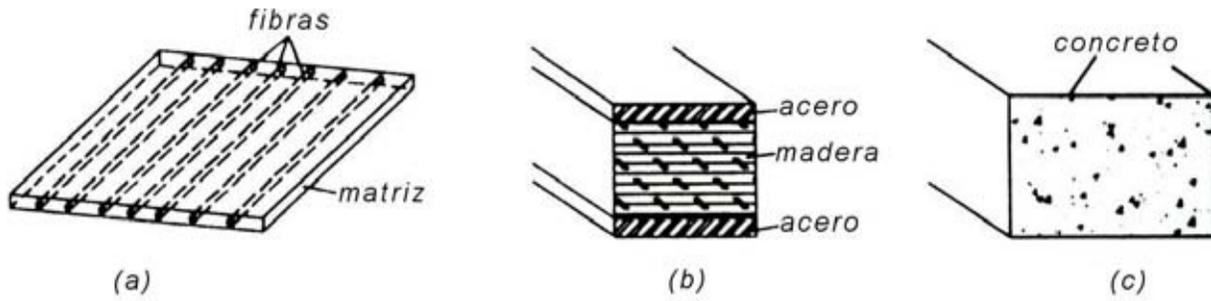


FIGURA 2.1.1 (a) FIBRAS, (b) LAMINADO, (c) COMPUESTO PARTICULAR

Por ejemplo, la fibra de vidrio colocada en una matriz epóxica forma una fibra compuesta, figura 2.1.1(a). La viga mostrada en la figura 2.1.1 (b) está hecha de capas de madera y acero conectadas una a la otra en la superficie interlaminar y es una viga laminada compuesta. Un compuesto laminado es también obtenido por la combinación de capas de fibras con diferentes orientaciones. Por último el concreto no reforzado es un ejemplo representativo de un compuesto particulado, figura 2.1.1. (c).

Dependiendo del tipo de material compuesto y de su aplicación estructural, se han desarrollado numerosos procesos de fabricación, ellos pueden ser categorizados en procesos *continuos* y *no continuos*. Un proceso no continuo es empleado para fabricar formas de estructuras complejas como aviones o partes de vehículos que son producidas con la ayuda de un molde abierto o uno de compresión con matriz de acero, como los mostrados en las siguientes figuras.

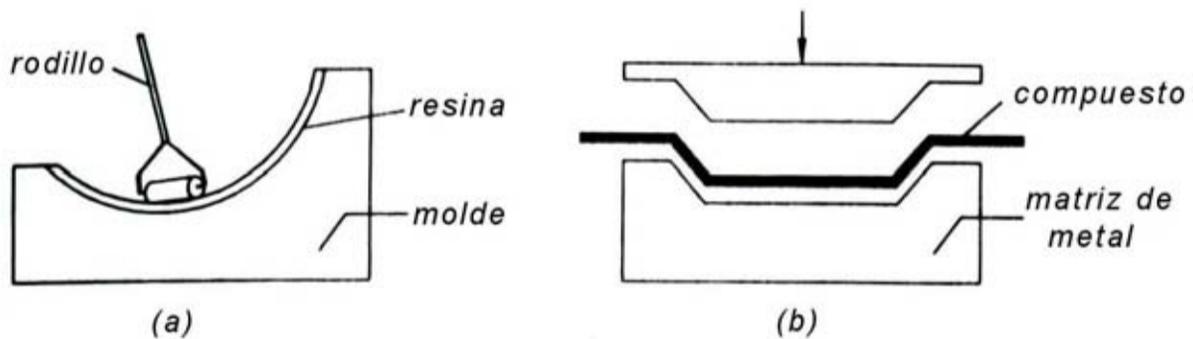


FIGURA 2.1.2 (a) MOLDE ABIERTO, (b) FABRICACIÓN CON MOLDE DE COMPRESIÓN

En un proceso continuo, las partes estructurales son producidas relativamente rápidas pasando a través de una matriz a alta temperatura para formar un sólido de forma libre o de una sección deseada como vigas I, vigas de cajón, secciones acanaladas y muchas otras. Estos procesos continuos son ampliamente usados para producir formas constantes de secciones. Un proceso continuo usado comúnmente es el proceso "pultrusion", que está esquematizado en la siguiente figura.

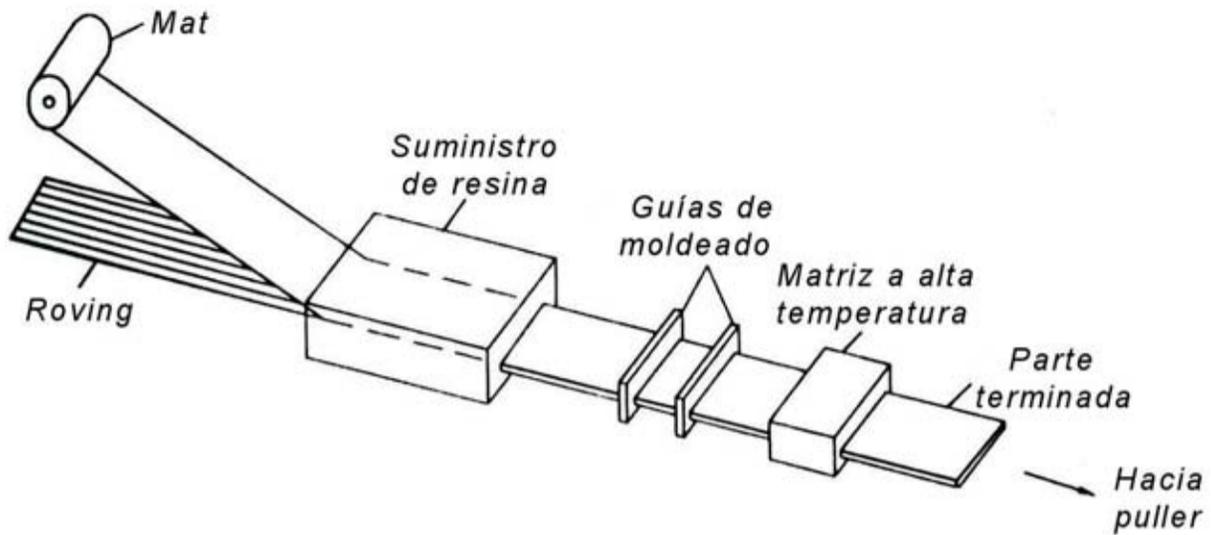


FIGURA 2.1.3 PROCESO DE PULTRUSION

A causa del comportamiento anisotrópico del material y a su bajo módulo de elasticidad, grandes deflexiones ocurren probablemente en los miembros del compuesto que puede derivar en un comportamiento geométrico no lineal. Así también, pequeñas imperfecciones tales como deflexiones iniciales y curvaturas, discontinuidad de material o anomalías debido a defectos de manufactura, pueden jugar un rol significativo en el comportamiento de una estructura compuesta.

Una vez que son seleccionados los componentes, el material compuesto puede ser fabricado a través de varios procedimientos. Un proceso común forma láminas como un ensamble de varias capas (láminas o pliegues) manteniéndolas juntas. Ahora se examinará el comportamiento de tales materiales.

## 2.2 – Análisis micromecánico de láminas.

Las partes estructurales hechas de materiales compuestos pueden ser categorizadas como *compuestos de fibra*, *compuestos laminado* y *compuestos particulares*. Los compuestos laminados consisten en capas de materiales homogéneos, cada uno caracterizado por sus propias propiedades mecánicas, o alternativamente de capas de fibra compuesta. Es muy importante estudiar primero el comportamiento del compuesto desde el punto de vista micromecánico, esto es el comportamiento del laminado. El laminado más común hecho de fibra compuesta es presentado en detalle.

La primera tarea en el análisis es definir la relación tensión-deformación así

como la fuerza de la lámina compuesta de acuerdo al uso de tales propiedades para predecir el comportamiento estructural del producto final, el laminado.

### **2.2.1 – Materiales componentes.**

Las láminas son fabricadas por la combinación de dos o más materiales llamados matriz y fibras. Las fibras son usualmente más fuertes y se caracterizan por sus altos valores de elasticidad, de este modo juegan el rol de refuerzos. La matriz es un material más débil con propiedades elásticas menores en relación con las fibras. La matriz mantiene juntas a las fibras, transfiere y distribuye las cargas externas y protege a las fibras de daños exteriores. El producto final de una combinación fibra-matriz es un cuerpo sólido que retiene y extiende las propiedades de sus materiales constitutivos.

Las fibras pueden ser hechas de vidrio, carbón, polímeros o metales. La *fibra de vidrio E* está especialmente diseñada para una alta resistencia y es usada extensamente en la industria de los compuestos. El *carbón* y las *fibras de grafito* también tienen una alta resistencia y se han vuelto más económicas tras las últimas décadas como resultado de la demanda y la capacidad de producción. Las fibras de polímeros, como la *aramida*, también pueden ser usadas en los compuestos.

Una matriz puede ser hecha de polímeros, metales o cerámicos. Los materiales más ampliamente usados como matrices en los compuestos modernos son polímeros como los epóxicos, poliéster, viniléster y algunos otros, generalmente llamados plásticos.

Las fibras se pueden orientar en una matriz de diferentes formas. Cuando las fibras son continuas y tienen la misma dirección, el compuesto es llamado *unidireccional*. Si las fibras están orientadas al azar en la matriz, el compuesto es llamado *aleatorio*, estas fibras pueden no ser continuas. Ejemplos de compuestos unidireccionales y aleatorios están mostrados en el esquema siguiente:

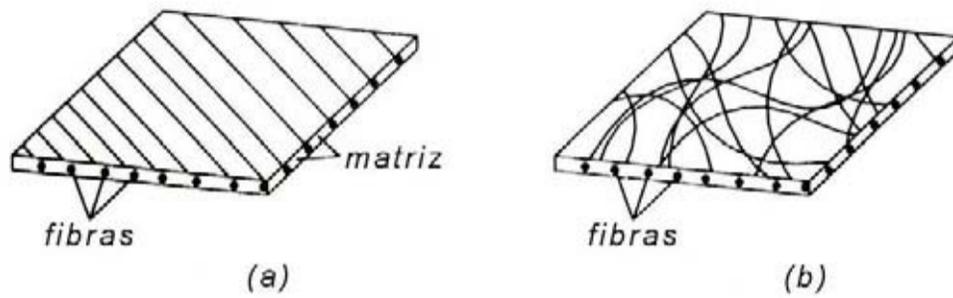


FIGURA 2.2.1 (a) UNIDIRECCIONAL, (b) COMPUESTO ALEATORIO

En fibras compuestas cada uno de los materiales componentes, por ejemplo fibras y matriz, es considerada como homogéneo e isotrópico. Las propiedades elásticas y resistencia para algunos de los componentes comúnmente usados en los compuestos son dadas a continuación. Específicamente la tabla 2.2.1 enumera las propiedades elásticas de las fibras más comunes mientras que la tabla 2.2.2 enumera las propiedades de las matrices de polímeros más usadas.

TABLA 2.2.1

<b>Fibras</b>	<b>E</b>	<b>V</b>	<b>G</b>	$\gamma$
	Gpa (ksi)		Gpa (ksi)	(kN/m <sup>3</sup> ) (lb/in <sup>3</sup> )
Vidrio-E	73	0.22	30	24.4
	10600		4350	0.09
Vidrio-S	85.4	0.2	35.6	24.4
	12400		5170	0.09
Carbón	220	0.2	9	17.6
	32000		1300	0.065
Aramida	152	0.35	2.9	14.4
	22000		420	0.053

TABLA 2.2.2

<b>Matriz</b>	<b>E</b>	<b>V</b>	<b>G</b>	$\gamma$
	Gpa (ksi)		Gpa (ksi)	(kN/m <sup>3</sup> ) (lb/in <sup>3</sup> )
Epóxica	3.45	0.35	1.28	11.95
	500		186	0.044
Viniléster	3.38	0.24	1.38	12.22
	490		200	0.045
Poliéster	3.25	0.36	1.2	11.95
	470		175	0.044

Los materiales componentes son usualmente considerados homogéneos e isotrópicos y por tanto se requieren dos constantes elásticas para cada uno, pueden ser el módulo de elasticidad  $E_f$  y la relación de Poisson  $\nu_f$ , o el módulo de corte  $G_f$  para las fibras y  $E_m$ ,  $\nu_m$  o  $G_m$  para la matriz respectivamente. Para determinar las propiedades elásticas de una lámina compuesta de fibras, debemos saber el aporte de cada material al producto final. Esto es determinado por la *fracción de volumen de fibras*  $V_f$ , que es el porcentaje de fibra en una unidad de volumen representativo. Las fibras pueden ser arregladas en una matriz de diferentes formas. Para compuestos unidireccionales, se examina un plano normal a la sección de dirección de la fibra para obtener una sección representativa de área  $A$ , donde el área de las fibras es  $A_f$ , y el área de la matriz es  $A_m$ . La fracción de volumen de fibra es determinada por la relación:

$$V_f = \frac{A_f}{A} \quad (2.2.1)$$

Donde  $A = A_f + A_m$ . La idea del volumen representativo o área en un compuesto de fibras es dada en la figura 2.2.2 para varios tipos de arreglos en una matriz.

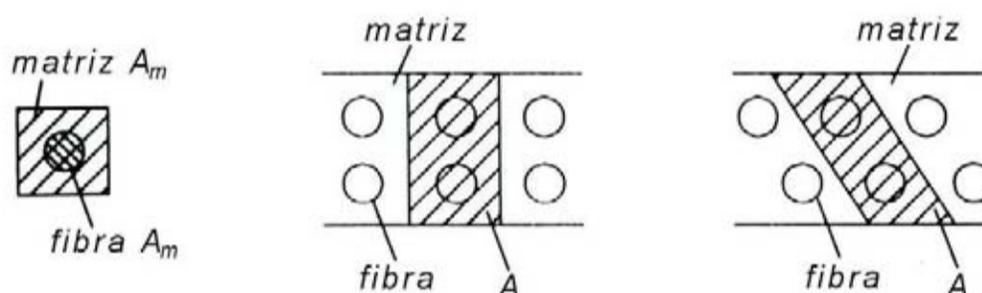


FIGURA 2.2.2 ÁREA REPRESENTATIVA PARA UN COMPUESTO DE FIBRAS.

Así, para un compuesto unidireccional para el cual los materiales componentes han sido seleccionados, podemos determinar las propiedades del material usando diferentes aproximaciones. A esta altura, debió ser notado que cualquier propiedad derivada matemáticamente debe estar sujeta a una cuidadosa verificación experimental. Dos aproximaciones básicas son presentadas en la micromecánica de los compuestos: *la aproximación mecánica del material a la rigidez* que está basada en la teoría clásica de resistencia de materiales para comportamientos combinados de los materiales componentes, y *la aproximación elástica a la rigidez*, que está basada en los principios de energía variacional de la teoría clásica de la elasticidad, para determinar los límites superiores e inferiores de rigidez para un lámina. La aproximación mecánica a la rigidez es presentada a continuación. El método entrega suficiente precisión para la mayoría de las aplicaciones en compuestos unidireccionales.

### **2.2.2 – Regla de mezcla – Constantes de ingeniería.**

La regla de mezcla es la más simple regla lineal para la relación fracción de volumen entre una lámina compuesta y las propiedades de los componentes. Considere un plano en el sistema coordenado 1–2 (ver figura 2.2.3), donde las fibras son paralelas al eje 1 correspondiéndole la dirección longitudinal. Nótese que  $E_1$  es el módulo de elasticidad longitudinal del compuesto,  $E_2$  es el módulo transversal de elasticidad,  $\nu_{12}$  la relación de Poisson y  $G_{12}$  el módulo de corte en el plano 1–2. El material es isotrópico transversalmente y sus propiedades elásticas  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  y  $G_{12}$  son las llamadas *Constantes de Ingeniería*. La expresión de la regla de mezcla para las propiedades elásticas de un compuesto está dadas por:

$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E_m \quad (2.2.2)$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{(1 - V_f) E_f + V_f E_m} \quad (2.2.3)$$

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m \quad (2.2.4)$$

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{(1 - V_f) G_f + V_f G_m} \quad (2.2.5)$$

Los valores de  $E_2$  y  $G_{12}$  dados en las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.5) son usualmente un límite inferior del módulo de corte y módulo transversal y se deben llevar a cabo análisis experimentales para predecir valores más precisos.

Para fibras distribuidas aleatoriamente en una matriz como en la figura 2.2.1. (b), los compuestos se comportan como materiales isotrópicos en el plano, para los cuales las propiedades del material pueden ser determinadas por la siguiente relación semi-empírica:

$$E = \frac{3}{8} E_1 + \frac{5}{8} E_2 \quad (2.2.6)$$

$$G = \frac{1}{8} E_1 + \frac{1}{4} E_2 \quad (2.2.7)$$

El módulo  $E_1$  y  $E_2$  en la ecuación (2.2.6) y (2.2.7) puede ser calculado de la ecuación (2.2.2) y (2.2.3) respectivamente, mientras que la relación de Poisson  $\nu$  está determinada por la conocida relación  $\nu = (E/2G) - 1$  válida para materiales isotrópicos.

### 2.2.3 – Tensión y deformación axial.

Tras la determinación de las constantes de ingeniería  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  y  $G_{12}$  la relación tensión-deformación correspondiente al sistema axial 1-2 está definida para cualquiera de las tres orientaciones mostradas en la figura 2.2.3

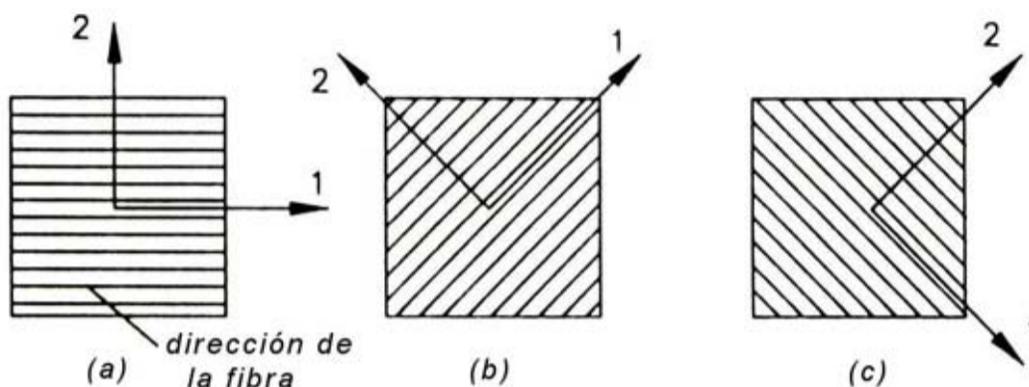


FIGURA 2.2.3 SISTEMA AXIAL PARA UNA LÁMINA DE FIBRAS: (a), (b), (c) MUESTRAN LA ORIENTACIÓN DE LA FIBRA.

Si las fibras están alineadas a lo largo del eje 1, el sistema 1-2 es llamado axial o material axial, y las relaciones correspondientes son llamadas tensión-deformación axiales. Estas relaciones pueden ser expresadas en términos de la *matriz de rigidez*  $[Q]$  y de la *matriz de conformidad*  $[S]$ , dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2.8)$$

y

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2.9)$$

Donde  $[S] = [Q]^{-1}$ . Los coeficientes de rigidez  $Q_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 6$  están dados por :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \nu_{12}Q_{22} = \nu_{21}Q_{11} \quad ; \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.2.10)$$

Donde  $\nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1$ . Los componentes axiales de la rigidez  $Q_{16}$  y  $Q_{26}$  son

cero, porque los compuestos unidireccionales son transversalmente isotrópicos y no existe el acoplamiento de extensión de corte. El componente de conformidad  $S_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 6$  está dado por:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad ; \quad S_{22} = \frac{1}{E_1} \quad (2.2.11)$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad ; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

### 2.2.4 – Transformación de coordenadas y tensión-deformación no axial.

Considere un sistema de coordenadas  $x$ - $y$  orientado a  $0^\circ$  respecto al sistema axial 1-2. El sistema  $x$ - $y$  es llamado no axial. El sistema no axial y la convención de signos para el ángulo está ilustrado en la figura 2.2.4.

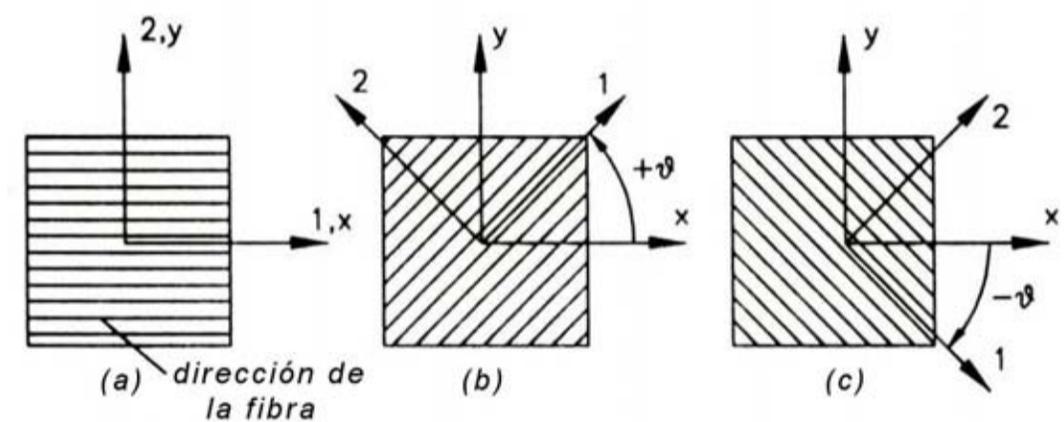


FIGURA 2.2.4 ORIENTACIÓN AXIAL Y NO AXIAL: (a), (b), (c) MUESTRAN LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS

El sistema de coordenadas 1-2 para el material no siempre coincide con el sistema estructural  $x$ - $y$  y por tanto tensiones y deformaciones expresadas en un sistema axial deben ser transformadas a una nueva configuración no axial. Esto es un problema puramente geométrico y las tensiones pueden ser determinadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.12)$$

mientras que la transformación de la deformación puede ser determinada por :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.13)$$

Donde :  $m = \cos(\theta)$  y  $n = \text{sen}(\theta)$

### 2.2.5 – Rigidez no axial y conformidad (matriz de rigidez inversa).

Para un sistema no axial, la relación tensión-deformación de la ecuación (2.2.8) se vuelve:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.14)$$

Donde los términos de acoplamiento de extensión de corte  $Q_{ss}$  y  $Q_{ys}$  no son cero.

Combinando las relaciones de tensión-deformación axial y no axial (2.2.8) y (2.2.14) con las ecuaciones de transformación (2.2.12) y (2.2.13) y resolviendo para los componentes de rigidez en el sistema no axial, obtenemos las ecuaciones de transformación para los componentes de rigidez:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{xs} \\ Q_{ys} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix} \quad (2.2.15)$$

Las ecuaciones de transformación anterior son válidas cuando la transformación es realizada desde un sistema axial 1-2 a cualquier sistema no axial x-y. De igual forma la relación de tensión-deformación en términos de conformidad en x-y, está dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{xs} & S_{ys} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.16)$$

Las ecuaciones de transformación para los componentes de conformidad pueden ser derivados de manera similar y están dados por:

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \\ S_{ss} \\ S_{xs} \\ S_{ys} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -m^2n^2 \\ 4m^2n^2 & 4m^2n^2 & -8m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ 2m^3n & -2mn^3 & 2(mn^3 - m^3n) & mn^3 - m^3n \\ 2mn^3 & -2m^3n & 2(m^3n - mn^3) & m^3n - mn^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{66} \end{Bmatrix} \quad (2.2.17)$$

### 2.2.6 – Resistencia de una lámina.

La resistencia de una lámina es examinada con la ayuda del criterio de falla. Los criterios más ampliamente usados son: *tensión máxima*, *deformación máxima* y algunos *criterios cuadráticos*. Los criterios son mayormente empíricos, pero ellos aún son muy importantes en diseño y optimización de materiales compuestos.

El criterio de falla está desarrollado con respecto a un sistema de coordenadas axial. Usando la transformación de coordenadas para la tensión y deformación (ver sección 2.2.4) es fácil obtener el criterio de falla para una lámina no axial. Para una lámina compuesta por fibras unidireccionales, los siguientes valores de resistencia pueden ser obtenidos de simples pruebas de laboratorio:

- X = Resistencia a la tensión longitudinal.
- X' = Resistencia a la compresión longitudinal.
- Y = Resistencia a la tensión transversal.
- Y' = Resistencia a la compresión transversal.
- S = Resistencia al corte.

#### 2.2.6.1 – Criterio de máxima tensión.

Según el criterio de máxima tensión, la falla ocurre cuando a lo menos una de las siguientes relaciones no es satisfecha:

$$X' < \sigma_1 < X \quad (2.2.18a)$$

$$Y < \sigma_2 < Y \quad (2.2.18b)$$

$$|\tau_{12}| < S \quad (2.2.18c)$$

2.2.6.2 – Criterio de máxima deformación.

