



Universidad Austral de Chile

Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Escuela de Ingeniería Acústica

Profesor Patrocinante
Dr. Jorge Arenas Bermúdez
Instituto de Acústica
Universidad Austral de Chile

“Modelación Numérica en conductos y Silenciadores Acústicos”

Tesis presentada como parte de los requisitos para optar al Grado Académico de Licenciado en Acústica y al Título Profesional de Ingeniero Acústico

Felipe Javier Galdamez Caroca
Valdivia-Chile
2005

"No se puede encontrar a Dios en el ruido. Dios sólo se revela en el silencio..."

...Dios está donde no hay barullo. Esta máxima también es válida para quien no cree en Dios, pero cree que en alguna parte hay una verdad que descubrir. La verdad no se encuentra en el tumulto, sino más bien en la búsqueda silenciosa".

Umberto Eco

"El ruido es el mayor enemigo de la inteligencia..."

... Únicamente las sociedades modernas lo combaten".

Félix de Azúa

"Dedicado al Ángel de mi Vida Andrea, y a mi Madre por su apoyo infinito junto con mi Padre que siempre estuvo ahí... "

Índice

Capítulo	Páginas
1. Resumen.	3
1.1. Abstract.	4
2. Introducción.	5
3. Objetivos.	7
3.1. Objetivos Generales.	7
3.2. Objetivos Específicos.	7
4. Marco Teórico.	8
4.1. Definiciones Generales.	9
4.2. Propagación de ondas sonoras en conductos rectos.	9
4.3. Teoría acústica en un conducto bajo condiciones de flujo.	14
4.3.1. Conducto uniforme en presencia de flujo y pérdidas viscosas.	14
4.4. Método de la matriz de transferencia (TMM).	15
4.4.1. Propagación de onda plana (para TMM).	15
4.4.2. Representación de la matriz de transferencia.	16
4.4.3. Pérdida de transmisión del TMM.	19
4.5. Matriz de transferencia de distintas configuraciones de silenciadores.	21
4.5.1. Conducto recto.	21
4.5.2. Cámara de expansión simple.	22
4.5.3. Cámara de expansión con Conducto extendido en la entrada y/o en la salida.	25
4.5.4. Cámara de expansión con Resonador concéntrico.	27
4.6. Método numérico de Elementos de Contorno para el análisis tridimensional de cámaras de expansión y silenciadores simples de sección transversal circular en un medio estacionario no viscoso.	33
4.6.1 Ondas tridimensionales en un medio estacionario no viscoso.	33
4.6.1.1. Conductos Circulares.	34
4.6.2. Cámara de expansión de sección transversal circular.	38

4.6.2.1.	Localización de los puntos para el análisis modal de cámaras de expansión de sección circular en la entrada y la salida.	39
4.6.3.	Condiciones para la compatibilidad en las discontinuidades de área.	40
5.	Metodología.	43
5.1.	Metodología de programación utilizada.	43
5.2.	Introducción general de la metodología utilizada para las mediciones experimentales.	43
5.2.1.	Métodos de medición utilizados.	45
5.2.1.1.	Método de las Dos Cargas.	45
5.2.1.2.	Método de las Dos Fuentes.	46
6.	Resultados.	48
6.1.	Resultados obtenidos en ausencia de flujo.	48
6.2.	Resultados obtenidos en presencia de flujo.	51
7.	Análisis de los Resultados.	54
8.	Conclusiones.	55
9.	Agradecimientos.	56
10.	Referencias Bibliográficas.	57
11.	Anexos.	59
11.1.	Programas creados en MATLAB.	60

1 Resumen

Este estudio consiste en un análisis teórico de los distintos parámetros usados para evaluar la eficiencia de dispositivos acústicos, en particular las cámaras de expansión y los silenciadores, bajo diferentes configuraciones.

Para modelar el comportamiento de los distintos silenciadores, usando diferentes métodos, se diseñó varios programas para obtener la Pérdida de Transmisión (TL), basados en el software MATLAB 6.

Para modelar con una buena aproximación estos dispositivos acústicos, se utilizó el método de la “Matriz de Transferencia”, bajo ciertas condiciones de operación, tales como: propagación de onda plana a través de los silenciadores y la presencia de flujo en el medio.