El criterio de máxima deformación se puede desarrollar a partir de la ecuación (2.2.18) usando la relación lineal de tensión-deformación, y está expresado como:

$$\frac{X'}{E_1} \langle \varepsilon_1 \rangle \langle \frac{X}{E_1} \quad (2.2.19a)$$

$$\frac{Y'}{E_2} \langle \varepsilon_2 \rangle \langle \frac{Y}{E_2} \quad (2.2.19b)$$

$$|\gamma_{12}| \langle \frac{S}{G_{12}} \quad (2.2.19c)$$

La falla ocurre si cualquiera de las ecuaciones (2.2.19) no es satisfecha. Ningún criterio de máxima tensión o máxima deformación incluye alguna interacción entre los componentes de la tensión o deformación. Este efecto está incluido en el criterio cuadrático de Von Mises para materiales isotrópicos.

2.2.6.3 – Criterio de falla de Tsai-Wu.

Uno de los criterios cuadráticos más usados es el de Tsai-Wu. Para una lámina ortotrópica bajo tensión en el plano el criterio de Tsai-Wu está expresado por:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 \langle 1 \quad (2.2.20a)$$

Donde los coeficientes  $F_i$  y  $F_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) están dados por:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X'} & ; & & F_2 &= \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \\ F_{11} &= \frac{1}{XX'} & ; & & F_{22} &= \frac{1}{YY'} \\ F_{12} &= -\sqrt{F_{11}F_{22}} & ; & & F_{66} &= \frac{1}{S^2} \end{aligned} \quad (2.2.20b)$$

El material ha fallado cuando la ecuación (2.2.20a) no es satisfecha. Otros criterios cuadráticos como el de *Hill*, *Tsai-Hill*, y *Tsai-Hahn* son similares al criterio de Tsai-Wu. Las desigualdades entre los criterios de tensión máxima, deformación máxima y el criterio cuadrático de Tsai-Wu expresado en el espacio  $\sigma_1 - \sigma_2$  son ilustradas en la figura 2.2.5.

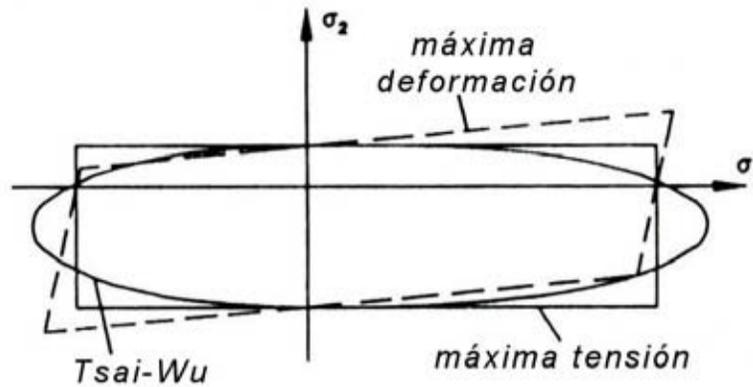


FIGURA 2.2.5 CRITERIO DE FALLA PARA UNA LÁMINA UNIDIRECCIONAL EN EL ESPACIO DE TENSIÓN

### 2.3 – Análisis de laminado.

Un laminado consiste en dos o más capas perfectamente unidas o plegadas. La unión es infinitesimalmente delgada y no hay deformación por corte, lo cual implica que los desplazamientos son continuos a través de las interfaces del laminado, y las capas no pueden resbalar una sobre otra. Como resultado, el laminado actúa como una capa simple de material con propiedades combinadas. Las capas componentes pueden ser del mismo o diferentes combinaciones de material, además la orientación también puede variar. Usualmente el laminado compuesto está construido con capas unidireccionales del mismo material pero está orientado relativamente de diferentes maneras una capa respecto de la otra.

Numerosas combinaciones pueden ser aplicadas a la orientación de capas así como los materiales componentes. Cuando las capas están compuestas del mismo material componente la orientación así como la posición de de cada una en el laminado de todas formas necesita ser descrita. El arreglo de las capas está especificado por la convención del *código de laminado* el cual describe la *secuencia de apilamiento* de capas. Según este código, la numeración comienza desde la superficie inferior del laminado y continua hacia la capa superior.

Los laminados que son simétricos respecto de su plano medio también son conocidos como laminados balanceados. En la práctica, es muy usado considerar laminados balanceados, ya que están caracterizados por su comportamiento ortotrópico.

### 2.3.1 – Rigidez de láminas en el plano.

La relación tensión-deformación en un sistema axial puede ser definida por cada lámina usando al procedimiento descrito previamente. Ahora, la transformación de la relación tensión-deformación está determinada para cada capa desde la secuencia de apilamiento y el código de laminado.

Usando la relación de tensión-deformación en una capa individual, podemos llegar a dicha relación para el laminado que relaciona las resultantes de tensión  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  a la deformación de la superficie media  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$  y  $\gamma_{xy}^0$  en  $z = 0$ , esto es:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.1)$$

Los términos de rigidez planar son función de los componentes de la rigidez, el espesor de las capas y la secuencia de apilado y son dados por:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k \cdot t_k \quad , \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2.3.2)$$

Donde  $Q_{ij}^k$ , es la rigidez transformada desde la ecuación (1.2.14), y  $t_k$  es el espesor de la  $k$ -ésima capa y  $n$  es el numero total de capas en el laminado.

### 2.3.2 – Rigidez a la flexión del laminado.

Muchas partes estructurales hechas de materiales compuestos, tales como placas o cáscaras, se comportan de manera eficiente a la flexión. Algunas teorías han sido desarrolladas para modelar el comportamiento a la flexión de los compuestos laminados. La más popular es *la teoría clásica de laminación* (TCL), análoga a la teoría clásica para flexión de placas. La TCL está basada en las siguientes consideraciones:

- El laminado es delgado.
- La distribución de deformación es lineal en la dirección del espesor
- Las deformaciones perpendiculares a la superficie media son despreciables.
- La deformación por corte fuera del plano es cero.

El acuerdo para la flexión de la TCL es mostrada esquemáticamente en la siguiente figura:

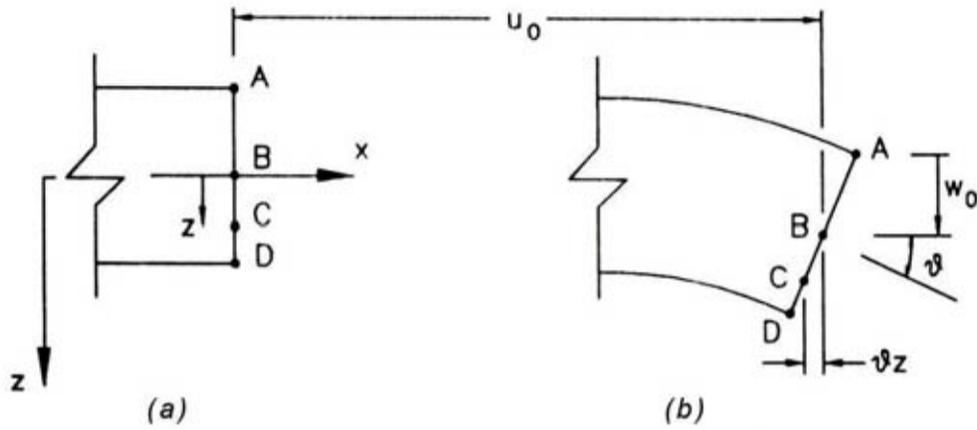


FIGURA 2.3.1 COMPUESTO LAMINADO EN FLEXIÓN: (a) POSICIÓN ORIGINAL, Y (b) POSICIÓN DEFORMADA

Según la TCL, sólo las tres deformaciones  $\epsilon_x, \epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  producen trabajo, mientras que todas las otras son cero. Es más, la deformación total puede ser expresada como función de la curvatura y deformación del plano medio, esto es:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - Z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3.3)$$

Donde el índice cero denota valores en la superficie media del laminado y las curvaturas  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ , están dadas por las ecuaciones (3.1.3). Sustituyendo la ecuación (2.3.3) en (2.2.14) obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - Z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (2.3.4)$$

La ecuación (2.3.4) integrada capa por capa sobre el espesor del laminado  $h$  resulta en la relación general tensión-deformación para laminados, esto es:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3.5)$$

La ecuación (2.3.5) relaciona la tensión y el momento resultante de la deformación y la curvatura. El término  $A_{ij}$  fue derivado en la sección 2.3.1 ecuación (2.3.2). La ecuación (2.3.5) implica que, en general, hay acoplamientos desarrollados en laminados entre los modos de flexión y en el plano, por ejemplo, una tensión axial puede producir curvaturas y el momento de flexión puede producir deformaciones axiales. Este comportamiento complejo caracteriza a los materiales anisotrópicos. Los términos  $B_{ij}$  y  $D_{ij}$  son dados en forma explícita a continuación:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k \cdot t_k \cdot \bar{z}_k \quad (2.3.6)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k \cdot \left( t_k \cdot \bar{z}_k^2 + \frac{1}{12} t_k^3 \right) \quad (2.3.7)$$

Para  $i, j = 1, 2, 3$ , donde  $Q_{ij}$  son los componentes de la rigidez transformada dada por la ecuación (2.2.15) y  $\bar{z}_k$  está definida como la distancia desde la superficie media de la  $k$ -ésima capa a la superficie media del laminado. Para un laminado con  $n$  capas, la distancia  $\bar{z}_k$  de la  $k$ -ésima capa desde el eje  $x$  es mostrada en la siguiente figura.

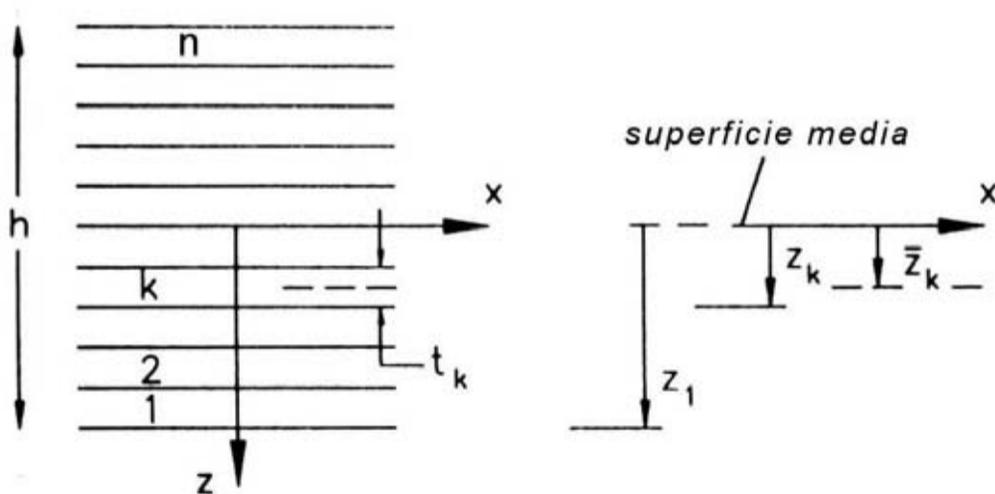


FIGURA 2.3.2 SECUENCIA DE PUESTA DE CAPAS Y NUMERACIÓN DE UN LAMINADO

Para laminados simétricos, el término acoplado  $B_{ij}$  desaparece y la ecuación (2.3.5) queda simplificada a un problema desacoplado.

### 2.3.3 – Resistencia de laminados.

El criterio de falla presentado en la sección 2.2.6 se refiere a la resistencia de capas. Así, para un laminado de dos o más capas, la aplicación de un criterio de resistencia a cada capa individual o pliegue puede indicar falla para algunas, mientras que para las otras el criterio puede ser satisfecho.

En vista de esta consideración, se han desarrollado varios criterios referidos a la resistencia de un laminado, el primer *criterio de falla para capas* asume que el material es degradado en el sentido que el laminado ha fallado si uno de sus pliegues ha fallado a causa de una tensión en el plano. En otros criterios, se asume que los pliegues restantes aún conservan una importante capacidad de resistencia, este es el llamado *criterio de fallas sucesivas de pliegues*. Después de las sucesivas fallas de pliegues, el *criterio del último pliegue* asume que el laminado aún retiene algo de su resistencia hasta que todos los pliegues han fallado, de este modo el criterio está asociado con la capacidad de última resistencia del laminado. Por ejemplo la delaminación o pérdida de continuidad entre las capas debido a una tensión interlaminar excesiva está examinada por el criterio de delaminación.

Algunas causas comunes de falla por delaminación y sus causas asociadas son mostradas a continuación:

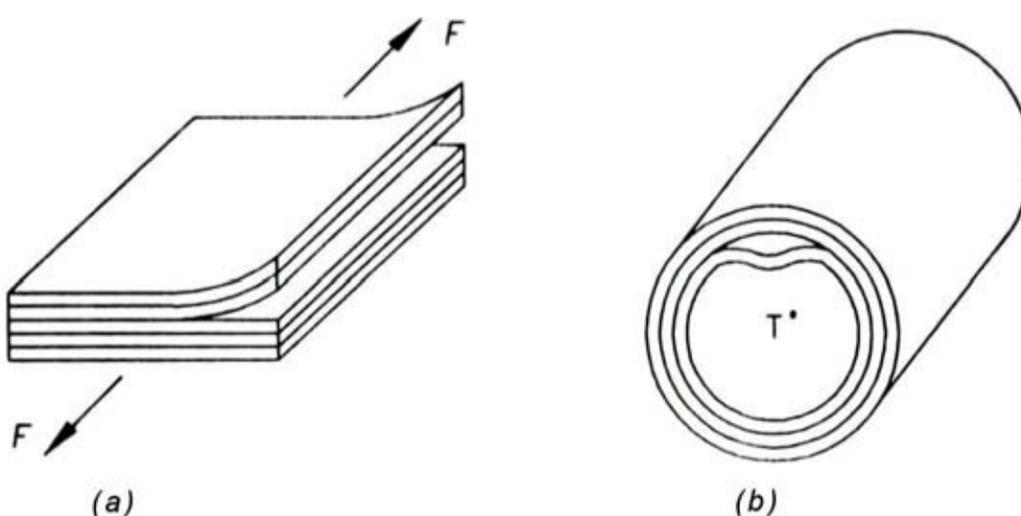


FIGURA 2.3.3 DELAMINACIÓN DE COMPUESTOS: (a) DELAMINACIÓN POR EXCESIVA TENSIÓN EN EL PLANO, (b) DELAMINACIÓN ASOCIADA CON CAMBIOS DE TEMPERATURA

### CAPÍTULO III

#### ELEMENTOS FINITOS PARA MATERIALES COMPUESTOS

Dos tipos de elementos finitos serán examinados para el análisis de los materiales compuestos. En el primer tipo la lámina es considerada delgada (espesor despreciable) y las suposiciones de Kirchhoff para placas son adoptadas. Para el segundo tipo la lámina tiene un espesor y se asume que el efecto de corte transversal en placas gruesas combinada con la flexión entrega una aproximación más apropiada, lo que se conoce como la *teoría para placas Mindlin*. En ambos casos, el elemento finito para materiales compuestos combina tensiones y deformaciones planares con la flexión.

Debe ponerse atención especial en la orientación del elemento en el sistema coordenado global X-Y-Z. Contrario a los materiales isotrópicos donde además del sistema global X-Y-Z, cada elemento está asociado con un sistema de coordenadas local  $\xi - \eta - \zeta$ , en los materiales compuestos los sistemas de coordenadas adicionales están definidos por cada capa. Por ejemplo cada capa está caracterizada por su sistema de material, el cual es un sistema local que define la orientación de las fibras en el sistema de elementos.

A continuación se desarrolla un procedimiento paso a paso para obtener las ecuaciones de rigidez de un elemento compuesto que está resaltado para elementos rectangulares isoparamétricos. Sólo los pasos que requieren alguna clarificación son discutidos aquí.

#### 3.1 – Elementos rectangulares para compuestos delgados.

La matriz de rigidez para una placa rectangular isoparamétrica delgada de elementos compuestos es desarrollada con la ayuda del método de la energía potencial. El método está sujeto a cargas planares y transversales. Debido a la complejidad de las relaciones algebraicas sólo las relaciones básicas serán obtenidas.

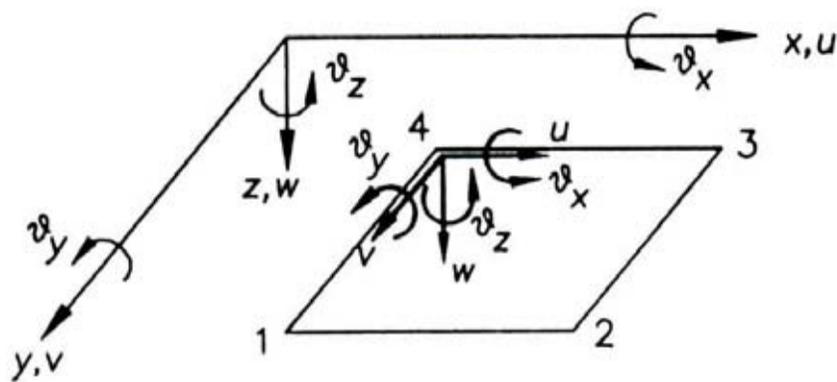


FIGURA 3.1.1 ELEMENTO RECTANGULAR DE 4 NODOS PARA COMPUESTOS DELGADOS

1<sup>er</sup> Paso: Definir el tipo de elemento y el sistema de coordenadas.

Se selecciona un elemento rectangular de cuatro nodos. El elemento tiene 24 grados de libertad (DOF), esto es seis grados por cada nodo. La numeración de los nodos, los desplazamientos así como el sistema de coordenadas están mostrados en la figura 3.1.1

2<sup>o</sup> Paso: Seleccionar la función de forma.

Los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  dentro del elemento están expresados en términos del desplazamiento nodal  $u_i$ ,  $v_i$  y  $w_i$  y la función de forma  $N_i$  por:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Donde:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & ; & & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & ; & & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Siguiendo la numeración de nodos en sentido opuesto a las agujas del reloj mostrado en la figura 3.1.1, las coordenadas nodales de los nodos 1, 2, 3 y 4 en el sistema  $\xi - \eta$  son: (-1,-1), (1,-1), (1,1) y (-1,1) respectivamente.

3<sup>er</sup> Paso: Determinar las relaciones deformación-desplazamiento.

Para un elemento bajo carga planar y transversal, las tensiones y deformaciones que producen trabajo son  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$ , para un estado planar de tensión-deformación, y  $\kappa_x, \kappa_y$  y  $\kappa_{xy}$ , para la flexión. Por tanto las relaciones de deformación-desplazamiento son dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & & \kappa_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & ; & & \kappa_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & ; & & \kappa_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Sustituyendo la ecuación (3.1.1) en (3.1.3), podemos expresar las tensiones y deformaciones con respecto a los desplazamientos nodales.

4<sup>o</sup> Paso: Definir la relación tensión-deformación.

La relación tensión-deformación de la ecuación (2.3.5) que relaciona la tensión resultante y el momento resultante para deformaciones y curvaturas es usada. Nótese que la integración sobre el espesor de la lámina ya ha sido hecha en la derivación de la ecuación (2.3.5).

5<sup>o</sup> Paso: Formular la matriz de rigidez para el elemento.

La matriz de rigidez del elemento está dada por:

$$[k]_e = \iint [B]^T [C] [B] dx dy \quad (3.1.4)$$

Donde la integración es realizada sobre el área del elemento en el sistema  $\xi - \eta$ . Nótese que  $[k]_e$  puede ser derivada en el sistema  $x-y$  a través de la transformación Jacobiana.

6<sup>o</sup> Paso: Calcular la fuerza nodal equivalente.

De la superposición de fuerzas nodales equivalentes se obtiene el vector de fuerzas  $\{f\}_e$  para elementos compuestos. La relación de fuerza-desplazamiento puede ser obtenida de la siguiente forma para un sistema de equilibrio, donde las ecuaciones pueden ser formuladas en forma de matriz para toda la estructura:

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (3.1.5)$$

Donde  $\{ \}$  denota un vector y  $[ ]$  denota una matriz. En la ecuación (3.1.5),  $\{f\}$  es el vector de fuerza nodal,  $[K]$  es la matriz global de rigidez referida a toda la estructura y  $\{U\}$  es el vector de desplazamiento nodal.

El equilibrio a nivel del elemento puede ser expresado con una relación similar a (3.1.5), esta es:

$$\{f\}_e = [k]_e \{u\}_e \quad (3.1.6)$$

Donde  $\{f\}_e$  es el vector de fuerza nodal en el elemento,  $[k]_e$  es la matriz de rigidez del elemento y  $\{u\}_e$  es el vector de desplazamiento nodal.

### **3.2 – Elementos rectangulares para compuestos gruesos.**

Para elementos de placa delgados las deformaciones por corte  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  han sido ignoradas como justificación para las suposiciones de pequeñas deflexiones de la teoría. Sin embargo para placas compuestas gruesas y su correspondiente elemento de placa el efecto de corte transversal no puede ser ignorado y la aplicación de la *teoría de deformación por corte Mindlin* para flexión de placas es requerida. Las deformaciones por corte no planares  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son incluidas en el vector de deformación.

La derivación de la matriz de rigidez para elementos de placa gruesos requiere exactamente de los mismos procedimientos mostrados anteriormente para placas delgadas. La única diferencia descansa en la relación deformación-desplazamiento donde las deformaciones  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  así como la resultante asociada de tensión  $N_{xz}$  y  $N_{yz}$  están incluidas en el análisis. Según la teoría para placas Mindlin, la relación deformación-desplazamiento está dada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & ; & & \gamma_{xz} &= -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & ; & & \gamma_{yz} &= -\theta_s + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Los desplazamientos y rotaciones están expresados en términos de los grados de libertad nodales y la función de forma dada por:

$$\begin{aligned}
 u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\
 v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\
 w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \\
 \theta_x &= N_1 \theta_{1x} + N_2 \theta_{2x} + N_3 \theta_{3x} + N_4 \theta_{4x} \\
 \theta_y &= N_1 \theta_{1y} + N_2 \theta_{2y} + N_3 \theta_{3y} + N_4 \theta_{4y}
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Donde la función de forma  $N_i$  está dada por la ecuación (3.1.2). La relación tensión-deformación de la ecuación (2.3.5) con la inclusión de las fuerzas de corte queda:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ N_{yz} \\ N_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{3.2.3}$$

Donde los componentes de la rigidez transversal del corte  $A_{44}$ ,  $A_{55}$  y  $A_{45}$  están dados por:

$$A_{44} = \sum_{k=1}^n Q_{44}^k \cdot t_k \tag{3.2.4a}$$

$$A_{55} = \sum_{k=1}^n Q_{55}^k \cdot t_k \tag{3.2.4b}$$

$$A_{45} = \sum_{k=1}^n Q_{45}^k \cdot t_k \tag{3.2.4c}$$

Finalmente, los términos de rigidez transversal del corte  $Q_{44}$ ,  $Q_{55}$  y  $Q_{45}$  para cada capa del laminado están compuestos por:

$$\begin{aligned}
 Q_{44} &= G_{23} \\
 Q_{55} &= G_{13} \\
 Q_{45} &= V_{45} \cdot G_{13} = V_{54} \cdot G_{23}
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Para materiales isotrópicos, la relación (3.2.5) es simplificada, ya que  $Q_{44} = G$ ,  $Q_{55} = G$  y  $Q_{45} = 0$

## CAPÍTULO IV

### GEOMETRÍA DE LA HÉLICE

#### 4.1 – La hélice como elemento propulsor.

La aplicabilidad del propulsor llamado “hélice” a la propulsión de los buques nace del fenómeno físico denominado sustentación.

Un cuerpo con sección recta de tipo de perfil (caracterizada por ser su longitud ó cuerda bastante mayor que su espesor), moviéndose en el seno de un fluido real experimenta una fuerza perpendicular a la dirección del flujo incidente, llamada *sustentación*  $L$ , y otra paralela a dicha dirección llamada *resistencia*  $D$ . Ambas fuerzas tienen su origen en las diferentes presiones que se crean en ambas caras del perfil, y su valor depende de las características geométricas y del ángulo de incidencia del flujo sobre el mismo (figura 4.1.1). La cara del perfil en la que se crea una sobrepresión se llama *cara de presión ó frontal*, y en la que se crea una depresión se denomina *cara de succión ó dorsal*.