Por otro lado, a pesar de que en la mayor parte de este estudio se asume la propagación de onda plana en los conductos, existen modos de mayor orden propagándose en éstos, los cuales no causan mayor efecto en el análisis del comportamiento de los silenciadores. De todas formas, se considera en una parte de esta tesis la propagación de ondas tridimensionales en los conductos, para apreciar las limitaciones de la teoría de onda plana.

Finalmente, se comparó los datos simulados con los resultados obtenidos en el laboratorio.

Este trabajo ha sido financiado por CONICYT, a través del proyecto FONDECYT N° 1020196.

1.1 Abstract

This research consists of a theoretical analysis about the different parameters used to evaluate the efficiency of acoustical devices, silencers and expansion chambers in particular, under different configurations.

In order to model the behavior of the different silencers, the design of computer codes to obtain the Transmission Loss (TL), was implemented using the software MATLAB 6.

In order to model these acoustical devices with a proper approach, the "Transfer Matrix" method was used, under certain operational conditions such as: plane wave propagation through the silencers and the presence of mean flow.

On the other hand, although in most part of this study, plane wave propagation in the conduits is assumed, there are higher-order-modes propagating through them, which do not cause greater effect in the analysis of the silencer's behavior. In any case, the propagation of three-dimensional waves through the conduits is considered as a part of this study, so to appreciate the limitations of the plane wave theory.

Finally, comparisons of the simulated data and the experimental results obtained in the laboratory, are presented.

This study has been supported by CONICYT, through project FONDECYT N° 1020196.

2 Introducción

El ruido es uno de los agentes físicos contaminantes más fáciles de producir y más difíciles de controlar. Es por esta razón, que a menudo surgen diversas inquietudes de cómo controlar las fuentes de ruido y así disminuir, de alguna manera, cierto porcentaje de contaminación acústica. Además, gran parte del ruido urbano es producto de los vehículos de combustión interna.

Afortunadamente, existen dispositivos para la reducción del ruido emitido por los escapes de los automóviles. Sin embargo, la mayoría de los silenciadores comerciales son diseñados en un esquema de prueba y error o mediante el uso de software específico. El diseño de un sistema completo de silenciadores, generalmente, es una tarea muy compleja. Cada elemento es seleccionado considerando su funcionamiento particular, su costo y sus efectos, debido a la interacción sobre el funcionamiento y la confiabilidad del sistema completo. Las técnicas numéricas, tales como el método de “Elementos Finitos” (FEM) y el método de los “Elementos de Contorno” (BEM), han demostrado ser convenientes para las complejas geometrías de distintos silenciadores. Aunque estos métodos son aplicables para cualquier configuración de silenciadores, cuando la forma del silenciador llega a ser demasiado compleja, el FEM tridimensional requiere un número muy grande de elementos y de nodos. Esto da lugar a tiempos de cómputo muy largos y al uso de grandes cantidades de memoria para el procesado de datos. Aunque existen las máquinas de cómputo y de almacenaje de alta velocidad, el uso de FEM o de BEM para el diseño del silenciador, se restringe a personal entrenado y es comercialmente costoso, en particular cuando se usa para la evaluación preliminar del diseño y en la interpretación de sus resultados. Si consideramos que la mayoría de los fabricantes de silenciadores son compañías pequeñas y medianas, con una cantidad limitada de recursos, se hace necesario diseñar y predecir el comportamiento de los silenciadores usando métodos numéricos más baratos y que puedan implementarse en un lenguaje de programación más general, como es el caso de MATLAB. En este aspecto, MATLAB es una plataforma de programación sumamente apropiada para manejar los métodos matriciales, la resolución de sistemas de ecuaciones y permitir la visualización de los resultados.

En esta investigación, los fundamentos del método de la “Matriz de Transferencia” (TMM) se aplican a diversas configuraciones de silenciadores para la predicción de la Pérdida de Transmisión.

De esta manera, el propósito de esta tesis es simular el comportamiento de dispositivos acústicos, tales como conductos y cámaras de expansión, con el objetivo de disminuir la contaminación acústica y comparar los resultados numéricos con datos experimentales (obtenidos en laboratorio), que permitan validar los resultados y estudiar las limitaciones de los métodos desarrollados.

3 Objetivos

3.1 Objetivos generales

-Diseño y programación de los códigos computacionales que simulen el comportamiento de dispositivos acústicos, para obtener la Pérdida de Transmisión (TL), basados en MATLAB.