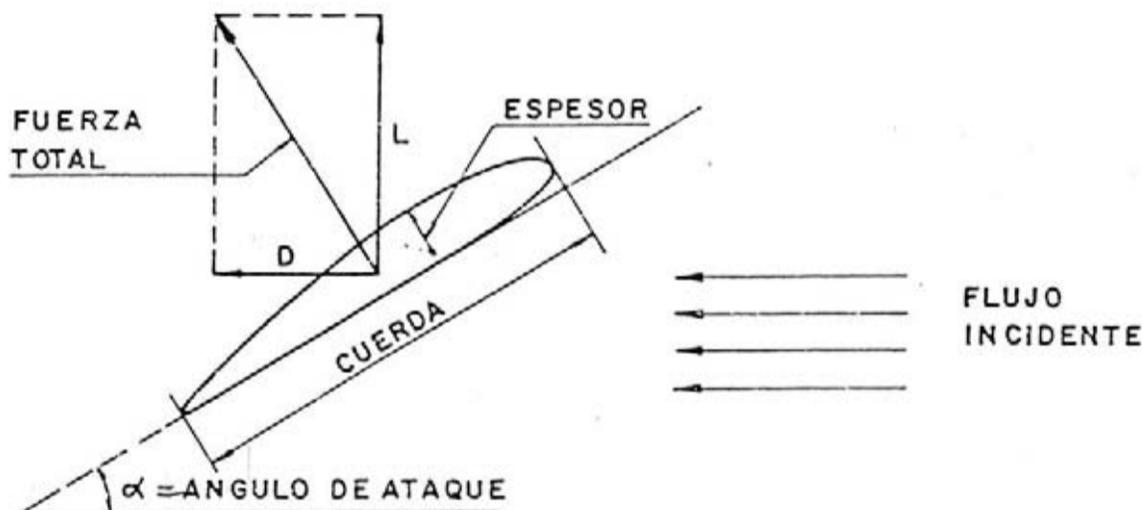


FIGURA 4.1.1 DEFINICIONES.

Este fenómeno, que es el fundamento físico del vuelo de los aviones por la fuerza que experimentan en sus alas, puede ser aplicado ventajosamente para la propulsión de los buques. En efecto, para que el perfil permanezca en movimiento, es necesario empujarle con una fuerza  $D$ . Si conseguimos esto podremos utilizar la fuerza  $L$  para empujar al buque, siempre que esta fuerza permanezca dirigida según el eje longitudinal del buque.

Para ello no hay más que obligar al perfil a seguir un movimiento circular de giro alrededor de un eje y a una distancia  $r$  del mismo.

Esto se puede conseguir ligando el perfil mecánicamente al eje de una máquina rotatoria. La máquina entonces tendrá que vencer un par igual a  $D \cdot r$ . El movimiento principal será el de rotación, con una velocidad tangencial de  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot n$ . Pero, debido al empuje del perfil, el buque (y por tanto el perfil) tendrán un movimiento de avance, que es lo que se desea. Aparece por tanto una velocidad axial, que llamaremos  $V_A$ . Entonces la velocidad con que llega el agua al perfil será la suma vectorial de ambas, tal como se presenta en la figura 4.1.2 que nos muestra el llamado *triángulo de velocidades*.

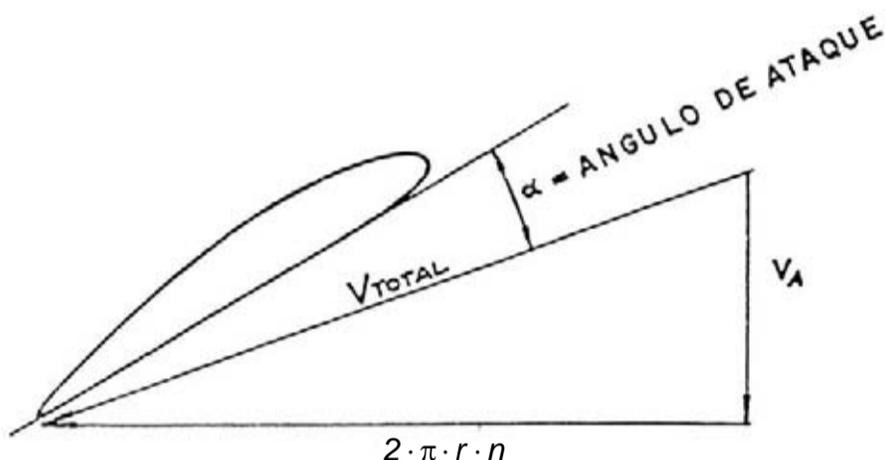


FIGURA 4.1.2 TRIÁNGULO DE VELOCIDADES.

No es, sin embargo recomendable que el cuerpo que se adosa al eje giratorio, cuyas secciones tienen forma de perfil y que llamaremos *pala*, sea un cuerpo cilíndrico de generatrices paralelas (*aspa*). La razón estriba (figura 4.2.3) en que debido a la forma del triángulo de velocidades, por ser distintas las velocidades tangenciales,  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot n$ , en las secciones cercanas y en las alejadas del eje, el flujo puede tener ángulos de ataque negativos en algunas secciones, lo que trae consigo sustentaciones negativas. Es necesario que el ángulo de orientación del perfil varíe con la distancia al eje. Esto se consigue si la cara frontal del perfil constituye una superficie helicoidal en lugar de una superficie plana (figura 4.2.3). Los ángulos de ataque entonces son siempre positivos y el rendimiento del mecanismo es mucho más satisfactorio. Este es el origen de las hélices propulsoras.

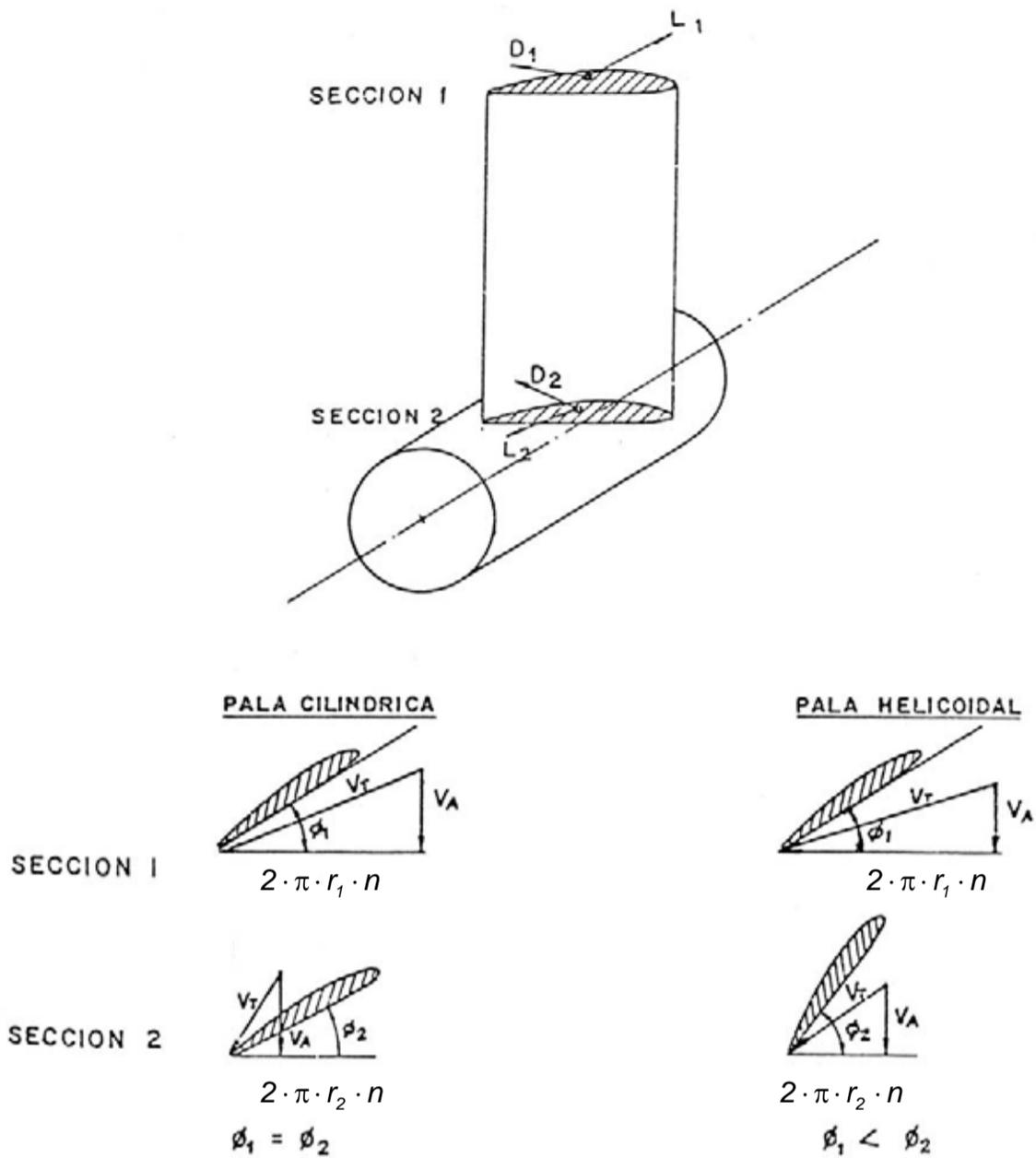


FIGURA 4.1.3 COMPARACIÓN DE PERFILES

## 4.2 –Superficies helicoidales.

Una superficie helicoidal ó helicoides, es la generada por una recta llamada generatriz que gira a velocidad constante apoyándose en otra línea recta llamada directriz, a la vez que se traslada, también a velocidad constante, a lo largo de esta.

La intersección de un cilindro, coaxial con la directriz, con la superficie helicoidal da origen a una línea llamada hélice. La distancia que avanza la generatriz a lo largo de la directriz durante una revolución completa se llama *paso del helicoides H* (figura 4.2.1). El ángulo que forma la tangente a una línea hélice en un punto de la misma, con la tangente a la sección recta del cilindro que contiene a dicho punto se llama *ángulo de paso*  $\phi$

Si desarrollamos el cilindro, la hélice forma una línea recta y podemos observar que el ángulo de paso es constante en cualquier punto de la misma (figura 4.2.1). El ángulo de paso vale:

$$\tan(\phi) = \frac{H}{2 \cdot \pi r}$$

Si la generatriz es perpendicular a la directriz se dice que el helicoides es de generatriz recta, y si no es así, que es de generatriz inclinada. Al ángulo formado por la generatriz y la perpendicular a la directriz se le llama *ángulo de lanzamiento*  $\varepsilon$  y, evidentemente, un helicoides de generatriz recta tiene un lanzamiento de  $0^\circ$ .

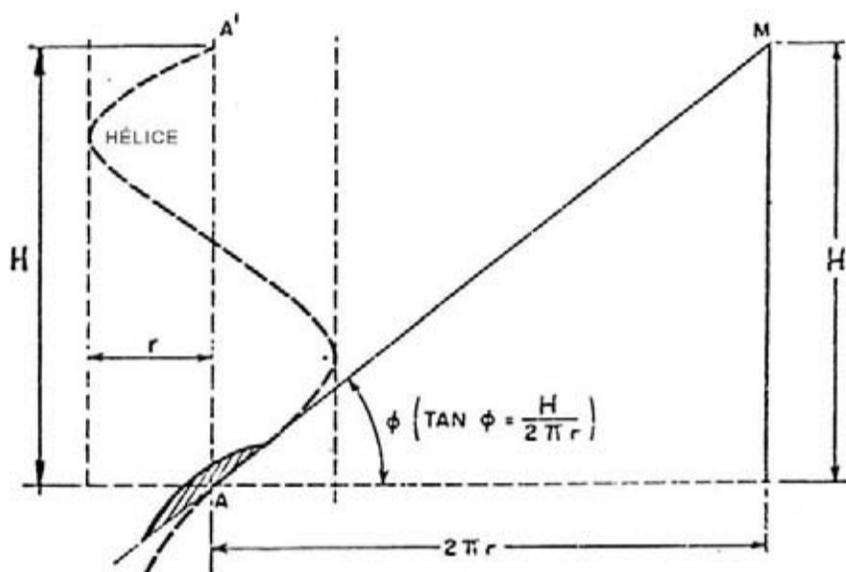


FIGURA 4.2.1 PASO DE LA HÉLICE

Existen otros tipos de superficies helicoidales en los que el desplazamiento longitudinal de la generatriz a lo largo de la directriz se realiza con velocidad variable radialmente. La superficie continúa siendo helicoidal, ya que el corte por cilindros coaxiales da lugar a líneas hélices, pero el paso  $H$  varía ahora de unos puntos a otros según su distancia a la directriz, es decir según el radio. Se llaman helicoides de *paso radialmente variable*, y también es encontrado en los propulsores marinos. En la figura 4.2.2 puede observarse que el paso de la hélice exterior,  $\overline{4BC}$  es distinto al de la hélice contigua  $\overline{4B'C'}$ .

La cara *frontal* ó cara de *presión* en una pala de una hélice real es un trozo de helicoides  $RSP$  (figura 4.2.3). Sobre las distintas líneas hélices de dicho helicoides se llevan los espesores que darán origen a los distintos perfiles sustentadores, formándose de esta manera la cara *dorsal* ó de *succión*  $RQP$ , que ya no forma parte de helicoides alguno, sino que es una superficie alabeada en general.

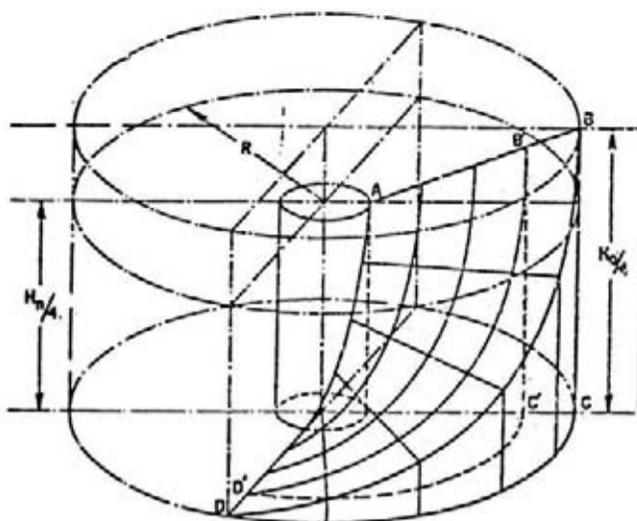


FIGURA 4.2.2 PASO RADIALMENTE VARIABLE

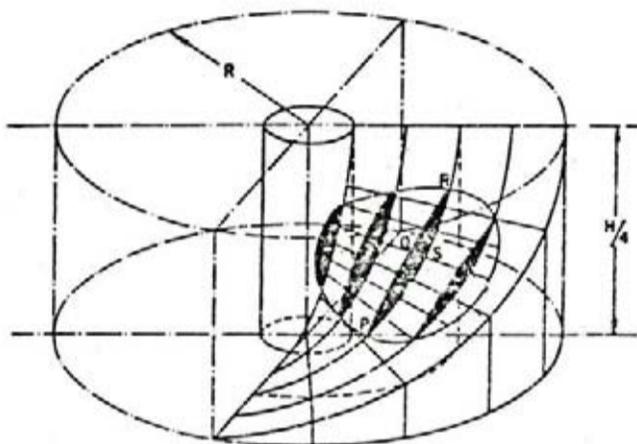


FIGURA 4.2.3 PASO CONSTANTE Y SUPERFICIE ALABEADA.

Dado el sentido que ha de tener el empuje, y por tanto la sustentación, que debe ser de popa hacia proa, la cara de presión de las hélices, o sea la que forma la superficie helicoidal, es siempre la que se observa mirando a la hélice desde popa (figura 4.2.4).

Cada pala forma parte de un helicoides y si la hélice tiene  $Z$  palas, existirán  $Z$  helicoides como el de la figura 4.2.3, desfasadas entre sí  $\frac{360}{Z}$  grados.

La parte más cercana al eje de giro de cada pala se llama *raíz* de la pala y esta se encuentra en la intersección del helicoides con una superficie cilíndrica (ó cónica) que se llama *núcleo* de la hélice que proporciona un empotramiento sólido a las palas. Dicho núcleo va taladrado axialmente para permitir su colocación en el eje de cola del buque.

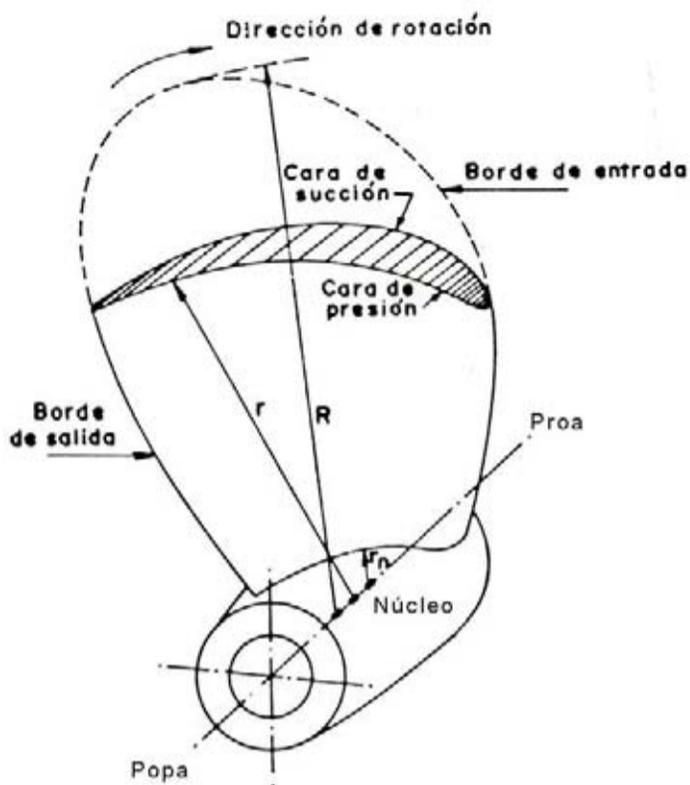


FIGURA 4.2.4 NOMENCLATURA DE LA HÉLICE

Las hélices pueden ser de paso fijo ó de paso regulable. Las primeras son las que hemos mencionado hasta ahora, ya que las palas forman una unidad solidaria con el núcleo. En las de paso regulable cada pala puede girar un cierto ángulo alrededor de un eje perpendicular al de rotación, y por tanto, esto permite cambiar el ángulo de paso de todas las secciones de la pala simultáneamente.

### 4.3 – Representación gráfica de la hélice.

La representación gráfica de las hélices se realiza usualmente dibujando una vista lateral y una vista desde popa de la pala, incluyendo el núcleo. En el mismo dibujo (figura 4.3.1) se representa la forma de los distintos perfiles que constituyen la pala (que son normalmente diferentes según el radio en que van situados), así como el paso que tiene cada línea hélice en sus distintos radios, lo que se denomina *ley de pasos*.

A continuación se comentan algunas particularidades de cada una de las proyecciones de la hélice y de los otros elementos que se incluyen en su representación gráfica.

**a) Proyección lateral.**

Consta de la proyección de la pala sobre un plano longitudinal, vista desde el lado de estribor, y de un corte ficticio que se hubiera dado a la pala por los puntos en los que el espesor en cada radio fuera el máximo. Este corte se llama *ley de espesores*. En esta proyección se puede medir el ángulo de lanzamiento.

**b) Proyección frontal.**

Es una vista desde popa y en ella se representan la proyección transversal de la pala y del núcleo. También se pueden unir los puntos que tienen el máximo espesor en cada sección y que constituyen la llamada *línea de máximo espesor*. La distancia entre la punta de la pala y la generatriz se llama *divergencia* (Skew en inglés). También se representa en esta vista el llamado *contorno desarrollado* de la pala que corresponde a la superficie que se obtendría si la cara de presión del helicoides estuviera hecha de una hoja fina y flexible pero inextensible y que pudiera estirarse sobre un papel. Este contorno se obtiene girando la pala sobre el plano del dibujo, aunque obviamente, cada sección cilíndrica giraría un ángulo diferente, exactamente igual al ángulo de paso de cada una.

**c) Perfiles expandidos.**

Los perfiles que se obtienen de la intersección de sucesivos cilindros con la pala se presentan expandidos, es decir estirados sobre el plano en la siguiente vista. Cada perfil se dibuja sobre su radio correspondiente y la línea que une los extremos de las secciones se denomina *contorno expandido* de la pala.

Sobre cada radio se lleva longitudinalmente el paso que corresponde a dicho radio. Uniéndolos puntos así obtenidos se representa la *ley de pasos*.

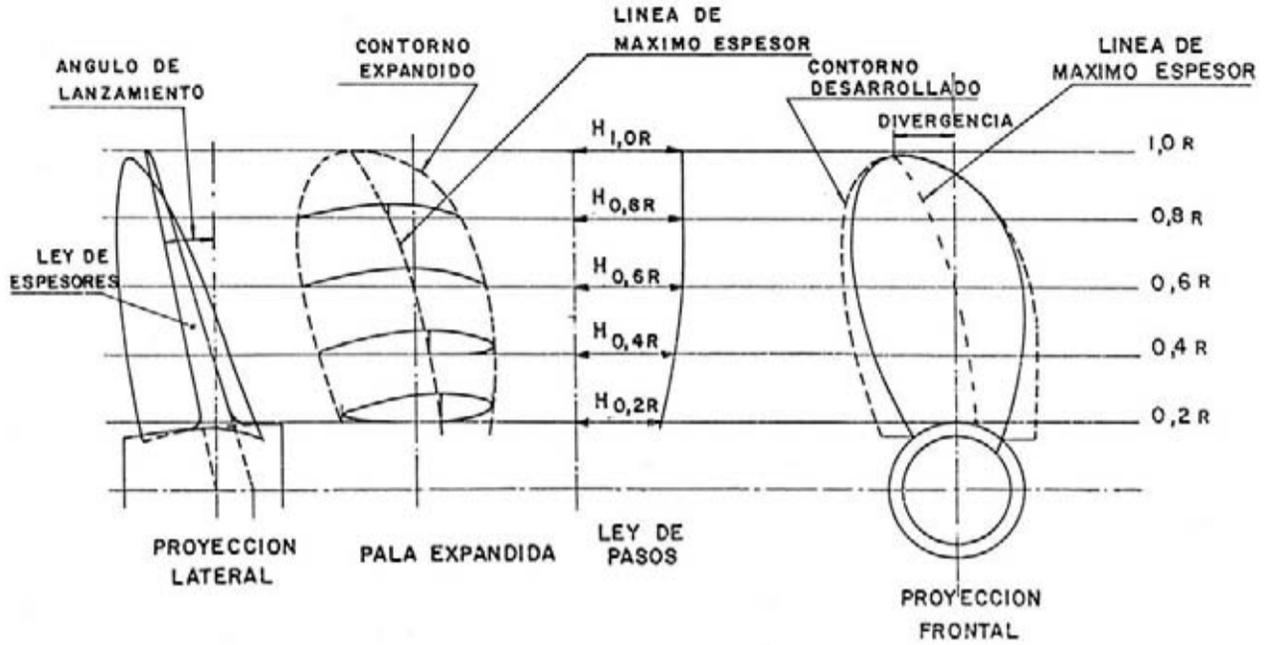


FIGURA 4.3.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA HÉLICE.

#### 4.4 – Relaciones geométricas.

A continuación se definen algunas relaciones geométricas que son de utilidad por ser ampliamente utilizadas en el estudio de las hélices.

##### Diámetro (D):

Es el diámetro del cilindro circunscrito a la hélice por la extremidad de las palas más alejada del eje. El valor  $D/2$  se llama radio de la hélice.

##### Área del disco ( $A_0$ ):

Su valor es el siguiente:

$$A_0 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

##### Relación paso/diámetro:

Para cada radio  $x = \frac{r}{R}$  se define la relación paso /diámetro ( $H/D$ ) como:

$$\left(\frac{H}{D}\right) \cdot x = x_0$$

Como se ha mencionado antes si el paso varía de unos radios a otros, se utiliza

entonces la relación paso/diámetro para  $r=0.7R$  y que viene dada por:

$$\frac{H_{0.7R}}{D}$$

**Relación área – disco expandida**

$$\frac{A_E}{A_0} = \frac{\text{área expandida de todas las palas (sin núcleo)}}{\text{área del disco}}$$

**Relación área – disco desarrollada.**

$$\frac{A_D}{A_0} = \frac{\text{área desarrollada de todas las palas (sin núcleo)}}{\text{área del disco}}$$

**Relación área – disco proyectada.**

$$\frac{A_P}{A_0} = \frac{\text{área proyectada frontalmente de todas las palas (sin núcleo)}}{\text{área del disco}}$$

Entre las distintas relaciones de áreas existen las siguientes relaciones aproximadas.

- $\frac{A_E}{A_0} = \frac{A_D}{A_0}$
- $\frac{A_P}{A_D} = 1.067 - 0.229 \cdot \frac{H_{0.7R}}{D}$

Comúnmente suele llamarse simplemente *relación área – disco* a  $\frac{A_D}{A_0}$  ó  $\frac{A_E}{A_0}$  que son aproximadamente iguales.