-Comparar los datos simulados con los resultados experimentales obtenidos en el laboratorio.

3.2 Objetivos específicos

-Modelar las cámaras de expansión por el método de la matriz de transferencia, asumiendo propagación de onda plana, para luego comparar los resultados numéricos con los datos experimentales.

-Determinar la Pérdida de Transmisión (TL) de las diferentes configuraciones de silenciadores.

-Determinar la Pérdida de Transmisión (TL), a través de un modelo numérico, que incluya un modelo tridimensional de cámaras de expansión y silenciadores simples, de sección transversal circular, en un medio estacionario no viscoso, usando el método de la Matriz de Transferencia.

4 Marco Teórico

Podemos definir un silenciador como un dispositivo que atenúa el campo sonoro que se propaga a través de él (son diseñados para dejar pasar un fluido reduciendo fuertemente su energía sonora).

Este tipo de dispositivos (silenciadores), son utilizados principalmente en automóviles, sistemas de ventilación, de aire acondicionado como también en otros procesos industriales.

Sin duda el silenciador más conocido es el de los escapes de motores de combustión interna (automóviles), el cual consta de tubos por donde el motor descarga sus gases. El principio de estos silenciadores esta basado en la reflexión de las ondas sonoras hacia la fuente, producto de que las ondas al pasar por el silenciador encuentran un cambio de impedancia acústica (grande o pequeño), lo cual se traduce en que una pequeña porción del ruido se propaga a través del silenciador y la mayor parte de la energía se refleja hacia la fuente. Este tipo de silenciadores son particularmente económicos y producen baja pérdida de presión del fluido transportado proveniente del motor.

Este último tipo de silenciador (automóvil), principalmente atenúa el ruido en base a cambios en su sección transversal, pero lo cierto es que, para poder disminuir la transmisión del sonido en conductos, esta es una buena (aunque no única), manera de obtener buenos resultados.

Como ya ha sido mencionado, una posibilidad para atenuar la transmisión del sonido se puede conseguir a través de conductos rígidos aumentando o disminuyendo abruptamente su sección transversal, lo cual produce una reflexión del sonido (este tipo de silenciadores son llamados “Reactivos” o “Reflectivos”). Otra manera de atenuar la transmisión del sonido es utilizar conductos en los cuales sus paredes son recubiertas de material absorbente, lo cual produce una transformación de la energía acústica en calor (este tipo de silenciadores son llamados “Resistivos” o “Disipativos”).

Esta tesis contempla un estudio sólo de silenciadores de tipo “Reactivos”.

Los dispositivos reactivos, para el control de ruido, son eficientes en frecuencias bajas, particularmente en la atenuación de ruido de frecuencias discretas (tonos puros). Como se mencionó, la eficiencia acústica (atenuación de ruido), de los silenciadores reactivos, es determinada sólo por su geometría (sin necesidad de material absorbente en las paredes de los conductos).

4.1 Definiciones generales

A continuación se entregan algunas definiciones generales para hacer posible la comprensión de los problemas abarcados en la presente Tesis.

La notación empleada también será descrita a continuación:

4.2 Propagación de ondas sonoras en conductos rectos

Consideremos un conducto recto, infinito, de sección transversal rectangular o circular constante, con paredes internas rígidas y además sin revestimiento de material absorbente en las paredes del conducto, asumiendo que el fluido en su interior es no viscoso y homogéneo. Si el conducto es excitado por una fuente sonora cualquiera, las ondas sonoras obedecen a la ecuación de onda [3], siempre y cuando las amplitudes de presión sonora sean pequeñas para despreciar cualquier efecto no lineal en la propagación sonora.

Si consideramos el problema en dos dimensiones (de coordenadas y y z), de la Fig. 1 el campo sonoro satisface la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

donde p es la presión sonora, c es la velocidad del sonido y t es el tiempo.

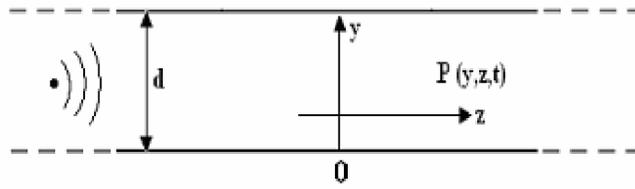


Fig. 1 Coordenadas para la propagación de ondas en conductos.