## CAPÍTULO V

### RESISTENCIA MECÁNICA DE LAS PALAS

#### 5.1 – Generalidades.

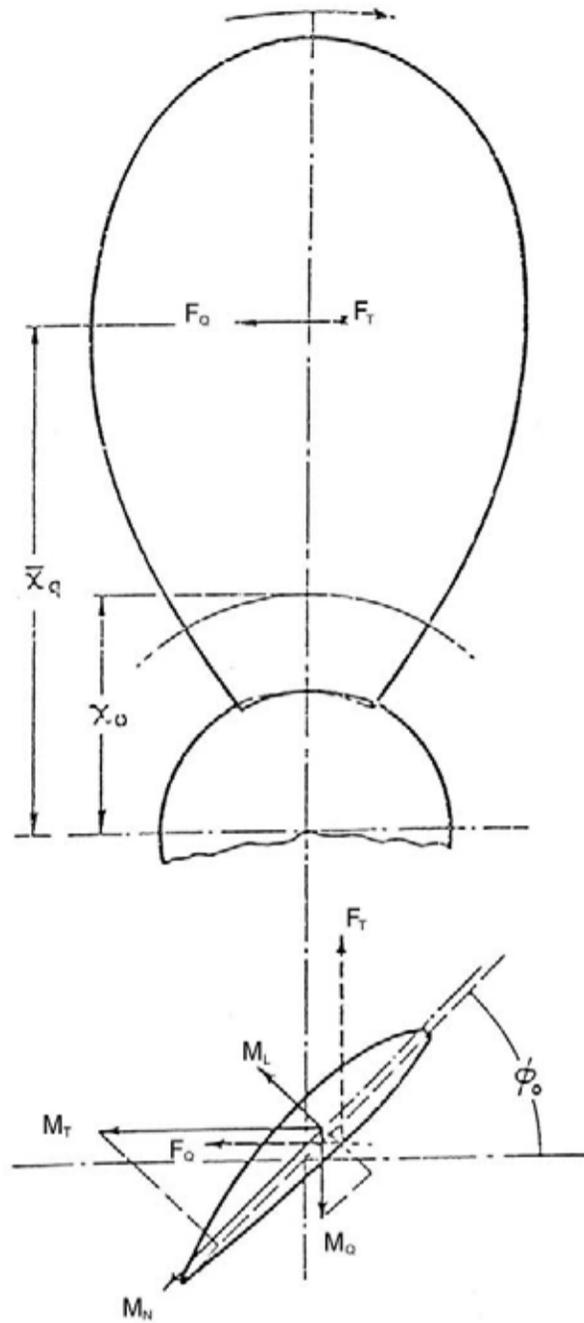
Una vez proyectada la hélice para obtener el mejor rendimiento posible y un buen comportamiento frente a la cavitación es preciso calcular, para cada sección de la pala, los espesores necesarios para que pueda soportar, sin fracturas ni elongaciones excesivas, los esfuerzos a los que va a estar sometida. Este cálculo es imprescindible, ya que unos espesores exageradamente grandes, fruto de un excesivo conservadurismo, darían lugar, a una caída del rendimiento de las secciones y a un aumento del riesgo de cavitación. La determinación de dichos esfuerzos es el primer paso de este proceso.

Dada la dificultad que entraña la complicada geometría de la hélice y los muchas veces desconocidos esfuerzos dinámicos generados al moverse las secciones de las palas en un campo heterogéneo de estelas, es universalmente admitida una simplificación de este problema, consistente en considerar la pala de forma estática y actuando sobre ella, los valores de las fuerzas generadoras del empuje y par medios, así como de la fuerza centrífuga. Los valores máximos de estas fuerzas, así como el proceso de fatiga del material se incluyen en unos generosos coeficientes de seguridad aplicados a los esfuerzos unitarios máximos admisibles.

En cuanto al desarrollo del problema para llegar a métodos sencillos en el proyecto se considera la pala como una viga en voladizo. A partir de aquí las distintas hipótesis dan lugar a varios métodos de cálculo. Examinemos previamente las fuerzas actuantes en cada sección.

#### 5.2 – Esfuerzos debidos al par y al empuje.

En la figura 5.1.1 se puede apreciar que las fuerzas actuantes en una sección son  $F_T$  y  $F_Q$  generadoras respectivamente del par y del empuje. Los momentos producidos por estas fuerzas en la sección  $x_0$  serían:  $M_T$ ,  $M_Q$  que están dibujados en la misma figura en dirección perpendicular al plano en el cual producen el giro elemental.



*FIGURA 5.1.1 FUERZAS ACTUANTES EN LA SECCIÓN*

Estos momentos pueden descomponerse de forma normal y paralela a la pala según

$$\begin{aligned} M_L &= M_T \cdot \text{sen}(\phi_o) - M_o \cdot \text{cos}(\phi_o) \\ M_N &= M_T \cdot \text{cos}(\phi_o) - M_o \cdot \text{sen}(\phi_o) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Donde  $\phi_o$  = ángulo de paso en la sección  $x_o$

El momento a estudiar es  $M_N$  ya que  $M_L$  actúa de forma que la rigidez de la pala frente a esos esfuerzos es muy grande.

El valor de la fuerza  $F_T$  puede evaluarse suponiendo una determinada ley de empujes elementales distribuida a lo largo del radio. Los métodos más simplistas suponen una ley triangular lineal y los más rigurosos una distribución como en la figura 5.1.2 que puede aproximarse a la expresión:

$$\frac{dT_x}{Z} = 3.5 \cdot K_T \cdot x^2 \cdot (1-x)^{1/2} \cdot R \cdot dx \quad (5.2.2)$$

Donde:

- $dT = dF_T$  = empuje en una sección a distancia  $r$  del eje.
- $Z$  = número de palas.
- $K_T$  = empuje por unidad de longitud de pala.
- $x$  =  $r / R$
- $R$  = radio de la hélice.

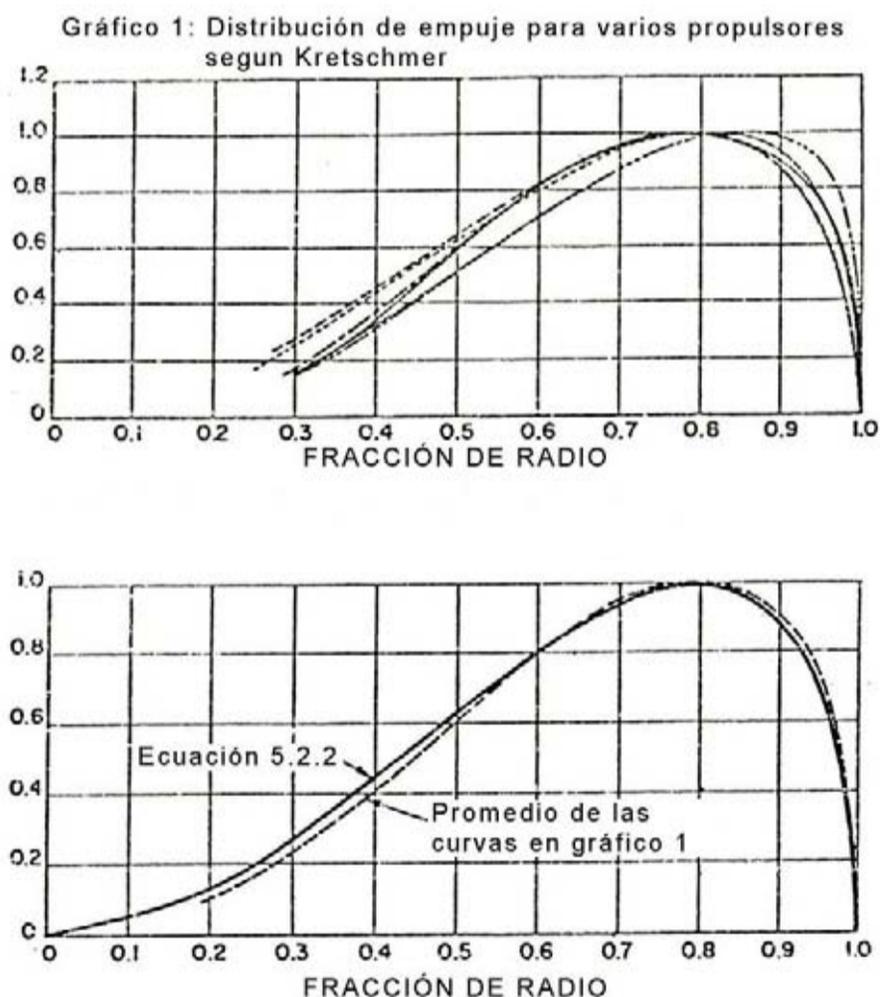


FIGURA 5.1.2 DISTRIBUCIÓN RADIAL DE EMPUJE

Integrando (5.2.2) entre los límites deseados puede calcularse el empuje total que suministra la pala.

$$\frac{T_0}{Z} = 3.5 \cdot R \cdot K_T \cdot \int_x^1 x^2 \cdot (1-x)^{1/2} \cdot dx \quad (5.2.3)$$

que es el valor del esfuerzo cortante en la sección  $x = \frac{r}{R}$ ,  $(S_T)_x$

El momento flector se obtiene integrando la curva de esfuerzos cortantes y por tanto:

$$M_{Y0} = R \cdot \int_{x_0}^1 (S_T)_x \cdot dx = 3.5 \cdot R^2 \cdot K_T \cdot \int_{x_0}^1 \int_{x_0}^1 x^2 \cdot (1-x)^{1/2} \cdot dx \quad (5.2.4)$$

En cuanto al valor de  $F_Q$ , fuerza generadora del par, podemos obtenerla a partir de  $F_T=T$  de la siguiente forma:

$$\eta = \frac{dT \cdot V_A}{2 \cdot \pi \cdot n \cdot dQ} = \frac{dT \cdot V_A}{2 \cdot \pi \cdot n \cdot R \cdot dF_Q} \quad (5.2.5)$$

Donde  $\eta$ = rendimiento hidrodinámico de la sección ya que

$$dQ = r \cdot dF_Q = \frac{r}{R} \otimes R \cdot dF_Q = x \cdot R \cdot dF_Q$$

Operando en (5.2.5)

$$dF_Q = \frac{dT}{x\pi} \cdot \frac{V_A}{n \cdot D} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{dT}{x\pi} \cdot J \cdot \frac{1}{\eta} \quad (5.2.6)$$

Vemos que  $F_Q$  puede ser escrita en función de  $T$  (o se de  $F_T$ ) y es preciso conocer  $J$  y  $\eta$  para cada sección, que en primera aproximación pueden considerarse constantes para toda la pala.

Si se toman los valores de  $J$  y  $\eta$  correspondientes al punto de proyecto se llega a una expresión aproximada del tipo:

$$\frac{\eta}{J} = 0.13 + \frac{0.78}{H_{0.7R}} \quad (5.2.7)$$

En consecuencia, puede calcularse el valor del momento flector  $M_Q$ , debido a  $F_Q$ , de forma similar a  $M_T$ , es decir integrando dos veces la expresión (5.2.6)

### 5.3 – Esfuerzos debidos a la fuerza centrífuga.

La fuerza centrífuga actuante sobre cada elemento de pala proporciona una tensión primaria de tracción que tiene poca importancia. Es más importante el momento flector a que da lugar si la hélice tiene lanzamiento (figura 5.3.1)

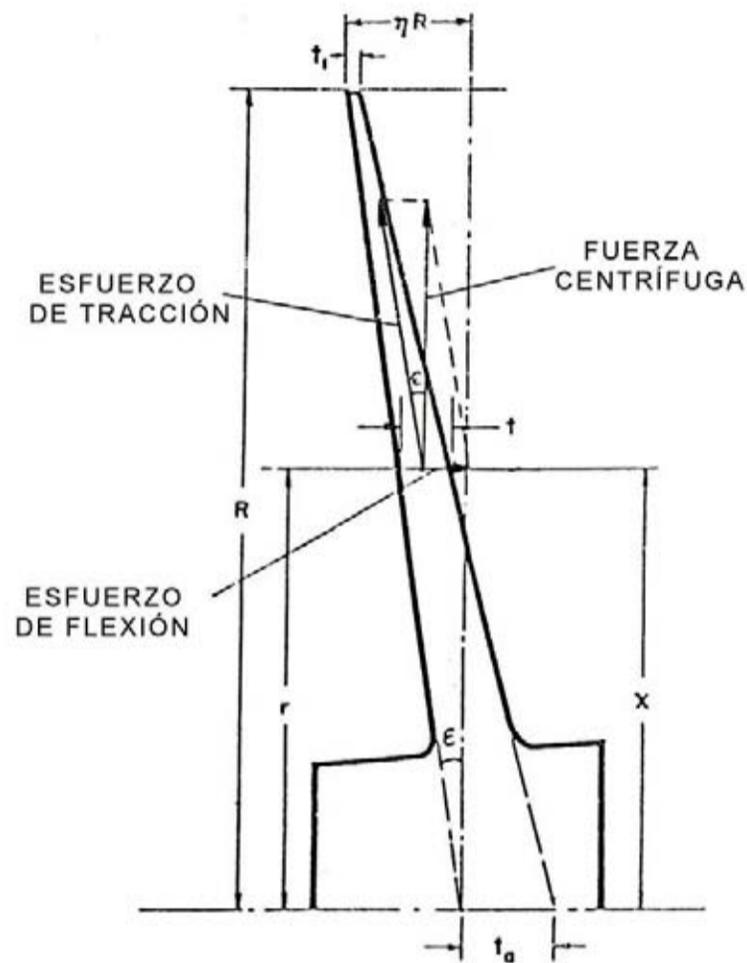


FIGURA 5.3.1 ESFUERZOS DEBIDO A LA FUERZA CENTRÍFUGA

La fuerza  $F_C$  a considerar para la franja es la generada por un cuerpo en rotación a partir de la segunda ley de Newton. Esto es:

$$F = m \cdot a$$

Donde la masa está en  $\left(\frac{Kg \cdot s^2}{m}\right)$  y la aceleración en  $\left(\frac{m}{s^2}\right)$  y:

$$a = \omega^2 \cdot R \quad \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot RPM}{60} \quad \left( \frac{Rad}{s} \right)$$

El volumen de cada franja puede ser obtenido de forma muy sencilla a través de cualquier software CAD que desarrolle modelos en 3D, por tanto el momento flector debido a la fuerza centrífuga es:

$$M_C = F_C \cdot \tan(\varepsilon) \cdot r \quad (5.3.1)$$

Donde:

$\varepsilon$  = ángulo de lanzamiento (rake)

#### **5.4 – Cálculo de los esfuerzos unitarios.**

En la sección que se considere:

$$\sigma = \frac{\text{Momento flector}}{\text{Módulo resistente}} = \frac{M_N + M_C}{G} \quad (5.4.1)$$

Es evidente que:

$$G = C \cdot S^2 \cdot L$$

Donde:

$C$  = constante que depende de la forma de la sección.

$S$  = espesor máximo.

$L$  = longitud de la sección.

De la expresión (5.4.1), considerando un determinado valor de  $\sigma_{ADMISIBLE}$  puede evaluarse el valor de  $S$ .

Existen varias fórmulas aproximadas, mencionaremos la de Taylor y la de Romson.

**5.4.1 – Fórmula de Taylor:**

$$\sigma = \frac{C_1 \cdot (DHP)}{Z \cdot n} \otimes \frac{D^3}{S_{0.2}^2 \cdot L_{0.2}} + \frac{\gamma \cdot D^2 \cdot n^2}{10^6} \otimes \left[ \frac{B \cdot D}{S_{0.2}} \cdot \tan(\varepsilon) - 0.154 \right] \quad (5.4.2)$$

Donde:

- $\sigma$  = tensión unitaria en PSI
- $C_1$  y  $B$  = son función de la relación paso/diámetro (figura 5.4.1)
- $D$  = diámetro de la hélice en pies.
- $Z$  = número de palas.
- $n$  = revoluciones por minuto.
- $\gamma$  = peso específico en libras/pie<sup>3</sup>
- $S_{0.2}$  = espesor en la sección 0.2R en pies.
- $L_{0.2}$  = longitud de la sección 0.2R en pies.
- $\varepsilon$  = ángulo de lanzamiento (rake)

La expresión (5.4.2) forma una ecuación de 2º grado de la que se puede obtener  $S_{0.2}$ . Taylor supone una distribución lineal de espesores desde la sección 0.2R hasta la punta, lo que está en el lado pesimista. El espesor de la punta puede tomarse como:

$$S_{1.0R} = 0.0035 \cdot D \text{ a } 0.0040 \cdot D$$

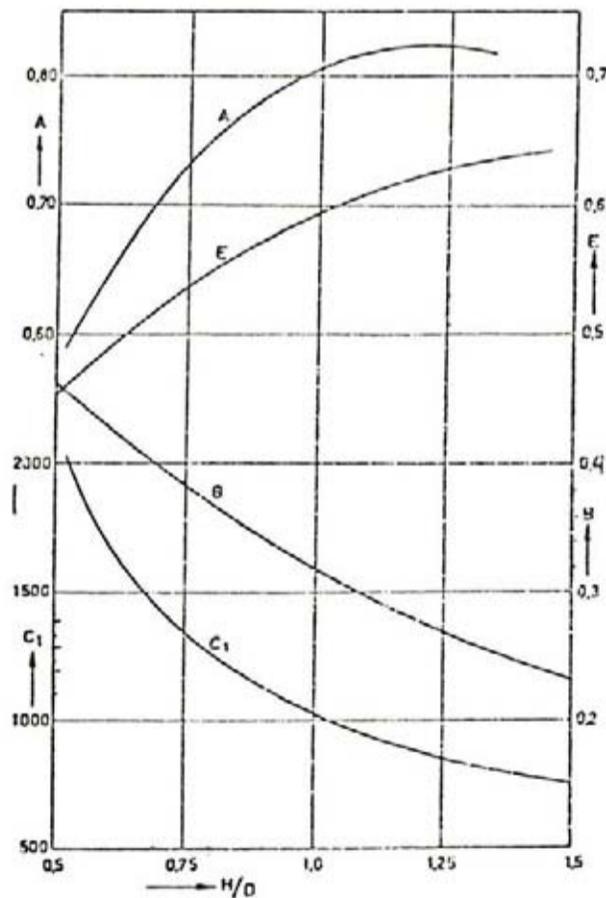


FIGURA 5.4.1 (VÉASE REFERENCIA N°4)

5.4.2 – Fórmulas de Romson.

Romson supone una distribución no lineal de espesores y por tanto calcula los mismos en tres secciones, a 0.2R, 0.5R y en la punta de la pala. Para la tensión unitaria da la expresión:

$$\sigma = \frac{(SHP) \cdot \xi}{Z \cdot n \cdot 0.085} \otimes \frac{C_A \cdot (C_B + \delta \eta_0)}{S^2 \cdot L} + \frac{n^2 \cdot D^2}{10^4} \otimes [AC - 0.58] \quad (5.4.3)$$

Donde:

- $\sigma$  = tensión unitaria en Kg. /cm<sup>2</sup>
- $\xi$  = función del ángulo de lanzamiento (figura 5.4.2)
- $D$  = diámetro de la hélice en metros.
- $Z$  = número de palas.
- $n$  = revoluciones por minuto.
- $\delta \eta_0$  = del diagrama  $B_p - \delta$
- $S$  = espesor en la sección considerada en centímetros.
- $L$  = longitud de la sección considerada en metros.
- $C_A$  = función de H/D (figura 5.4.2)
- $C_B$  = constante \*H/D (figura 5.4.2)
- $A$  = función de D/S y del ángulo de lanzamiento (figura 5.4.2)
- $C$  = función de H/D

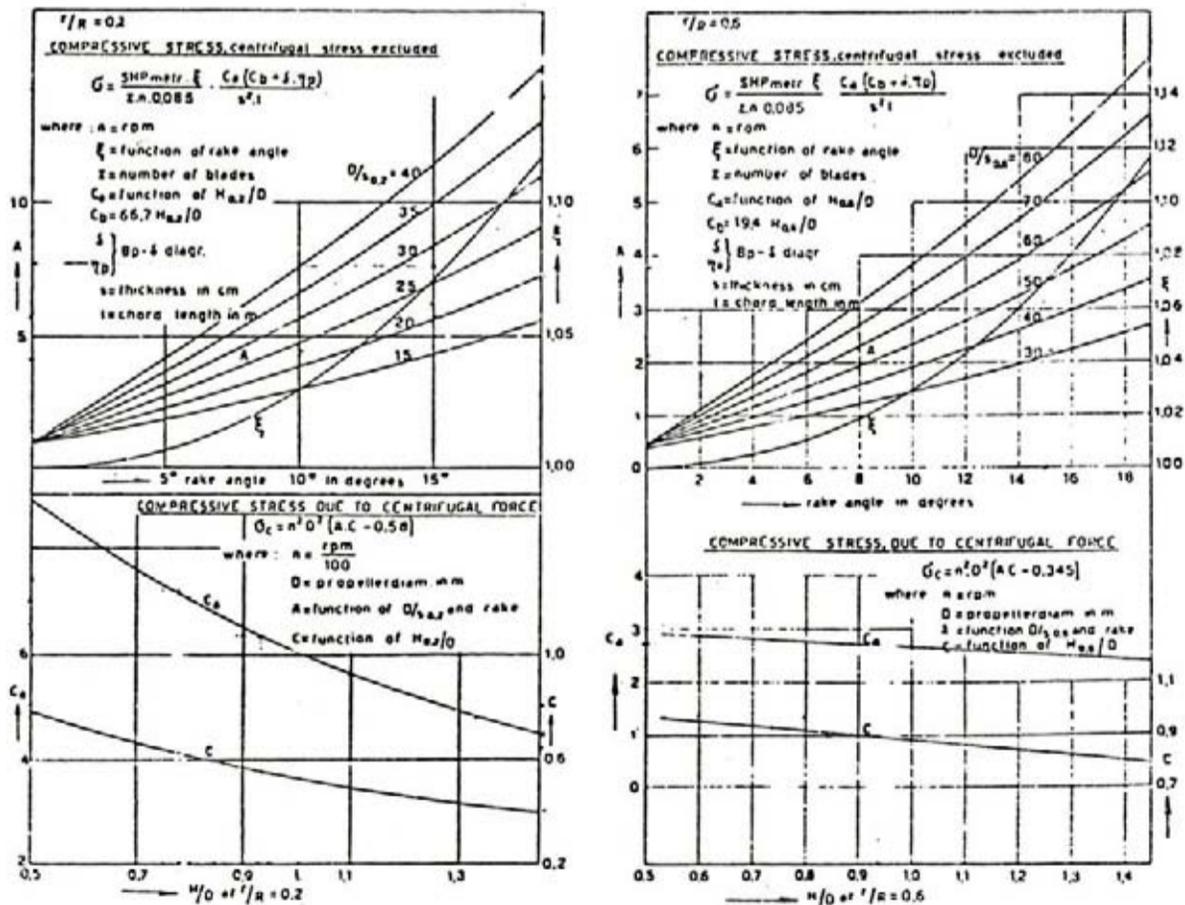


FIGURA 5.4.2 (VÉASE REFERENCIA N°4)

## **5.5 – Cálculo de una hélice por reglamento.**

Según el reglamento Germanischer Lloyd el dimensionamiento de una hélice de paso fijo se basa en el cálculo de un espesor de perfil en los radios 0.25R, 0.35R y 0.6R interpolando y extrapolando valores intermedios podemos obtener una distribución de espesores en el sentido radial de la pala, con este dimensionamiento se evita un cálculo estructural de la hélice simplificando esta tarea.

### **5.5.1 – Materiales.**

Las hélices deberán fabricarse con aleaciones fundidas de cobre o de acero resistentes al agua de mar con un límite de ruptura de por lo menos 440 (N/mm<sup>2</sup>). La resistencia a la corrosión por agua de mar de una aleación fundida de cobre o acero puede considerarse suficiente a los efectos de las reglas para el dimensionamiento de los espesores de las palas, si la aleación es capaz de superar un ensayo de resistencia a la fatiga bajo esfuerzos de flexión alternos, con 10<sup>8</sup> ciclos de carga, de alrededor del 20% de la resistencia mínima a la tracción, en una solución de NaCL, al 3% y si la resistencia a la fatiga bajo cargas de flexión alternas en agua de mar natural no es inferior a aproximadamente el 65% de los valores obtenidos en la solución de cloruro sódico al 3%.

### **5.5.2 – Cálculo del espesor de las palas.**

Los espesores de las palas en los radios 0.25R, 0.35R y 0.6R (véase figura 4.2.1) de las hélices de paso fijo deberán corresponder como mínimo a la siguiente fórmula:

$$t = K_0 \cdot k \cdot K_1 \cdot C_G \cdot C_{Dyn} \quad (4.2)$$

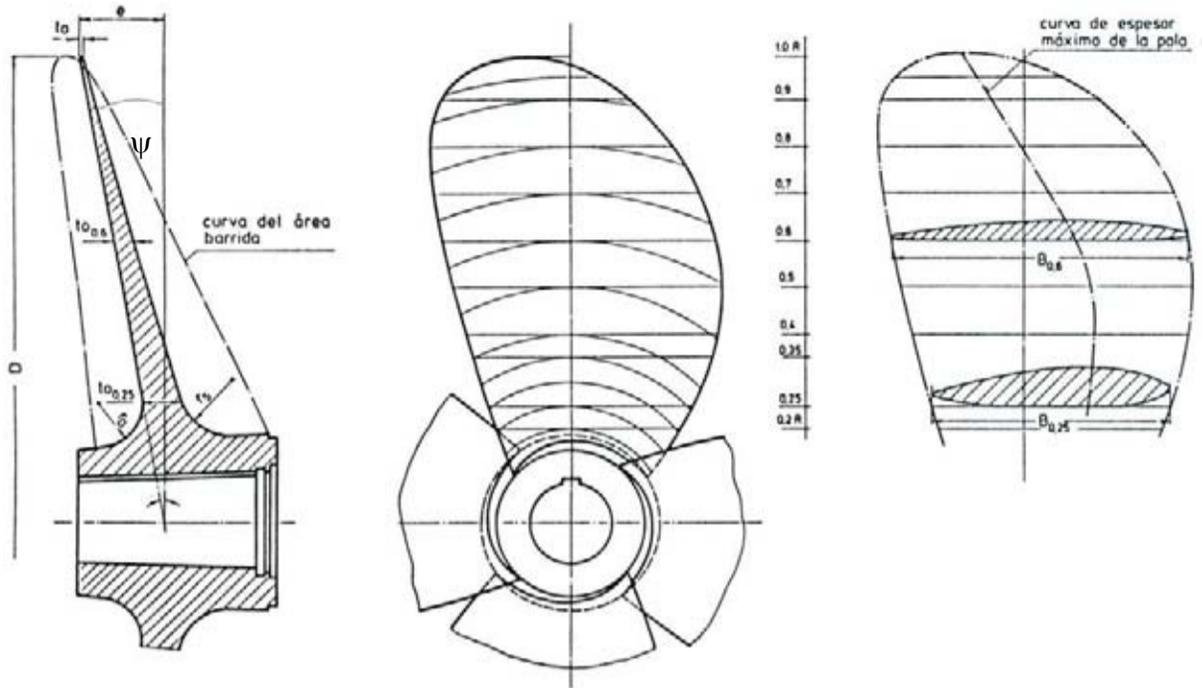


FIGURA 5.5.1 SECCIONES DE LA PALA.

Donde:

- $$K_0 = 1 + \frac{e \cdot \cos(\alpha)}{H} + \frac{n}{1500} \quad (5.5.1)$$

$e$  (mm) = Inclutación de la pala hacia la popa  
 =  $R \cdot \tan(\psi)$

$(\psi)$  = Ángulo entre la generatriz de la cara de presión y la perpendicular.

$H$ (mm) = Paso de la pala de la hélice en la cara de presión a 0.25R, 0.35R y 0.6R

$n$  (1/min) = Revoluciones por minuto.

- $k$  = Según la siguiente tabla:

TIPO DE PERFIL	VALORES DE $k$		
	0.25R	0.35R	0.6R
PERFILES DE SEGMENTO CON CARA DE SUCCIÓN CIRCULAR, $\beta_x=0.12$	73	62	44
PERFILES DE SEGMENTO CON CARA DE SUCCIÓN PARABÓLICA, $\beta_x=0.11$	77	66	47
PERFILES DE PALA PARA HÉLICES DE LA SERIE B, SIENDO $\beta_{0.25} = 0.10$ , $\beta_{0.35} = 0.11$ y $\beta_{0.6} = 0.12$	80	66	44

$\beta$  = Factor del módulo de la sección cilíndrica desarrollada en torno a la línea de pasos de la pala para perfiles según la tabla anterior.

$$\bullet K_1 = \sqrt{\frac{P_w \cdot 10^5 \cdot \left(2 \cdot \frac{D}{H} \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right)}{n \cdot B \cdot z \cdot C_w \cdot \cos^2(\psi)}} \quad (5.5.2)$$

$P_w$  (kW) = Potencia en el eje.

$D$  (mm) = Diámetro de la hélice.

$\alpha$  (°) = Ángulo de paso del perfil a los radios 0.25R y 0.35R

$$\alpha_{0.25R} = \operatorname{atan}\left(\frac{1.27 \cdot H}{D}\right)$$

$$\alpha_{0.35R} = \operatorname{atan}\left(\frac{0.91 \cdot H}{D}\right)$$

$$\alpha_{0.6R} = \operatorname{atan}\left(\frac{0.53 \cdot H}{D}\right)$$

$B$  (mm) = Anchura de las secciones cilíndricas del desarrollo de la pala en los radios 0.25R y 0.35R.

$z$  = Número de palas.

$C_w$  = Valor característico del material de la hélice según la tabla siguiente, corresponde a la resistencia mínima a la tracción  $R_m$  del material una vez demostrada su resistencia a la fatiga bajo cargas de flexión alternas.

MATERIAL	DESCRIPCIÓN	$C_w$
Cu 1	LATÓN FUNDIDO AL Mn	440
Cu 2	LATÓN FUNDIDO AL Mn-Ni	440
Cu 3	BRONCE FUNDIDO AL Ni-Al	590
Cu 4	BRONCE FUNDIDO AL Mn-Al	630
Fe 1	ACERO MOLDEADO NO ALEADO	380
Fe 2	ACERO MOLDEADO POCO ALEADO	380
Fe 3	ACERO MOLDEADO AL CROMO MARTENSÍTICO 13/1-6	600
Fe 4	ACERO MOLDEADO MARTENSÍTICO-AUSTENÍTICO 17/4	600
Fe 5	ACERO MOLDEADO FERRÍTICO-AUSTENÍTICO 124/8	600
Fe 6	ACERO MOLDEADO AUSTENÍTICO 18/8-11	500
Fe 7	FUNDICIÓN GRIS	200

- $C_G$  = Factor de tamaño.  
 :  $1.1 \geq \sqrt{\frac{f_1 + D}{12.2}} \geq 0.85$  (5.5.3)

$D(m)$  = Diámetro de la hélice en metros.  
 $f_1$  = 7.2 para hélices de paso fijo.  
 = 6.2 para hélices de paso variable o hélices armadas.

- $C_{Dyn}$  = Factor dinámico.  
 =  $\sqrt{\frac{\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_m} - 1\right) + f_3}{0.5 + f_3}} \geq 1.0$  (5.5.4)

: para  $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_m} > 1.5$

$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_m}$  = Relación entre la tensión máxima y la media en la cara de presión de la hélice. Puede calcularse aproximadamente a partir del factor de excitación del empuje  $E_T$  según la fórmula (4.2.5).

$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_m} = f_2 \cdot E_T + 1$

$f_2$  = 0.4 – 0.6 para buques de una sola hélice debiendo elegirse el valor más bajo para formas de popa con mucha luz para la hélice y sin zapata para el timón, y el valor más alto para formas de popa con poca luz para la hélice y con zapata para el timón.

= 0.2 para buques con 2 hélices.

$f_3$  = 0.2 para materiales de hélices que cumplan con las exigencias del ítem 4.1

$E_T = \frac{\delta K_T}{\delta_J} \cdot \frac{J}{K_T}$  (5.5.5)  
 $\approx 4.3 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{V_s \cdot n \cdot (1-w) \cdot D^3}{T}$

$K_T$  = Coeficiente de empuje.

$J$  = Grado de avance.

$V_s$  (kn) = Velocidad del buque.

$T(N)$  = Empuje de la hélice.

$w$  = Coeficiente de estela.

## **CAPÍTULO VI**

### **CARACTERÍSTICAS DE LA HÉLICE**

#### **6.1 – Características.**

Para la realización de las correlaciones de tensiones y deformaciones se ha tomado una hélice de las siguientes características, que serán la base para los cálculos posteriores.

- Diámetro : 838 mm
- Paso : 800 mm
- Número de palas : 4
- Área desarrollada : 0.39 m<sup>2</sup>
- Diámetro del eje : 70 mm
- Diámetro del núcleo : 124 mm
- Peso : 605 N
- Giro : derecho
- Ángulo de rake : 15°
- Material : Níquel – Aluminio – Bronce

#### **6.2 – Condiciones de operación.**

La condición de operación que será tomada como parámetro para los análisis es la siguiente.

- Numero de revoluciones : 1000 rpm
- Velocidad : 18.35 Kn
- Potencia absorbida a 1000 rpm : 425 DHp
- Torque entregado a 1000 rpm : 2835 N·m
- Empuje generado a 1000 rpm : 21700 N

#### **6.3 – Geometría de la hélice.**

La siguiente figura muestra el plano de la hélice y su geometría principal, la que será tomada como base para generar el modelo en elementos finitos para su posterior análisis de tensiones y deformaciones.

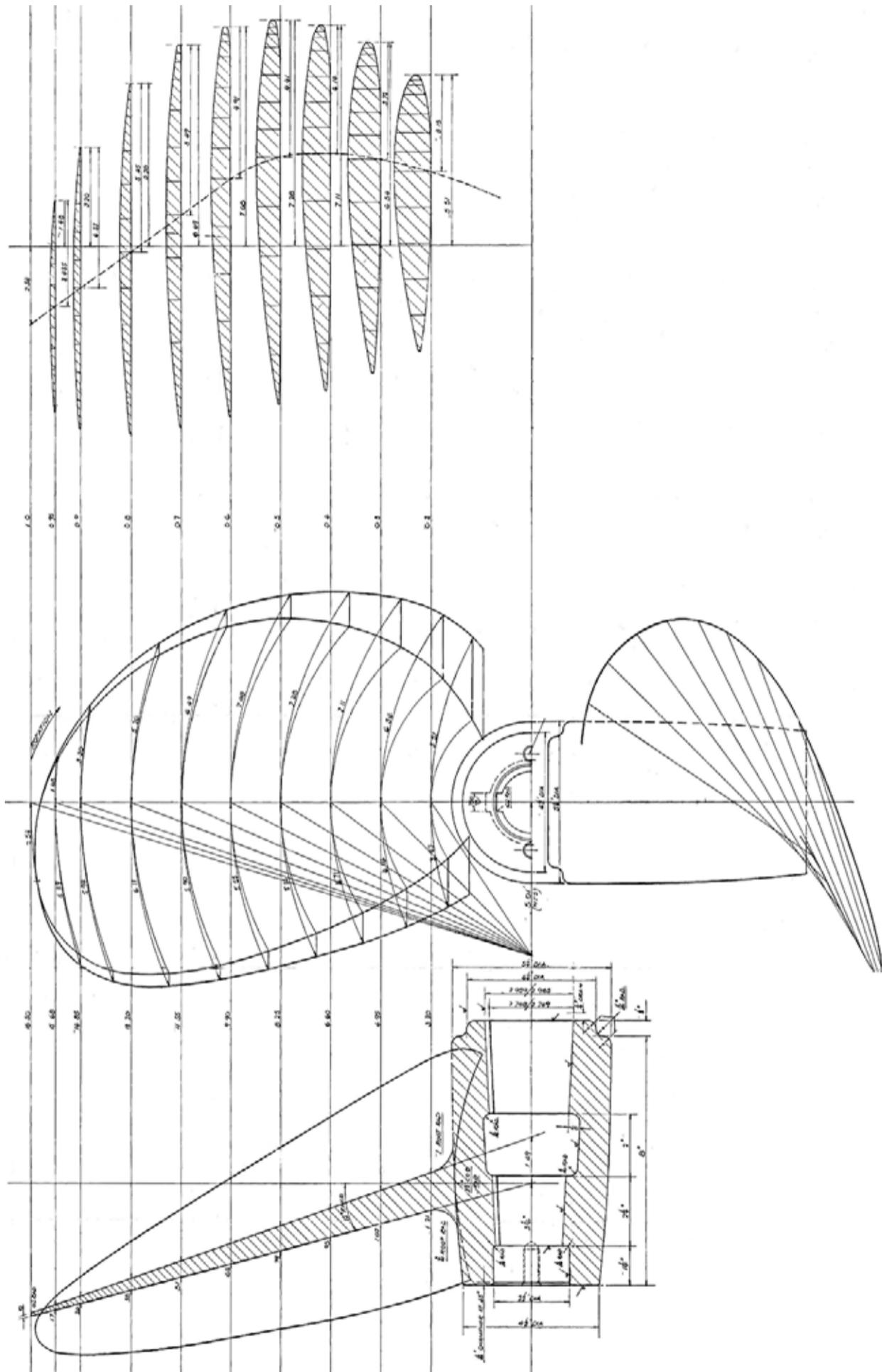


FIGURA 6.3.1 GEOMETRÍA DE LA HÉLICE.

## CAPÍTULO VII

### MODELADO DE LA HÉLICE

Debido a la complejidad de realizar un modelo en un software de elementos finitos, ocuparemos la opción que nos entrega la versión Algor 17 de importar el modelo como archivo *Rhino 3D Model*, en otras palabras usaremos el programa Rhinoceros para generar las formas de la hélice como superficies y luego las importaremos en Algor ya que este programa nos da la alternativa de generar un mallado automático de la geometría como un sólido. Esta forma de generar un mallado con elementos tridimensionales, simplifica enormemente dicha tarea, reduciendo el tiempo total de obtener un mallado sólido a sólo una fracción, pues las formas de la hélice se harán en un software diseñado para modelar geometrías complejas.

#### 7.1 – Perfil de la cara de presión y núcleo.

Para obtener las formas debemos tener una versión digital del plano de la hélice a modelar, de esta manera se importa la imagen en AutoCAD y se dibuja una línea tipo *spline* cerrada sobre el perfil proyectado de la pala en la vista frontal y del núcleo en la vista lateral, sólo se deben guardar los perfiles en formato \*.dxf según la escala que corresponda como en la figura 7.1.1

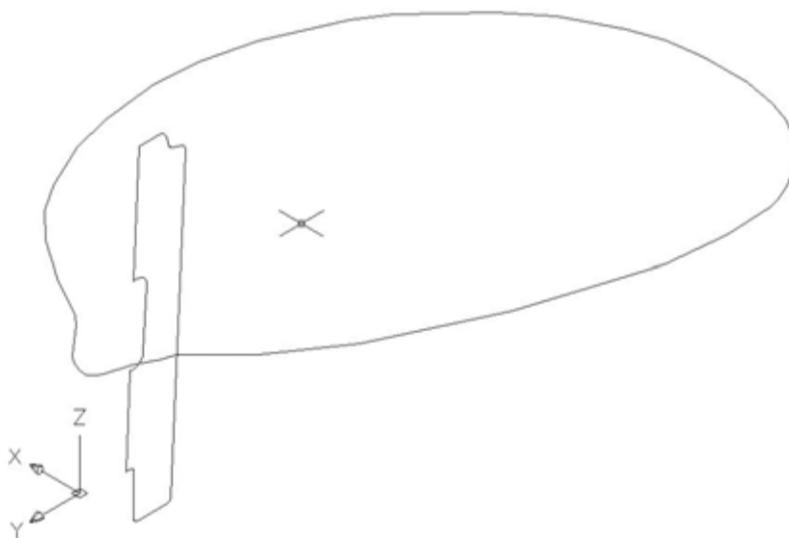


FIGURA 7.1.1 PERFIL PROYECTADO DE LA PALA Y NÚCLEO

Una vez dibujados los perfiles los importamos en Rhino y los ubicamos en una capa adecuada para diferenciar las distintas partes de la geometría.

## **7.2 – Superficie helicoidal en la cara de presión.**

Para esta primera superficie hay que dibujar una línea vertical (*curve/line/single line*) con centro en el origen y una longitud igual a la mitad del paso que usaremos como eje para la curva helicoidal (*curve/helix*) para la cual definimos que sólo de medio giro (*Turns=0.5*) en el cuadro de dialogo superior. El radio no es necesario especificarlo pero debe ser superior al de la hélice. Para aquellas hélices de paso radialmente variable se hacen dos curvas helicoidales, una en la raíz de la pala y otra en el borde ambas con su correspondiente paso.

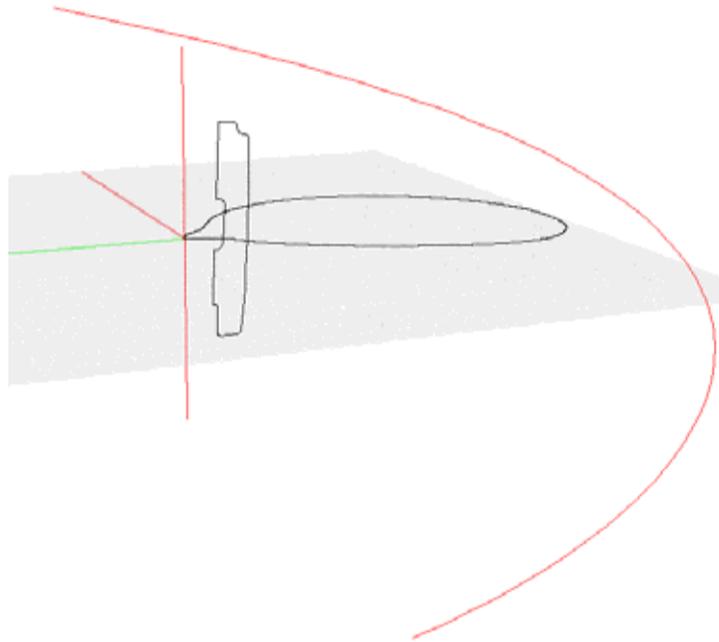


FIGURA 7.2.1 CURVA HELICOIDAL

Para hélices con ángulo de rake se rota la curva externa en torno al origen, en este caso la inclinación es de  $15^\circ$  (*transform/rotate 3D*).

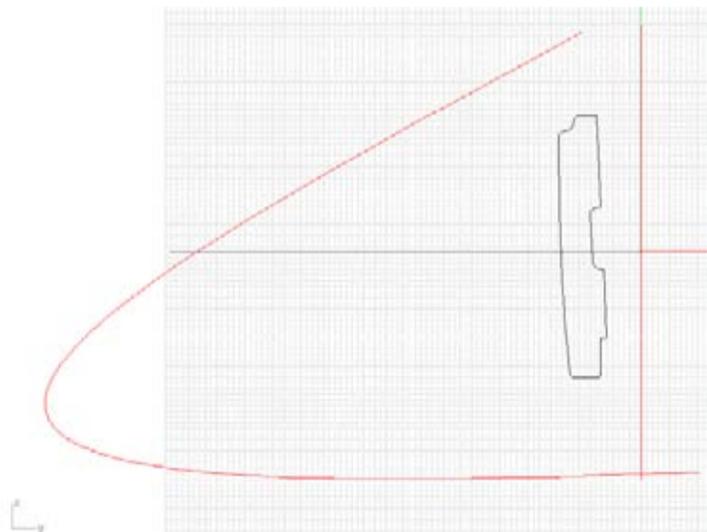


FIGURA 7.2.2 ROTACIÓN DE LA HELICOIDE

Posterior a esto se genera la superficie helicoidal (*surface/loft* ó *surface/edge curves*) seleccionando ambas curvas.

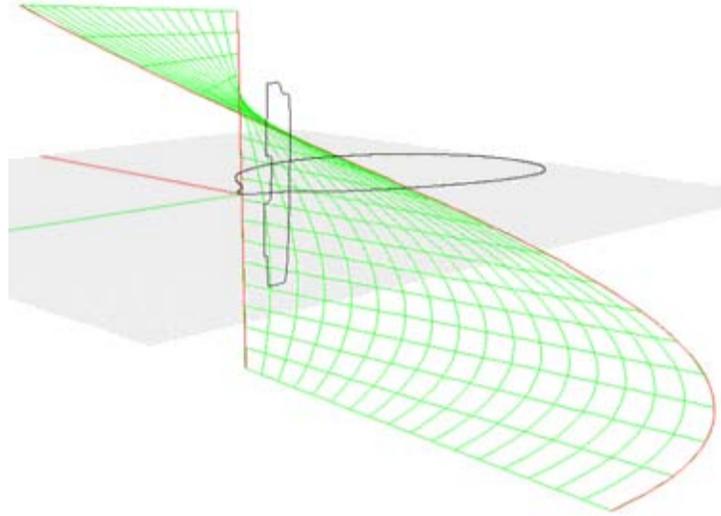


FIGURA 7.2.3 SUPERFICIE HELICOIDAL

En la vista superior dibujar un círculo de menor diámetro que el núcleo para cortar la parte central de esta superficie (*edit/trim*), luego proyectar la curva del perfil de la pala sobre la superficie (*curve/curve from objects/project*) seleccionando la curva y luego la superficie.

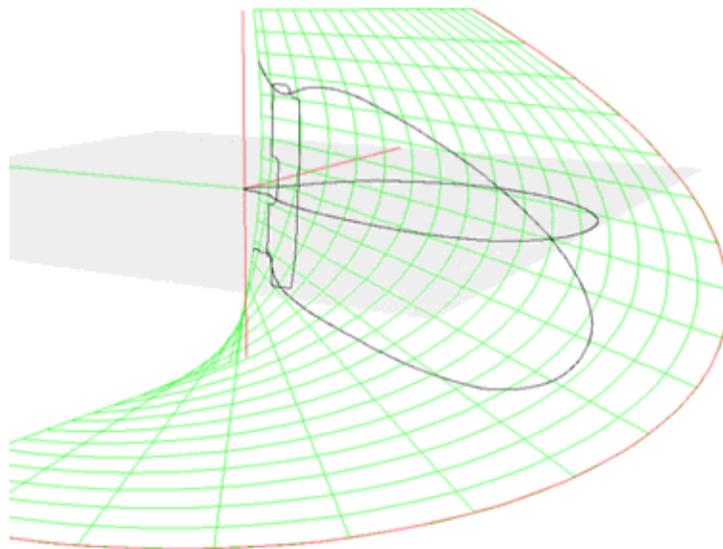


FIGURA 7.2.4 PROYECCIÓN DE LA CURVA EN LA SUPERFICIE

Ahora cortaremos la superficie con la proyección de la curva de la pala (*edit/trim*), y después haremos un sólido de revolución (*surface/revolve*) con el perfil del núcleo para cortar el resto de la superficie que queda dentro del núcleo (*edit/trim*). Con esto ya tenemos la primera parte de la geometría.

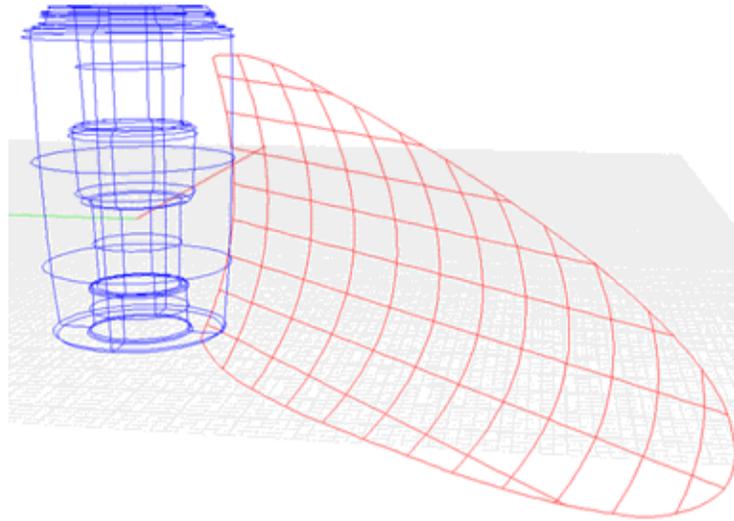


FIGURA 7.2.5 CARA DE PRESIÓN Y NÚCLEO

### 7.3 – Cara de succión.

Por la curvatura de esta superficie para crear el efecto de succión por la diferencia de velocidad del flujo con la cara de presión, tomamos los perfiles hidrodinámicos desarrollados desde el plano de la hélice y dibujamos sobre ellos las distintas curvas tipo *spline* que definen la forma de esta cara en el sentido radial, de la misma forma que se hizo con el perfil del núcleo y la cara de presión en la pala, pero haciendo cuatro curvas por perfil, una de presión, otra de succión y dos para la unión de ambas caras en el borde de ataque y de salida.

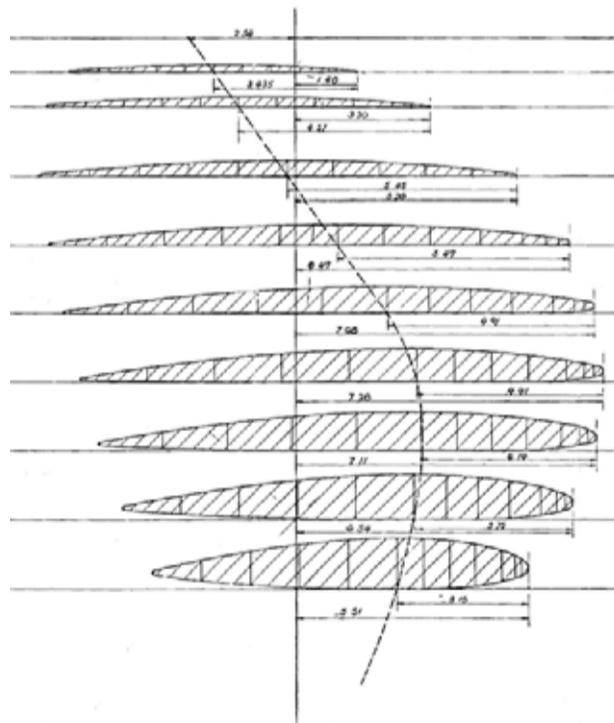


FIGURA 7.3.1 PERFILES DESARROLLADOS DE LA PALA

Se debe mantener un punto de referencia para no hacer una geometría errónea, esto se puede crear dibujando además la línea vertical de la figura 7.3.1 que llega hasta el centro del núcleo el cual se ha tomado como el origen de coordenadas.