Las condiciones de contorno de la velocidad de partículas nula en las paredes rígidas, están dadas por:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

esto en $y = 0$ e $y = d$ (ver figura 1) [3].

En consideración de esto último, la ecuación de onda, para una onda plana, es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Considerando lo anteriormente mencionado, la solución armónica para onda plana, que expresa la presión sonora como función de ondas armónicas en notación compleja es:

$$p(z, t) = [A e^{-jkz} + B e^{+jkz}] e^{j\omega t}, \quad (4)$$

donde

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (5)$$

es llamado el número de onda, o también constante de propagación de la onda, en donde λ es la longitud de onda. En la ecuación (4) A es la amplitud compleja de la presión sonora propagándose en el sentido positivo del eje z , con velocidad c , y B es la amplitud compleja de la onda propagándose en el sentido negativo del eje z .

Esta forma de la presión sonora satisface la ecuación de onda plana (particular), mencionada anteriormente.

Por otra parte la velocidad de partícula u , queda expresada como:

$$u(z,t) = \frac{1}{\rho_0 c} \left[A e^{-jkz} - B e^{+jkz} \right] e^{j\omega t}, \quad (6)$$

donde ρ_0 es la densidad del medio (en el aire $\rho_0 = 1.18 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$).

Debido a que la presión sonora p está relacionada linealmente con la velocidad de partícula u (ecuación de Euler para estado estacionario), esta última también satisface la ecuación de onda plana (particular).

La ecuación de Euler para estado estacionario se escribe como:

$$u = \frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (7)$$

Velocidad media de flujo promedio

Se define como la velocidad promedio (media aritmética) del flujo de aire al interior de un conducto, tomada en puntos arbitrarios del plano formado por la sección de área (perpendicular a la dirección de propagación del flujo):

$$V_{promedio} = V = \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{n} \left[\frac{m}{s} \right], \quad (8)$$

en donde n es el número de puntos tomados arbitrariamente.

Velocidad de propagación del sonido en el aire

La velocidad de ondas sonoras en el aire c , se puede calcular a través de la siguiente relación:

$$c = 343.2 \sqrt{0.9317 + \frac{T}{293}} \left[\frac{m}{s} \right], \quad (9)$$

en la cual T es la temperatura en grados Celsius.

Numero de Mach

Es el cociente entre la velocidad media del flujo promedio V , y la velocidad del sonido en el aire c :

$$M = \frac{V}{c}. \quad (10)$$

Esta es una cantidad adimensional, y su valor determinará si el flujo existente se considera subsónico o supersónico.

Velocidad de volumen

Para una onda plana desplazándose en un conducto también existe la velocidad de masa v :

$$v = \rho_0 S u, \quad (11)$$

en la cual S es el área del conducto (por ejemplo, en un conducto recto de sección transversal circular, $S = \pi r^2$).

Impedancia característica

Es la relación entre la presión sonora en un punto dado y la velocidad de partículas en ese mismo punto. En el caso de una onda plana progresiva:

$$\frac{p}{u} = \rho_0 c \left[\frac{N \cdot s}{m^3} \right]. \quad (12)$$

Impedancia característica de flujo

Esta es la impedancia característica del medio, la cual es definida como la razón entre la presión sonora y la velocidad de volumen para una onda plana progresiva, esto es:

$$Z_0 = \frac{\rho_0 c}{S}. \quad (13)$$

4.3 Teoría acústica en un conducto bajo condiciones de flujo

En los dispositivos de escape de motores de combustión interna, de conductos de calefacción, de ventilación y de sistemas de aire acondicionado, la velocidad media de flujo promedio V es generalmente pequeña, con lo cual este flujo es asumido como incompresible. Así, el número de Mach se limita normalmente a:

$$M = \frac{V}{c} < 0.2. \quad (14)$$

4.3.1 Conducto uniforme en presencia de flujo y pérdidas viscosas

Para ondas planas en un conducto de área uniforme en presencia de flujo medio, número de Mach M y pérdida viscotermal y turbulenta de fricción, la presión sonora y la distribución acústica de la velocidad de partícula se pueden expresar de la siguiente manera:

$$p(z) = e^{jMk_c z} \{ A e^{-jk_c z} + B e^{+jk_c z} \}, \quad (15)$$

$$u(z) = \frac{e^{jMk_c z}}{Z_0} \{ A e^{-jk_c z} - B e^{+jk_c z} \}, \quad (16)$$

en donde:

$$k_c = \frac{k}{(1-M^2)}, \quad (17)$$

es el número de onda convectivo (relativo al flujo).