Una vez dibujados los perfiles se rotan en  $90^\circ$  respecto de su base para superponerlos en la cara de presión.

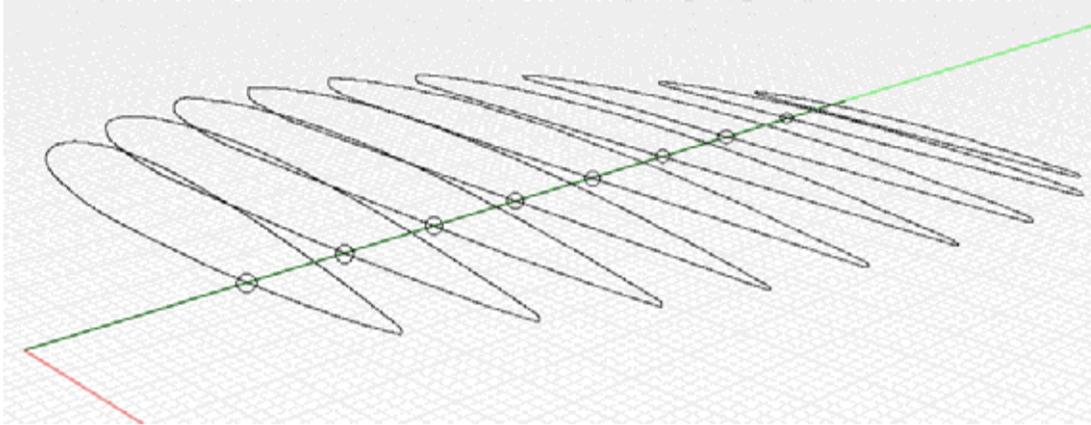


FIGURA 7.3.2 PERFILES HIDRODINÁMICOS ROTADOS  $90^\circ$

Como estos perfiles fueron rotados y desarrollados para dibujarlos en el plano debemos seguir con el proceso inverso, doblándolos (*transform/bend*) según el radio de curvatura que se obtiene de la figura 6.3.1 (*geometría de la hélice*). Una forma es determinando este radio directamente desde el plano si tiene esta información, o dibujando en AutoCAD sobre la imagen un arco de círculo entre dos puntos y midiendo luego el radio de curvatura.

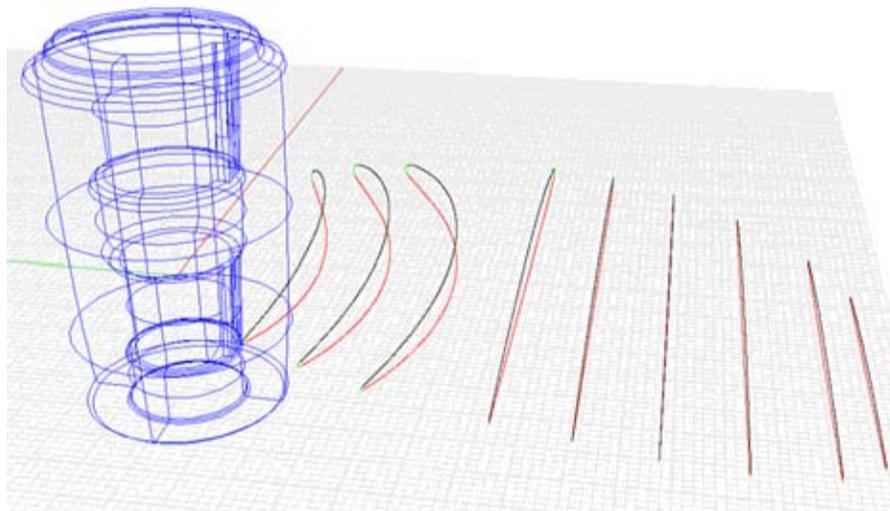


FIGURA 7.3.3 DOBLADO DE LOS PERFILES.

Luego se proyecta la línea vertical de la figura 7.3.1 sobre la superficie de la cara de presión (*curve/curve from objects/project*) para generar un punto de intersección entre esta cara y los perfiles inferiores de la figura anterior para bajarlos, en forma ortogonal debido al ángulo de rake, desde el punto encerrado en un círculo en la figura 7.3.2 hasta la línea proyectada en la superficie. Ya que los perfiles son perpendiculares a la superficie se rotan nuevamente en  $15^\circ$  pero respecto del punto de intersección entre el perfil y la línea proyectada en la superficie.

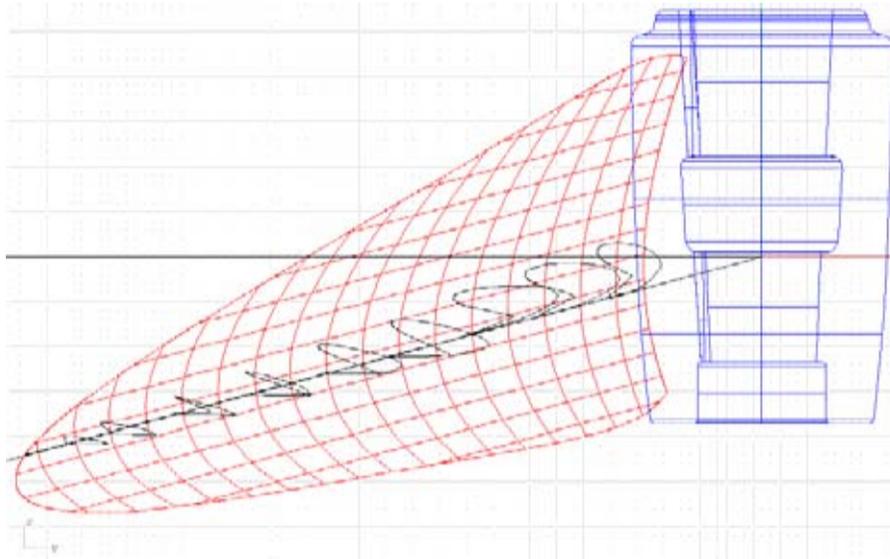


FIGURA 7.3.4 LOS 3 PRIMEROS PERFILES HAN SIDO ROTADOS PARA QUEDAR PERPENDICULARES A LA SUPERFICIE.

Con los perfiles perpendiculares a la superficie, nuevamente se rotan respecto del punto de intersección anterior hasta el ángulo correspondiente al paso en ese radio que se puede medir directamente del plano.

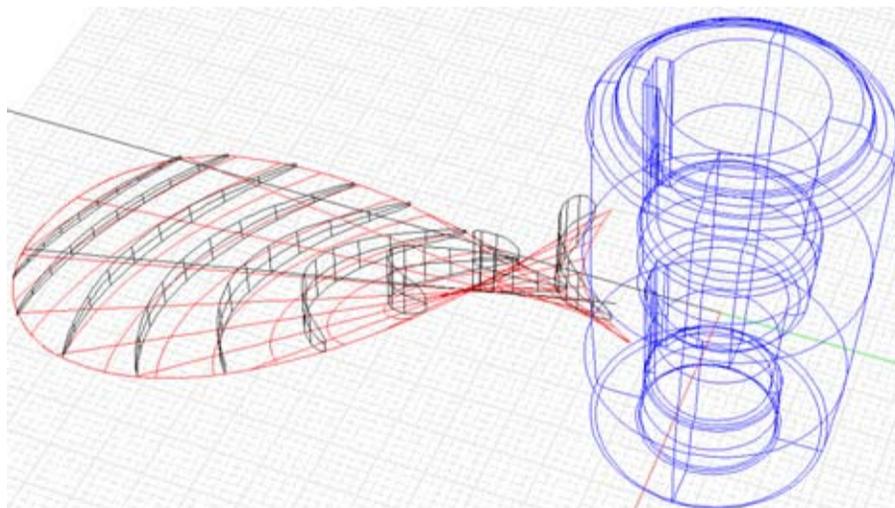


FIGURA 7.3.5 PERFILES UBICADOS EN SU POSICIÓN ORIGINAL.

Para obtener la superficie de la cara de succión se crean superficies (*surface/loft* ó *surface/edge curves*) entre las líneas de los perfiles superiores. Para el borde más alejado de la pala usamos una parte de la curva proyectada de la figura 7.2.4 de aproximadamente la mitad de la cuerda del perfil más alejado, subiéndola ortogonalmente de acuerdo al espesor de la pala en el borde para generar la última parte de la superficie entre este segmento y la curva superior del perfil más pequeño. Las superficies creadas se pueden unir (*surface/surface edit tool/merge*) para crear una sola superficie, también se puede suavizar la unión entre ellas (*surface/surface edit tool/match*) para una curvatura más suave entre los bordes de unión.

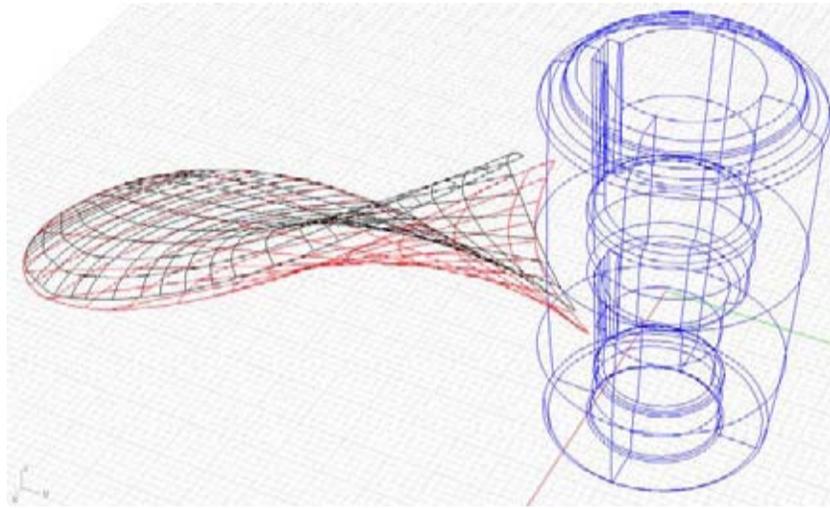


FIGURA 7.3.6 CARA DE SUCCIÓN Y PRESIÓN.

Después se extiende el eje de la superficie más cercana a la raíz (*surface/extend surface*) hasta intersectarla con el núcleo, luego se corta esta usando como borde el núcleo. Ya que la cara de succión fue hecha sólo con la parte superior del perfil hidrodinámico, por último unimos ambas superficies (*surface/blend surface*) seleccionando los ejes de cada una de las superficies.

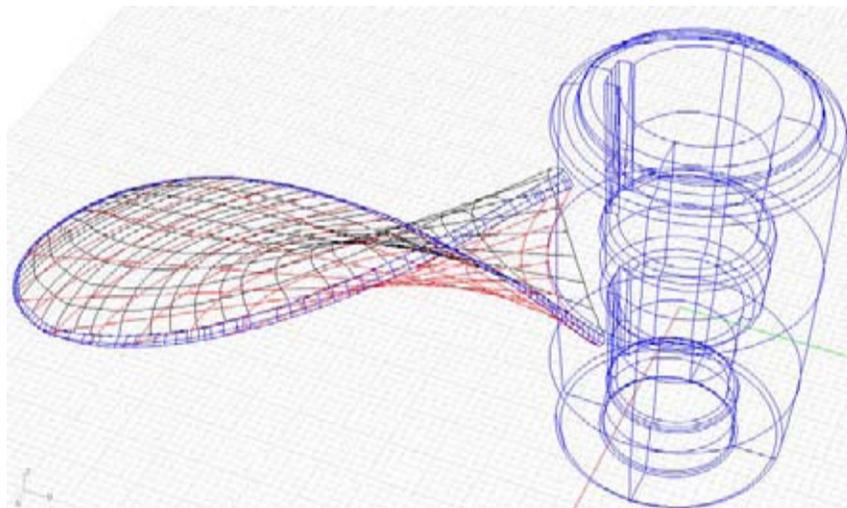


FIGURA 7.3.7 PALA Y NÚCLEO

#### **7.4 – Unión pala - núcleo.**

La última etapa en la generación de geometría es el radio de unión entre la pala y el núcleo usando la misma opción que para unir las caras de presión y succión, para ello proyectamos los ejes de curvatura en la raíz de la pala (*curve/curve from objects/pullback*) sobre el núcleo.

Cortamos la pala de acuerdo al radio de curvatura en la raíz, una forma es escalar el núcleo (*transform/scale/scale 3-D*), usarlo como eje de corte y luego volverlo a su tamaño original. La curva proyectada en el núcleo también se debe escalar según el radio de la raíz hasta la forma adecuada (*transform/scale/scale 3-D, 2-D, 1-D*). Luego proyectamos la curva una distancia apropiada (*solid/extrude solid/srtaight*) generando un sólido de manera que intersecte al núcleo y hacemos un arreglo con este sólido (*transform/array/polar*) para hacer las cuatro perforaciones (*edit/trim*).

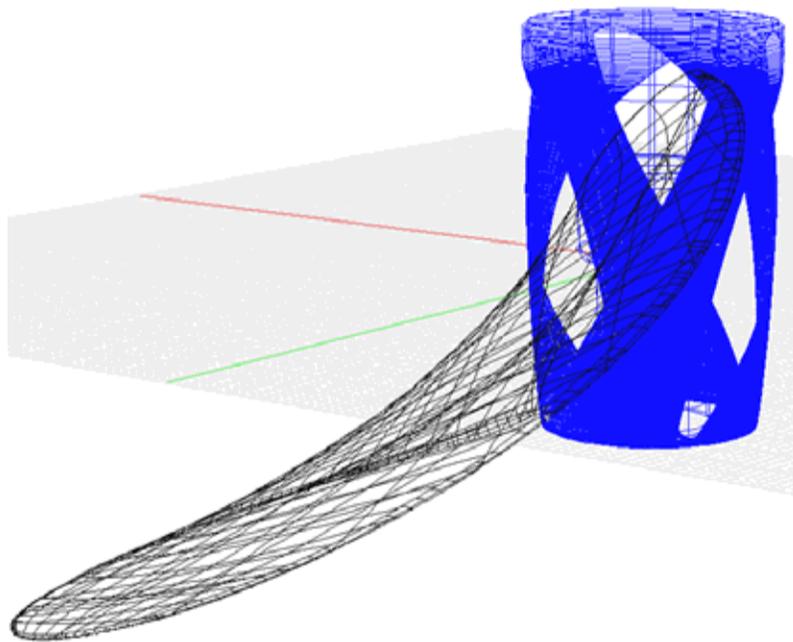


FIGURA 7.4.1 PERFORACIONES AL NÚCLEO

Se une la pala y el núcleo (*surface/blend surface*) y se hace un arreglo para obtener las cuatro palas unidas al núcleo con un radio de curvatura.

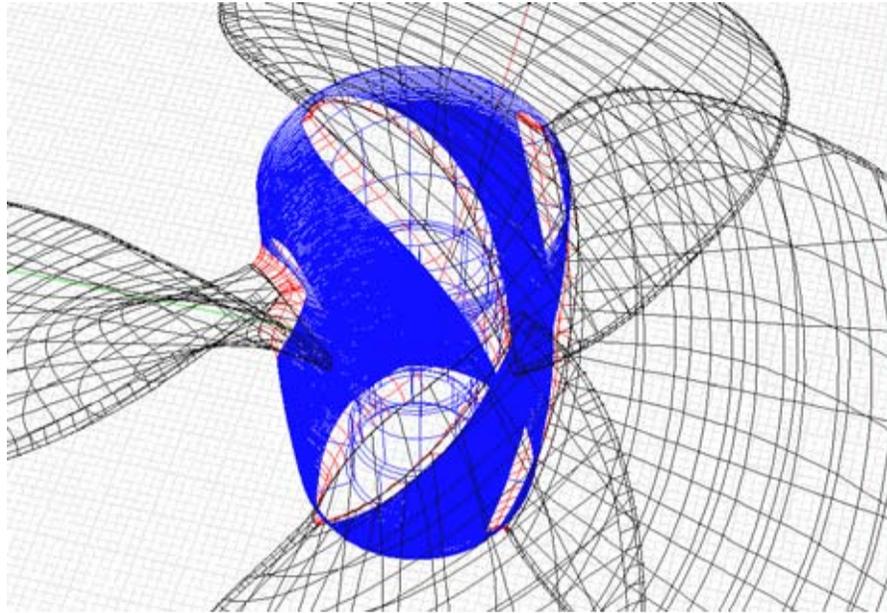


FIGURA 7.4.2 UNIÓN DE PALAS Y NUCLEO.

Uniando las superficies (*surface/surface edit tool/merge*) y los ejes de las superficies (*analyse/edge tools/join 2 naked edges*) se consigue tener toda la hélice como una sola polisuperficie con una suave curvatura.

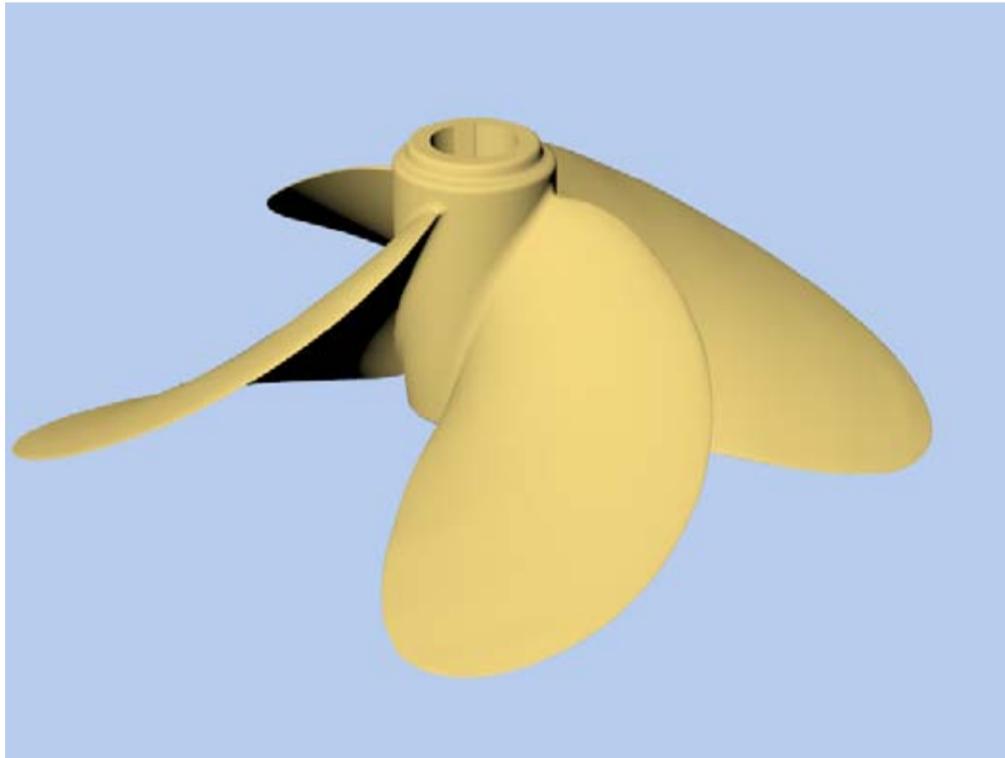


FIGURA 7.4.3 HÉLICE FINAL

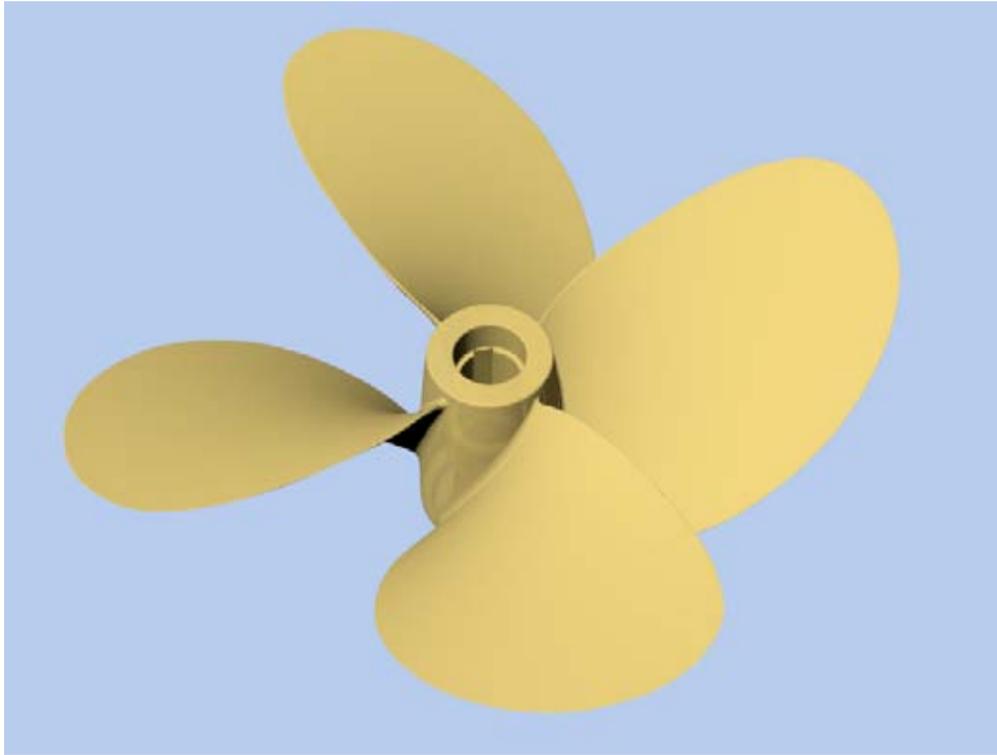


FIGURA 7.4.4 VISTA POSTERIOR DE LA HÉLICE

### **7.5 – Mallado en Algor.**

Una vez terminado el modelo lo único que queda es importarlo desde Algor FEMPRO (*file/open*) en la opción *tipo* se cambia a *Rhinoceros 3D Files (\*.3dm)*, se elige el tipo de análisis a realizar y en el siguiente cuadro de dialogo (*model mesh settings*) se hacen los cambios necesarios para generar un mallado optimo según las necesidades que se tengan, algunas de las opciones de mallado son:

- Mesh Type:
  - Solid
  - Midplane
  - Shell / Plate
  
- Mesh Size
  - Coarse
  - Fine (desplazar hacia esta opción según requerimientos)

Options ...

- Surface
  - General
  - Options
    - Edge curve refinement (\*\*)
- Solid
  - General
    - Bricks and tetrahedra
    - All tetrahedra
    - All bricks
  - Quality
    - Maximum aspect ratio  
Automatic enforcement (desplazar hacia smaller)
  - Options
  - Advanced
- Model

En (\*\*) dejar la opción que viene por defecto, en caso que no malle como un sólido cambiar la opción a “*none*”. Las distintas opciones nos permiten crear una variedad de mallados, sólo se han nombrado las que se modificaron y las más relevantes, las demás están explicadas en la ayuda del software.

Con las opciones ajustadas a nuestros requerimientos, se presiona el botón “*mesh model*” y el programa realizará el mallado automático de la hélice como se muestra en las siguientes imágenes.

Para evitar un mallado más complejo se simplificó el núcleo manteniendo sus dimensiones principales pero modificando su geometría a una forma más sencilla que no afecte los resultados estructurales que se realizarán.

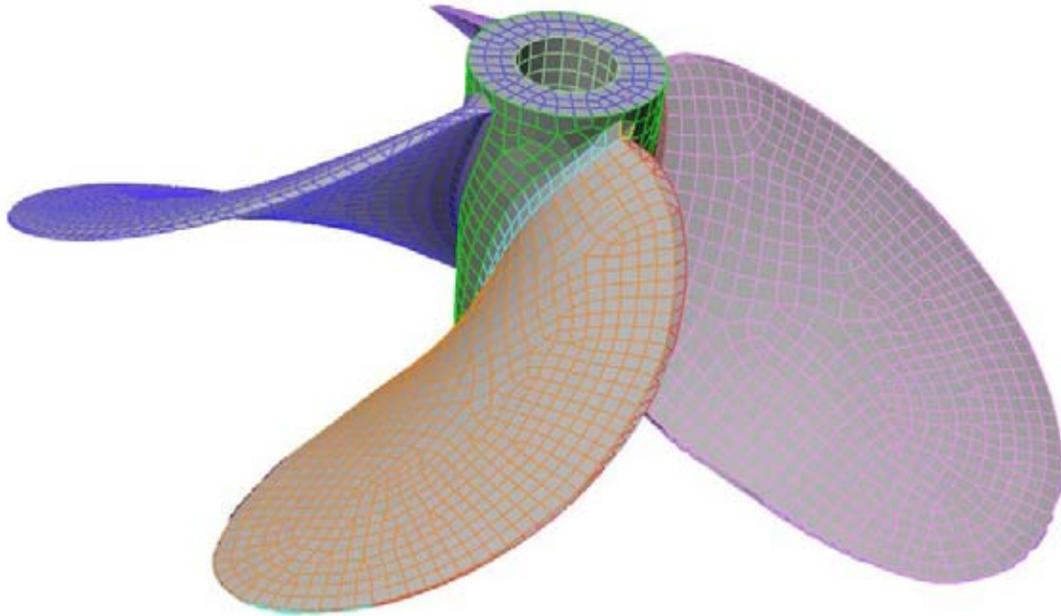


FIGURA 7.5.1 MALLADO DE LA HÉLICE.

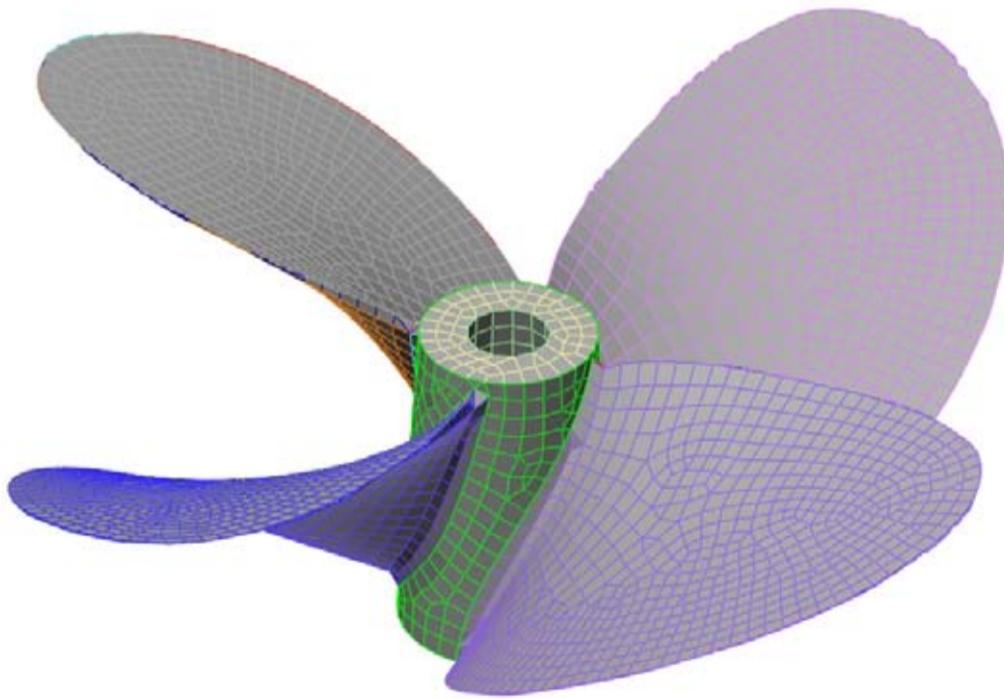


FIGURA 7.5.2 VISTA POSTERIOR DEL MALLADO

## CAPÍTULO VIII

### ESTIMACIÓN DE CARGAS Y CONDICIÓN DE CONTORNO

#### 8.1 – Generalidades.

La definición de cargas para análisis estructurales en palas de hélices, tales como FEA (finite element analysis), debiera ser construido a partir de una distribución de fuerzas y presiones. Sin embargo, una verdadera distribución de ese tipo de cargas es muy difícil de resolver y generalmente requiere un análisis de CFD (computational fluid dynamics) para saber su magnitud y ubicación precisa. A continuación se entrega un modelo simple para la estimación de fuerzas propulsivas que son apropiadas para un análisis estructural en elementos finitos.

Las suposiciones del modelo simplificado son estas:

- a) Las fuerzas pueden ser modeladas más bien por un conjunto de cargas puntuales que por una distribución de presiones.
- b) Las magnitudes de esas cargas puntuales pueden ser estimadas usando una distribución representativa para hélices libres (sin tobera).

La siguiente imagen muestra como las tres fuerzas principales, empuje – torque – centrífuga, son aplicadas como cargas puntuales actuando en un segmento radial de la pala.

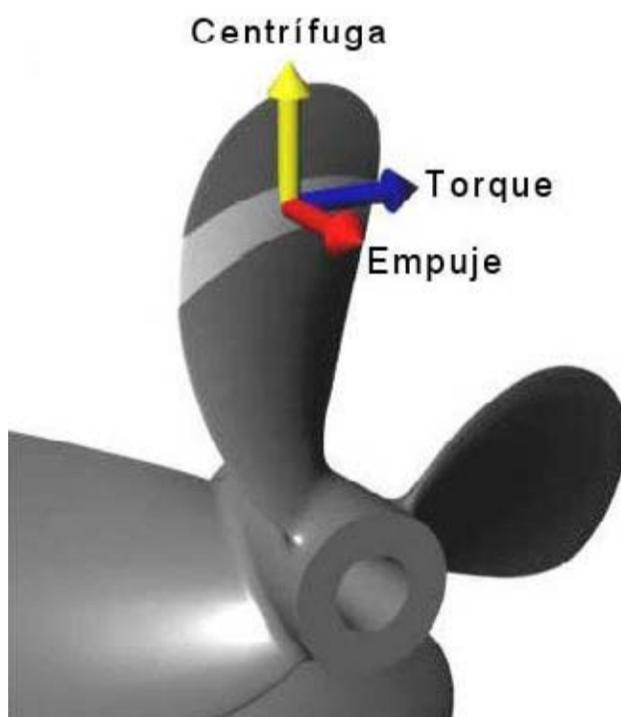


FIGURA 8.1.1 DIAGRAMA DE FUERZAS.

## **8.2 – Fuerzas por empuje y torque.**

El empuje y torque es desarrollado a partir de las fuerzas de sustentación y arrastre locales en las secciones laminares de la pala definidas por su posición radial. En otras palabras, el empuje total de la hélice será la integración de los vectores axiales de sustentación para cada sección desde la raíz hasta el borde.

La influencia de cualquier sección particular depende del largo de su cuerda y posición radial. La velocidad de cualquier sección que rota es por supuesto función de la posición radial, ya que el borde viaja más rápido que la raíz debido a su mayor brazo radial. Sin embargo, en propulsores como el de la figura 8.1.1 que tienen un largo de cuerda nominal cero en el borde, implica que la sección del borde casi no tiene efecto sobre el empuje y el torque. (Esto es porque los diseñadores de propulsores usan un radio medio entre 0.70 a 0.75, como el diseño nominal de la figura. La combinación de grandes cuerdas y altos radios entrega una posición predominante).

### Una distribución asumida.

Si asumimos que la mayoría de los propulsores libres comparte una geometría similar en la pala, tales como la Serie B o de Gawn por ejemplo, podemos usar un modelo simple de distribución para las cargas de empuje y torque. (Este modelo no es apropiado para las hélices del tipo Kaplan con bordes de pala muy anchos, o para geometrías totalmente distintas a las antes descritas). Este modelo también asume que la distribución del paso es constante.

Una apropiada distribución de carga para hélices con estas condiciones puede ser encontrada en la publicación *“Formulation of Propeller Blade Strength”* de K.E. Schoenherr de abril de 1963. Esta distribución entrega una fuerza por unidad radial de distancia versus posición radial.

Actualmente se han convertido esas distribuciones en expresiones numéricas para una fuerza de empuje axial  $F_T$  y una fuerza por torque horizontal  $F_Q$  para una sección definida por dos coordenadas radiales, por ejemplo 0.7 a 0.8 como la mostrada en la figura 8.1.1.

$$F_{T(x_1, a x_2)} = 3.5 \cdot R \cdot k_T \cdot [a_T(x_2) - a_T(x_1)] \quad (8.2.1)$$

$$F_{Q(x_1, a x_2)} = 3.5 \cdot R \cdot k_Q \cdot [a_Q(x_2) - a_Q(x_1)] \quad (8.2.2)$$

Donde:

$R$  = radio de la hélice.

$$k_T = \frac{T}{(z \cdot R \cdot c_H)} \quad (8.2.3)$$

$$k_Q = \frac{T}{(z \cdot R^2 \cdot c_H)} \quad (8.2.4)$$

$x_2$  = coordenada radial externa (en ejemplo 0.8)

$x_1$  = coordenada radial interna (en ejemplo 0.7)

$a_T(x)$  = expresión de integración de empuje en  $x$ .

$$a_T(x) = \left(-\frac{2}{105}\right) \cdot (8 + 4x + 3x^2 - 15x^3) \cdot \sqrt{(1-x)} \quad (8.2.5)$$

$a_Q(x)$  = expresión de integración de torque en  $x$ .

$$a_Q(x) = \left(-\frac{2}{15}\right) \cdot (2 + x + 3x^2) \cdot \sqrt{(1-x)} \quad (8.2.6)$$

Y además:

$T$  = empuje de la hélice.

$Q$  = torque de la hélice.

$z$  = número de palas.

$c_H$  = expresión de integración del eje al borde.

$$c_H = \left(\frac{1}{15}\right) \cdot (8 + 4x_H + 3x_H^2 - 15x_H^3) \cdot \sqrt{(1-x)} \quad (8.2.7)$$

$x_H$  = posición radial del borde del núcleo (por ejemplo 0.2)

Ejemplo ilustrativo:

Para una hélice con 510 mm de diámetro, podemos calcular los valores de la fuerza por empuje y torque para una franja radial entre 0.70 y 0.80 como la mostrada en la figura 7.1.1, dada por lo siguiente:

$$\begin{aligned} T &= 8000 && \text{(N)} \\ Q &= 675 && \text{(N}\cdot\text{m)} \\ R &= 0.255 && \text{(m)} \\ x_H &= 0.20 && \text{(Para un núcleo de radio } r=51 \text{ mm)} \\ z &= 4 && \text{(Palas)} \end{aligned}$$

Reemplazando en las expresiones:

$$\begin{aligned} c_H &= 0.525 \\ k_T &= 14947 && \text{(N/m)} \\ k_Q &= 4946 && \text{(N/m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_T(0.8) &= -0.04634 && a_Q(0.8) &= -0.05247 \\ a_T(0.7) &= -0.07433 && a_Q(0.7) &= -0.08983 \\ \mathbf{F_{T(0.7 \text{ a } 0.8)}} &= \mathbf{373.44 \text{ (N)}} && \mathbf{F_{Q(0.7 \text{ a } 0.8)}} &= \mathbf{164.88 \text{ (N)}} \end{aligned}$$

La tercera fuerza a considerar para la franja es la fuerza centrífuga que ya se explicó en la sección 5.3

### **8.3 – Ubicación y vector de dirección de las fuerzas puntuales.**

- Las fuerzas de empuje son siempre axiales en su dirección, siguiendo al eje de propulsión.
- La fuerza por torque es tangente al arco del radio y opuesta al sentido de rotación.
- La fuerza centrífuga es normal al eje de rotación.

Las fuerzas puntuales estimadas deben ser ubicadas en las siguientes posiciones:

- En la cuerda media entre el borde de ataque y el borde de salida.
- En la mitad de la franja, en el ejemplo 0.75 para la franja desde 0.70 a 0.80.
- Sobre la línea generatriz del paso en la cara de presión.

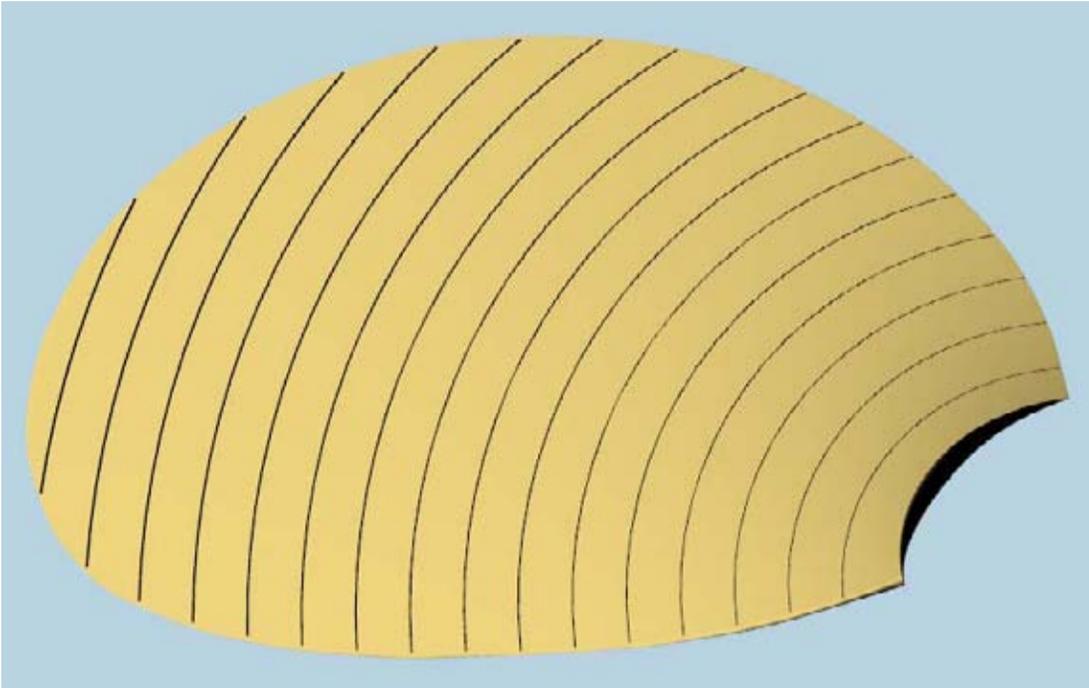
Para hélices sin ángulo de skew, los vectores de fuerza están en las direcciones X–Y–Z reales. Para hélices con un pequeño ángulo de skew, el efecto coseno será pequeño, entonces es razonable abandonar la corrección de ello y simplemente usar las direcciones X–Y–Z para la normal y tangente.

### **8.4 – Cálculo de las cargas a aplicar al modelo.**

Para este caso sólo se determinarán las cargas por empuje y torque ya que la fuerza centrífuga se puede aplicar como una condición de carga en el análisis por elementos finitos en Algor.

Dadas las características de la hélice descritas en el Capítulo VI, se considerará un espesor de franja de 0.05R partiendo desde 0.20R hasta 1.00R (figura 8.5.1), por tanto los datos de entrada son los siguientes.

$T$	=	21700	(N)
$Q$	=	2835	(N·m)
$R$	=	0.419	(m)
$x_H$	=	0.148	(Para un núcleo de radio $r=0.0619$ m)
$z$	=	4	(Palas)

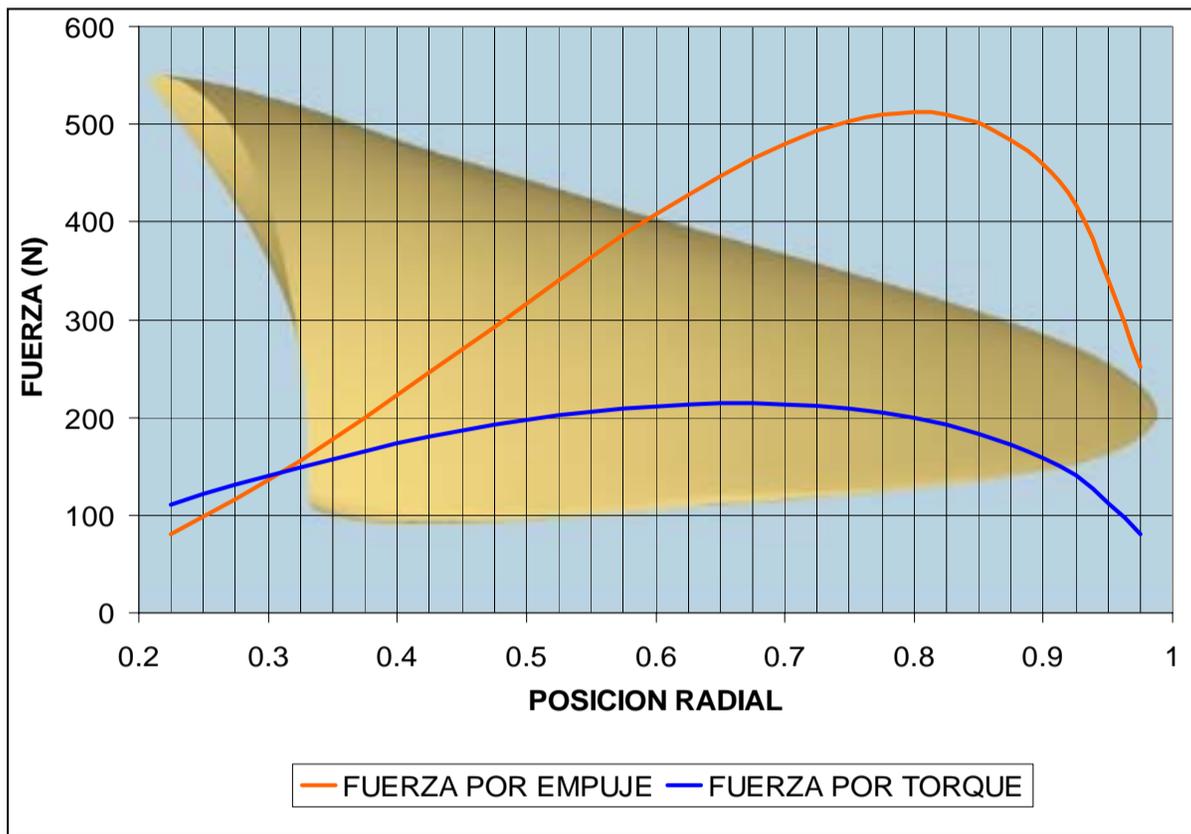


*FIGURA 8.5.1 DIVISIÓN DE LA PALA EN FRANJAS DE 21 mm*

Los resultados obtenidos para cada franja se entregan en la siguiente tabla.

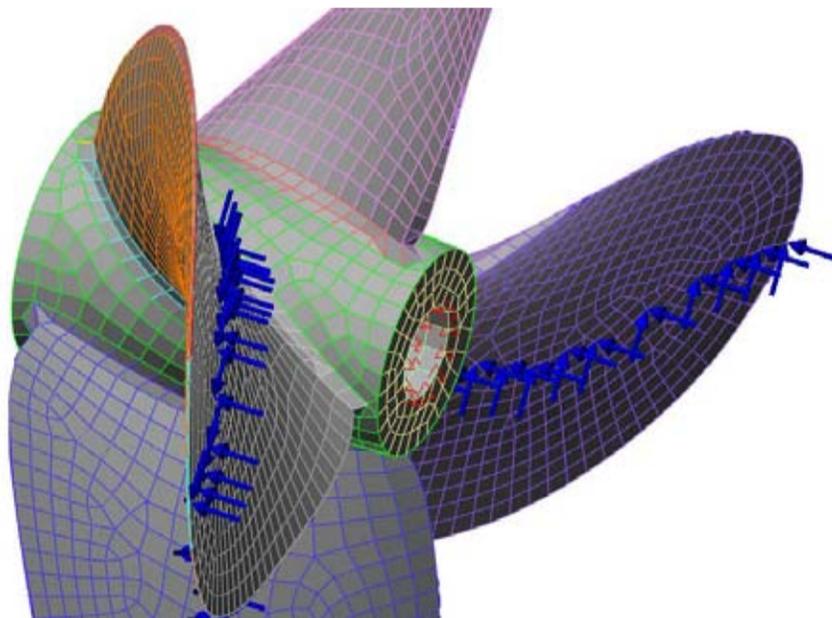
POSICIÓN (m)	POSICIÓN (r/R)	FUERZA POR EMPUJE (N)	FUERZA POR TORQUE (N)
0.094	0.225	80.10	110.58
0.115	0.275	115.60	130.74
0.136	0.325	155.66	149.08
0.157	0.375	199.33	165.52
0.178	0.425	245.50	179.94
0.199	0.475	292.96	192.16
0.220	0.525	340.35	202.02
0.241	0.575	386.12	209.28
0.262	0.625	428.44	213.68
0.283	0.675	465.13	214.82
0.304	0.725	493.47	212.20
0.325	0.775	509.86	205.14
0.346	0.825	509.22	192.50
0.367	0.875	483.48	172.36
0.388	0.925	416.76	140.62
0.409	0.975	251.40	80.78

Los resultados anteriores se han graficado en este diagrama que muestra la distribución de las cargas en el sentido radial de la pala.



*GRAFICO 8.5.1 DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS POR EMPUJE Y TORQUE.*

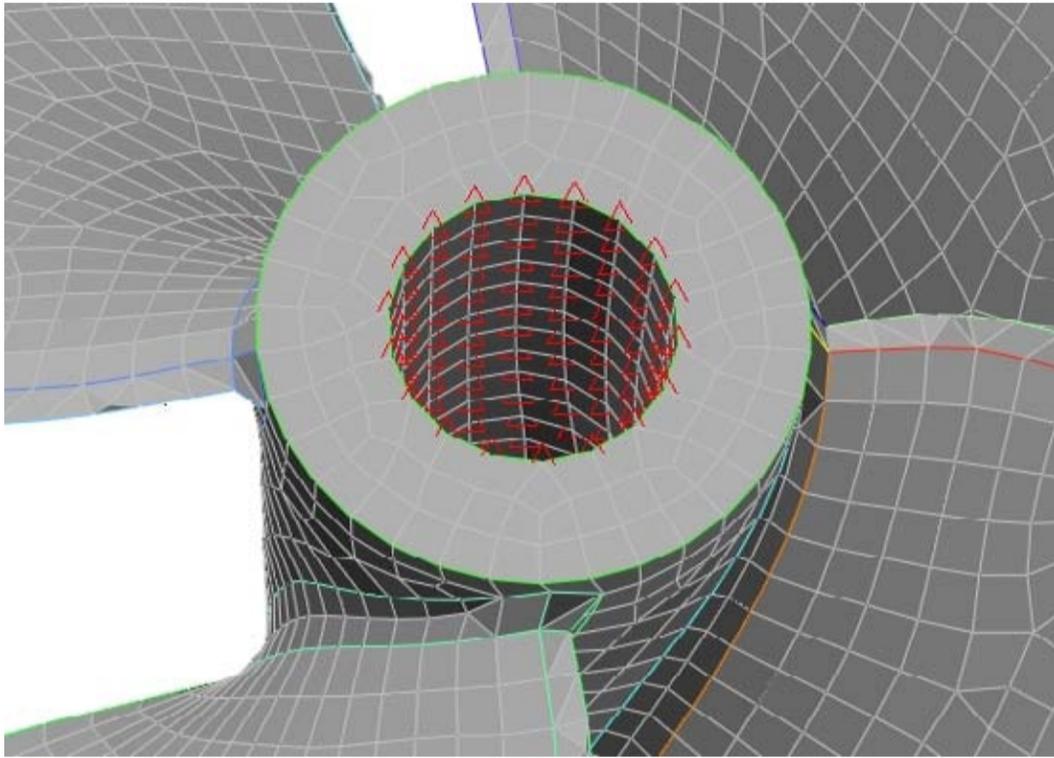
El resultado de las fuerzas calculadas anteriormente se aplicó al modelo de elementos finitos como cargas puntuales en nodos de acuerdo a la ubicación exigida por el modelo simplificado como se muestra en la figura.



*FIGURA 8.5.2 UBICACIÓN DE LAS CARGAS EN LA PALA.*

### **8.5 – Condición de contorno.**

Para el análisis de tensiones y deformaciones en la pala, de acuerdo a las condiciones de operación de la hélice, restringiremos las rotaciones y traslaciones de toda la superficie interior del núcleo que está en contacto directo con el eje propulsor. Esta condición será tomada en cada uno de los análisis para los distintos materiales a considerar. Lo anterior se muestra en la figura siguiente, a través de los triángulos que representan esta situación en el software.



*FIGURA 8.6.1 CONDICIÓN DE CONTORNO.*

## CAPÍTULO IX

### CÁLCULO ESTRUCTURAL CON DISTINTOS MATERIALES

Ahora que ya está mallado el modelo, definidas las cargas y condición de contorno, podemos realizar los cálculos de tensión y deformación usando distintos materiales cuyas propiedades físicas y mecánicas son entregadas en cada caso. Para los resultados de tensión ocuparemos el criterio de falla de Von Mises en todos los materiales ya que las propiedades de los compuestos son de una combinación monolítica isotrópica y las deformaciones son de acuerdo a la teoría de la elasticidad ya que con las cargas que se aplican no se llega al régimen plástico de los materiales a estudiar.

#### 9.1 – Níquel - Aluminio - Bronce (NAB)

Esta aleación no se encuentra en la librería de materiales de Algor, y se harán los cálculos ya que la hélice modelada es de este material ingresando las propiedades al programa al editar las características por unas definidas por el usuario.