4.4 Método de la matriz de transferencia (TMM)

4.4.1 Propagación de onda plana (para TMM)

Para la propagación de onda plana en un conducto recto y rígido, de longitud L y de sección transversal constante S , que transporte un flujo medio incompresible turbulento de velocidad V (velocidad de flujo), la presión sonora p y la velocidad u de volumen, se pueden representar, en cualquier parte del conducto, como la suma de ondas que viajan a la izquierda y a la derecha del tubo. El modelo de la propagación de onda plana es válido cuando la influencia de los modos de mayor orden puede ser despreciado. Usando la analogía de la

impedancia, la presión sonora p y la velocidad u de volumen en las posiciones 1 (extremo superior) y 2 (extremo en sentido descendente), en la Fig. 2 ($x = 0$ y $x = L$, respectivamente), se pueden relacionar por:

$$p_1 = Ap_2 + Bu_2, \quad (18)$$

y

$$u_1 = Cp_2 + Du_2. \quad (19)$$

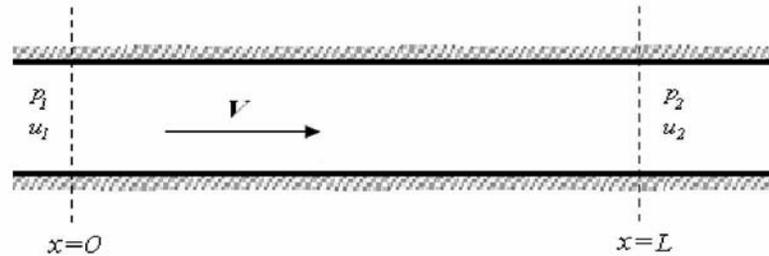


Fig. 2 Conducto recto y rígido, de longitud L y de sección transversal constante S .

donde A , B , C , y D generalmente se llaman los parámetros de cuatro polos, estas son cantidades complejas, dependientes de la frecuencia, que incorporan las características acústicas del conducto y describen la respuesta espectral de éste.

Estos parámetros se pueden obtener (en teoría) mediante métodos clásicos o numéricos para cualquier diseño geométrico, también abarcando la presencia de flujo y diferencias de temperatura.

Las ecuaciones (18) y (19) se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

4.4.2 Representación de la matriz de transferencia

El método de la Matriz de Transferencia es usado para el análisis de sistemas unidimensionales conectados en cascada, tales como filtros acústicos o silenciadores. El funcionamiento de un silenciador se puede obtener fácilmente en

términos de los parámetros de cuatro polos, o matrices de transferencia del sistema completo, que alternadamente se pueden obtener por medio de la multiplicación sucesiva de las matrices de transferencia de los elementos que constituyen el sistema (silenciador).

Las matrices de transferencia de diversos elementos que constituyen los silenciadores estudiados en el presente trabajo se describen con mayor detalle más adelante.

En la práctica, hay diversos elementos acoplados en un silenciador verdadero. Sin embargo, los cuatro valores de las constantes de la matriz, de cada uno de los elementos, no son afectados por las conexiones a los elementos que siguen, mientras los elementos del sistema se pueden asumir lineales y pasivos. Así, cada elemento es caracterizado por una matriz de transferencia, que depende de sus condiciones de geometría y de flujo. Por lo tanto, es necesario modelar cada elemento y después relacionarlos todos para obtener la característica acústica total del silenciador.

Si varios elementos del silenciador, tales como cambios abruptos en su sección transversal, tubos extendidos y / o tubos perforados, están conectados en serie, entonces la matriz de transferencia total del sistema es dada por el producto de las matrices individuales del sistema.

El método de la Matriz de Transferencia se puede escribir en una forma equivalente de la matriz (ecuación 20), como:

$$q_1 = T q_2, \quad (21)$$

donde $q_i = [p_i \ u_i]^T$ es un vector de estado (que incorpora las variables de presión p y velocidad u), en la entrada y en la salida del conducto o silenciador, ($i = 1,2$), y

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (22)$$

es la matriz de transferencia de 2×2 , definida con respecto a variables de estado. Esta matriz relaciona la velocidad de volumen y la presión sonora en dos puntos en un elemento del silenciador, tal como la del conducto recto discutido anteriormente.