- Propiedades físicas:

- Densidad (a 20° C) : 7.53 (Ton/m<sup>3</sup>)

- Propiedades mecánicas:

- Límite de fluencia a la tensión : 240 (MPa)
  - Límite de ruptura a la tensión : 554 (MPa)
  - Módulo de elasticidad : 115 (GPa)
  - Relación de Poisson : 0.328
  - Resistencia a la fatiga (10<sup>8</sup> ciclos alternos) : 255 (MPa)
  - Módulo de corte : 44 (GPa)
  - Resistencia a la compresión : 1030 (MPa)

- Componentes: (%)
  - Aluminio : 7.0 – 8.5
  - Cobre : 71 – 78
  - Níquel : 1.5 – 3.0
  - Hierro : 2.0 – 4.0
  - Manganeso : 10 – 14
  - Otros : 0.50 (máx.)

Los resultados se han dividido en tres partes, la primera es sólo aplicando la fuerza centrífuga, la segunda es aplicando sólo las fuerzas calculadas en el Capítulo VIII, y la última es aplicando las dos condiciones anteriores al mismo tiempo. Los resultados para los valores máximos obtenidos en cada caso son los siguientes:

		Tensión de Von Mises (MPa)	Desplazamiento máximo (mm)
Condición I	$(F_C)$	31.4	0.8
Condición II	$(F_Q+F_T)$	53.9	1.6
<b>Condición III</b>	<b><math>(F_Q+F_T+F_C)</math></b>	<b>85.0</b>	<b>2.5</b>

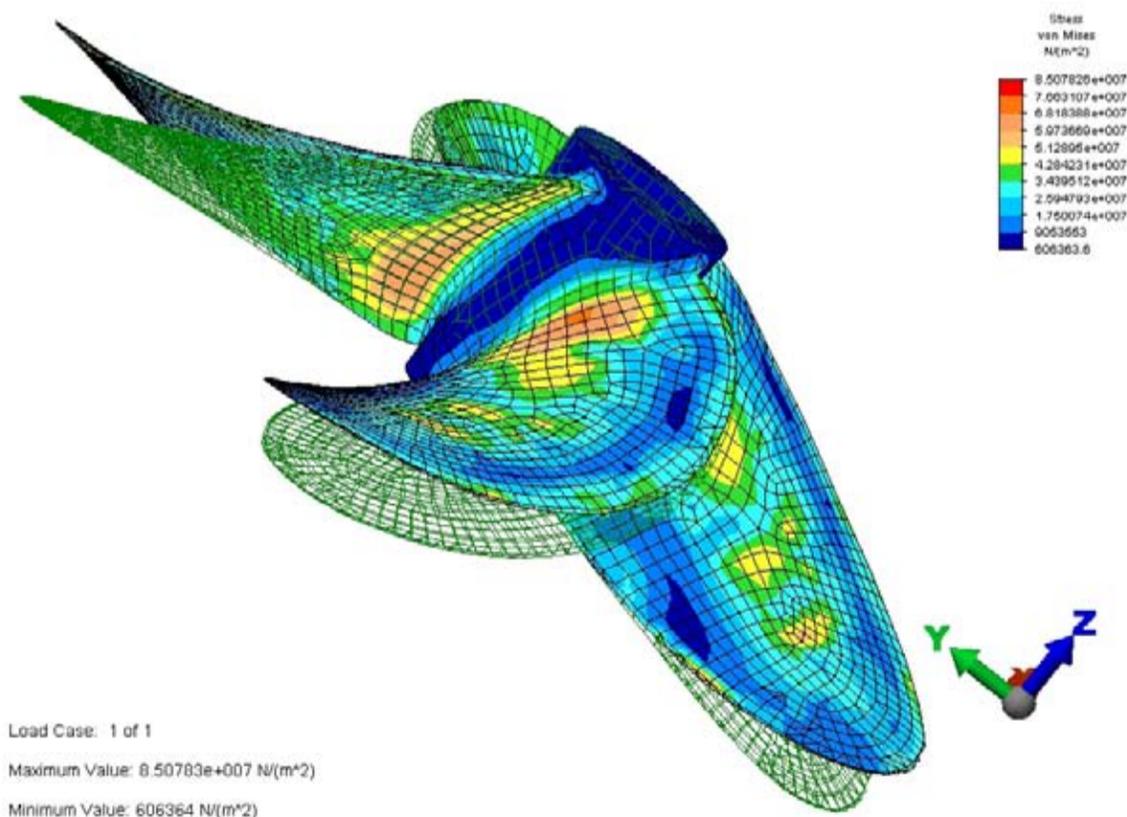
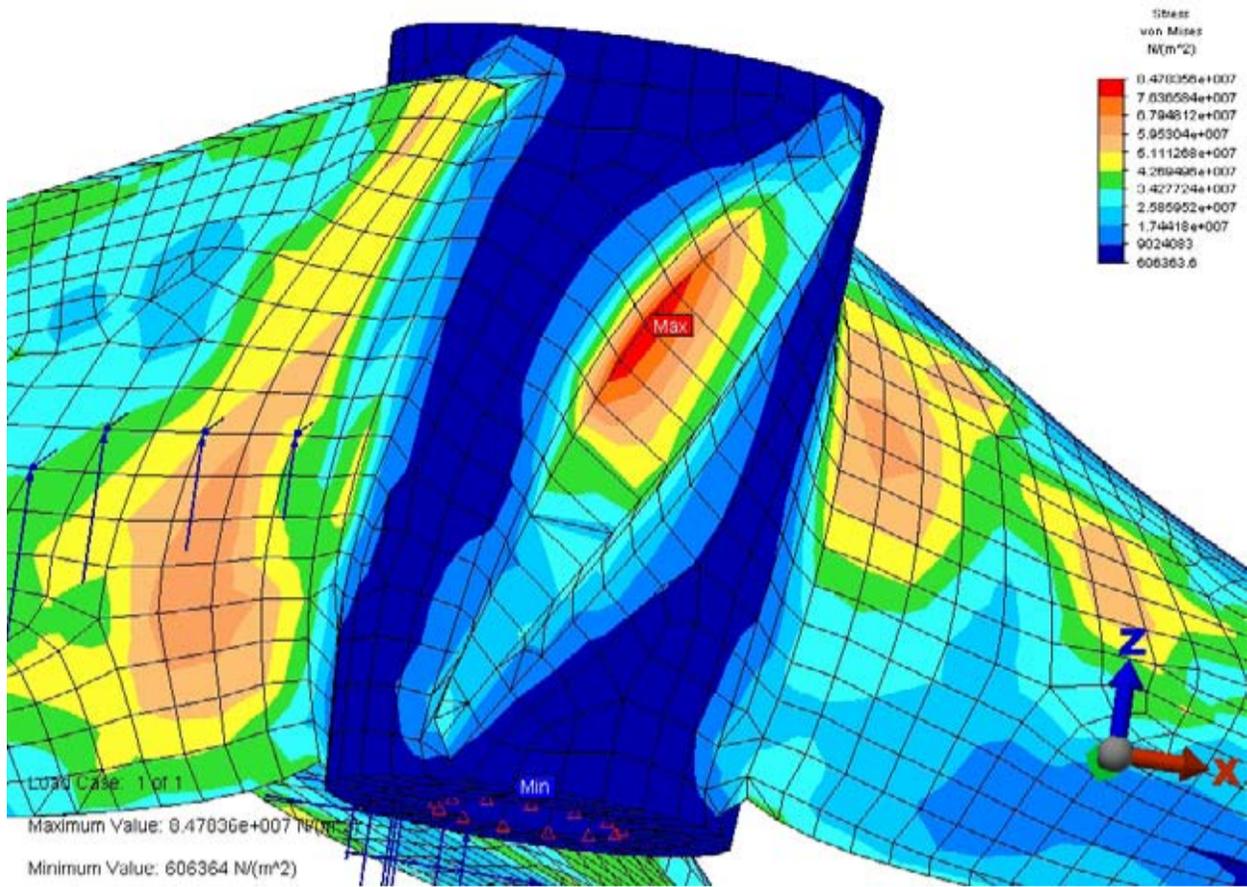
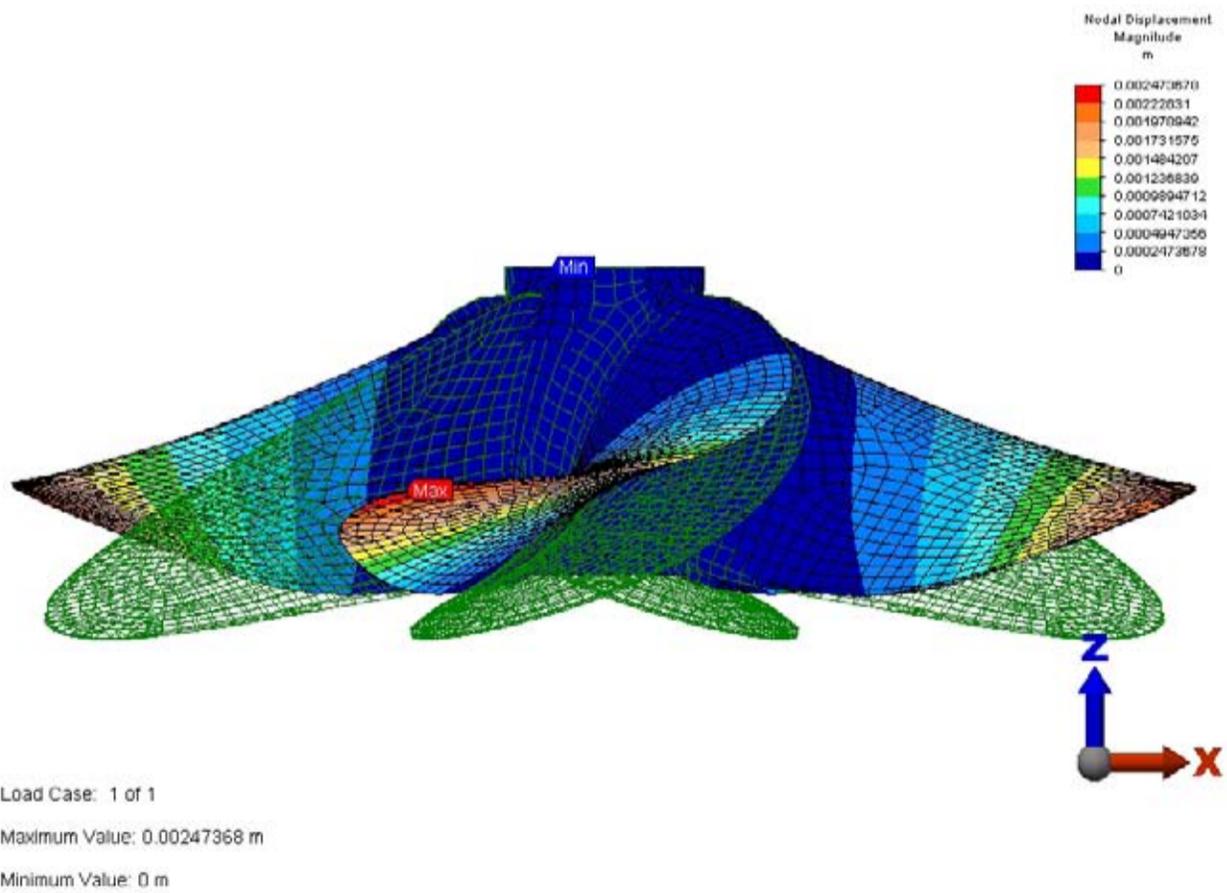


FIGURA 9.1.1 DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES Y DEFORMACIÓN



*FIGURA 9.2.2 TENSION MÁXIMA Y MÍNIMA.*



*FIGURA 9.2.3 DEZPLAZAMIENTOS MÁXIMO Y MÍNIMO.*

## **9.2 – Laminado A**

Se ha definido un laminado que sea apropiado a las condiciones del estudio, ya que sólo estamos trabajando con materiales de comportamiento isotrópico, y de acuerdo a esto se tomó la fibra Mat de 300 (gr./m<sup>2</sup>) que cumple con esta consideración y la resina de poliéster cuyas propiedades por separado son las siguientes:

### **Fibra de vidrio E:**

- Módulo de elasticidad : 73 GPa
- Módulo de corte : 30 GPa
- Relación de Poisson : 0.22
- Resistencia a la tracción : 3.4 GPa
- Densidad : 2580 (Kg./m<sup>3</sup>)

### **Resina de poliéster:**

- Módulo de elasticidad : 3.25 GPa
- Módulo de corte : 1.2 GPa
- Relación de Poisson : 0.36
- Resistencia a la tracción : 65 MPa
- Resistencia a la compresión : 130 MPa

El laminado resultante tiene las siguientes propiedades mecánicas para una relación de 60% de resina y 40% de fibra:

- Módulo de elasticidad : 8.20 GPa
- Módulo de corte : 3.08 GPa
- Relación de Poisson : 0.33
- Fluencia a la tracción : 80.3 MPa
- Límite de ruptura a la compresión : 134 MPa
- Límite de ruptura a la tracción : 124 MPa
- Densidad : 1604 (Kg./m<sup>3</sup>)
- Peso de la hélice : 128 N

Al igual que en el caso anterior, los estados de carga han sido separados en tres partes y los resultados máximos obtenidos son los siguientes:

		Tensión de Von Mises (MPa)	Desplazamiento máximo (mm)
Condición I	$(F_C)$	6.70	2.4
Condición II	$(F_Q+F_T)$	54.31	23.4
<b>Condición III</b>	<b><math>(F_Q+F_T+F_C)</math></b>	<b>60.77</b>	<b>25.8</b>

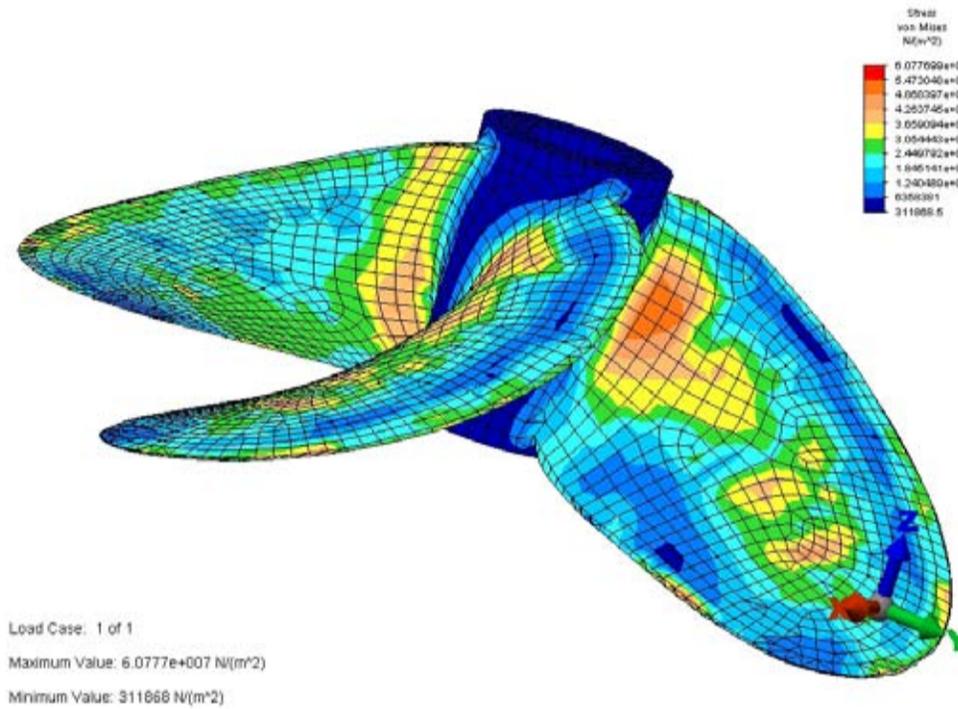


FIGURA 9.2.1 DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES

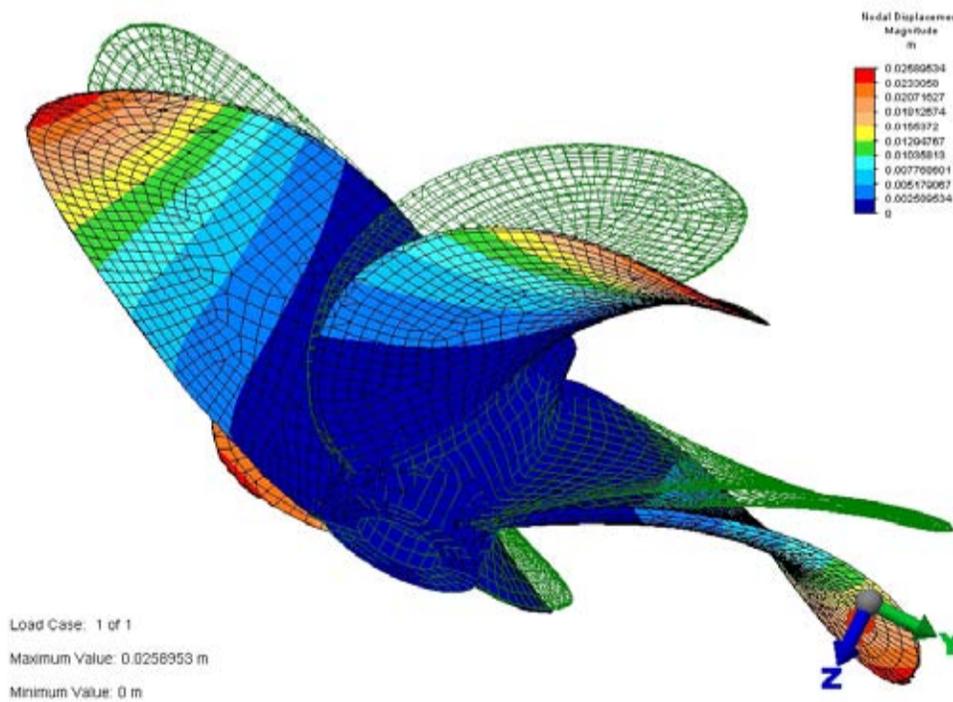


FIGURA 9.2.2 DESPLAZAMIENTOS

**9.3 – Comparación de resultados.**

<b>MATERIAL, CONCEPTO</b>	<b>NÍQUEL - ALUMINIO - BRONCE</b>	<b>LAMINADO A</b>
<b>COMPOSICION QUÍMICA (%)</b>		
COBRE	71 - 78	-
MANGANESO	10. - 14	-
ALUMINIO	7.0 - 8.5	-
NÍQUEL	1.5 - 3.0	-
HIERRO	2.0 - 4.0	-
FIBRA DE VIDRIO E	-	40
RESINA DE POLIÉSTER	-	60
<b>PROPIEDADES FÍSICAS</b>		
DENSIDAD	7.53	1.604
COEFICIENTE DE EXPANSIÓN TÉRMICA (20°C-200°C)	0.0000162 (1/°C)	
<b>PROPIEDADES MECÁNICAS</b>		
LÍMITE DE FLUENCIA A LA TENSIÓN	240 (MPa)	80.3 (MPa)
LÍMITE DE RUPTURA A LA TENSIÓN	554 (MPa)	124 (MPa)
RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN	1030 (MPa)	134 (MPa)
MÓDULO DE ELASTICIDAD	115 (GPa)	8.20 (GPa)
MÓDULO DE CORTE	44 (GPa)	3.08 (GPa)
COEFICIENTE DE POISSON	0.328	0.33
<b>OTROS</b>		
PESO DE LA HÉLICE	605 (N)	128 (N)
<b>RESULTADOS</b>		
TENSIÓN MÁXIMA	85 (MPa)	60.77 (MPa)
DEFORMACIÓN MÁXIMA	2.5 (mm)	25.8 (mm)

## **CONCLUSIONES**

- Claramente podemos deducir que respecto a las tensiones, la hélice de materiales compuestos analizada reduce aproximadamente un 30% el valor de la tensión máxima comparada con la de bronce, además sólo pesa un 15% de la hélice de metal, lo que implica sin duda un menor desgaste en el eje propulsor y los descansos.
- En cuanto a las deformaciones no ha sido posible saber si los resultados están dentro de rangos normales, dada la dificultad de hacer una comprobación aplicando las mismas cargas calculadas en forma estática en un laboratorio, además la bibliografía tampoco hace referencia al caso, deduciéndose que por la manera de hacer el dimensionado de la hélice y cumpliendo con los requerimientos especificados, es suficiente para no provocar grandes deformaciones que puedan afectar el rendimiento hidrodinámico del propulsor.
- Para el caso de la hélice compuesta este problema tiene una solución práctica inmediata ya que podemos mejorar la calidad del material reemplazando la fibra de vidrio por la fibra de carbono que posee un mayor módulo de elasticidad (Ver tabla 2.2.1), y adicionar en las zonas donde se produce la cavitación una tela híbrida, por ejemplo carbono + aramida, que permite la resistencia a los impactos usando siempre resinas del tipo epóxicas que aseguran la integridad estructural de la pieza.
- Con el procedimiento mostrado para la obtención de tensiones podemos saber de manera muy próxima a la situación real, una verdadera distribución de los esfuerzos en la hélice de un modo mucho más rápido y simple que un cálculo manual, además con el modelo en Algor 17 un análisis no está limitado sólo a la parte estructural, sino que podemos hacer cualquiera de los que están disponibles sin mayor dificultad. También podemos aplicar este método para una serie de estructuras que aun no se han analizado completamente debido a la complejidad de su geometría, que impedía hacer un modelo en elementos finitos por la dificultad que ello implicaba.

- Para obtener una precisión superior en los resultados, sin duda que se necesita realizar un estudio de CFD (Computational Fluid Dynamics), ya que ello nos permite saber exactamente la distribución de presiones que se producen en la pala cuando está en operación y así evitar hacer cálculos estimativos con fórmulas empíricas que pueden conducirnos a resultados erróneos. Así, con resultados más precisos podemos realizar una optimización en la geometría de la pala.
- Puesto que el espesor de la pala disminuye desde la raíz hasta el borde, una estructura del tipo *sándwich* requiere un cálculo de propiedades para el material en distintas franjas que van estrechando su espesor según la cantidad que se estime conveniente, pero esto implicaría hacer una división de la pala que reduce la validez del resultado.
- La correlación de resultados de tensiones con la formulación empírica no fue posible, puesto que los datos que se tienen de la hélice no son suficientes para determinarla y como la confiabilidad del método de elementos finitos se ha comprobado en muchas oportunidades y el procedimiento se hizo de manera adecuada sin descuidar detalles, los resultados son muy cercanos a la realidad.
- Por la formulación del método de elementos finitos basado en la teoría de la elasticidad y la condición de isotropía de los materiales para obtener la tensión según el criterio de falla de Von Mises, se limitó la posibilidad de hacer comparaciones con más materiales. Para materiales compuestos de comportamiento ortotrópico es difícil encontrar todas las propiedades que pide el software Algor 17 para realizar un análisis con este tipo de compuestos. Por esta razón se escogió una fibra que cumpliera con la condición de isotropía en un compuesto monolítico.
- De acuerdo a lo anterior, se pueden realizar más análisis incluyendo fibras orientadas de comportamiento ortotrópico como la fibra de carbono, que tiene una mayor resistencia que la fibra de vidrio utilizada, con esto podemos acercarnos más a los materiales con que actualmente se construyen las hélices de compuestos, y realizar una optimización en el uso de materiales puesto que ya sabemos donde se producen las máximas tensiones y deformaciones.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1. Análisis modal de la estructura de un pesquero de alta mar mediante el método de los elementos finitos.
  - Tesis para optar al título de Ingeniero Naval mención Construcción Naval
  - Autor: Richard Villavicencio
  
2. Linear and nonlinear finite element analysis in engineering practice.
  - Autor : Constantine C. Spyrakos y John Raftoyiannis
  - Volumen II
  - 1º edición 1997
  
3. El método de los elementos finitos
  - Autor : O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor
  - Volumen I y II
  - 4ª edición 1994
  
4. Teoría del buque – Introducción a la propulsión de buques.
  - Autor : Antonio Baquero
  - Cátedra grupo VIII - 1993
  
5. Introducción a la teoría del funcionamiento de la hélice.
  - Autor : José Alaez Mazurca
  - Cátedra grupo VIII 1993
  
6. Estimating propeller forces for blade strength analysis
  - Autor : Hydrocomp technical report
  - Report N° 140 – 2004
  
7. Curso de elasticidad
  - Autor : Avelino Samartín Quiroga
  - 1ª edición – 1990

8. Structural design of polymer composites

- Autor: The European structural polymeric composites group
- Editado por : John Clarke
- Londres 1996

9. Fiberglass boats

- Autor : Hugo du Plessis
- 3ª edición 1996

10. Reglamentos de clasificación y construcción – Tecnología Naval

- Autor : Germanischer Lloyd
- Parte 1 – Buques de altura
- Capítulo 8 – Buques de pesca
- Edición 1991

11. Principles of Naval Architecture.

- Publicado por: The Society of Naval Architects and Marine Engineers
- Volumen II – Resistance, Propulsion and Vibration.

**Referencias electrónicas:**

- [www.hydrocompinc.com](http://www.hydrocompinc.com)
- [www.matweb.com](http://www.matweb.com)
- [www.ricepropulsion.com](http://www.ricepropulsion.com)
- [www.nbmmetals.com](http://www.nbmmetals.com)
- [www.scienceworld.wolfram.com](http://www.scienceworld.wolfram.com)