De esta forma, una matriz de transferencia es una característica dependiente de la frecuencia del sistema. El principio de la reciprocidad requiere que el determinante de la matriz de transferencia sea uno. Además, en un silenciador simétrico A y D deben ser idénticos.

Por ejemplo, el silenciador que veremos a continuación (Fig.3) incluye un conducto recto (1), un tubo extendido (2), una expansión repentina donde se tiene un tubo uniforme (3), un tubo perforado (4) (resonador concéntrico), tubo uniforme (5), contracción repentina (6) y nuevamente un conducto recto [12].

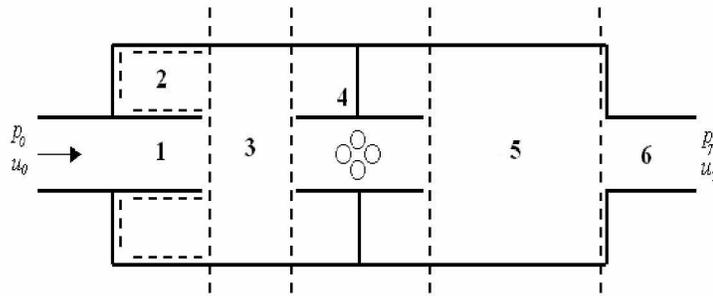


Fig. 3 Ejemplo de silenciador.

Entonces, este silenciador en particular lo podemos describir de la siguiente manera:

$$q_0 = T_0 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 \cdot T_6 \cdot q_7, \quad (23)$$

lo cuál relaciona las variables (presión p y velocidad u) en dos puntos (entrada y salida) en un silenciador, y en donde T_i ($i = 0, \dots, 6$) son las matrices de transferencia de cada uno de los elementos que componen el silenciador.

Es por esta razón que la formulación de la matriz es muy conveniente particularmente para modelar el comportamiento de silenciadores en un computador. La única información que se necesita para modelar cualquier

silenciador complejo son los elementos de las matrices de transferencia. Los parámetros de cuatro polos (elementos para la matriz de transferencia) se pueden encontrar fácilmente en la literatura para los elementos simples de silenciadores, tales como conductos y cámaras de expansión rectas. Pero para un elemento complejo, los parámetros de cuatro polos pueden tomar formas muy complicadas que no se determinan fácilmente matemáticamente. Una alternativa es utilizar el Método de Elementos Finitos para obtener numéricamente cada constante (Craggs, 1989).

Afortunadamente, una gran cantidad de matrices de transferencia se han desarrollado y se han dado a conocer teóricamente en la literatura. Algunas de ellas incluyen los efectos de flujo. Varias fórmulas de las matrices de transferencia de diversos elementos, que constituyen silenciadores comerciales han sido compilados por Munjal [1]. (1987), y más recientemente, por Mechel [6] (2002). También incluyeron una lista extensa de referencias relevantes. Cabe señalar que, además de las características y de las condiciones geométricas y del flujo, algunas matrices de transferencia dependen de parámetros adicionales tales como conductividad de calor.

Al usar perforaciones en los elementos del silenciador, las matrices de transferencia dependen de la porosidad (número de perforaciones por unidad de longitud del eje del conducto), y particularmente de la impedancia normalizada del elemento en donde se encuentran las perforaciones.

4.4.3 Pérdida de transmisión del TMM

Los parámetros usados para describir la eficiencia de elementos acústicos, tales como silenciadores, se puede dar en términos de la atenuación, de la Pérdida de Inserción IL , de la Pérdida de Transmisión TL y de la Reducción del Nivel de Ruido LD .

La Pérdida de Transmisión, TL , es independiente de la fuente y requiere una terminación anecoica en el extremo de salida del elemento acústico (silenciador). Este describe el rendimiento del silenciador. Se define como 10 veces el logaritmo del cociente entre la energía incidente en el silenciador (potencia

acústica de la onda incidente W_i), y la energía transmitida en sentido descendente (potencia acústica de la onda transmitida W_t), asumiendo una terminación anecoica, esto es:

$$TL = 10 \log_{10} \frac{W_i}{W_t} \quad [dB]. \quad (24)$$

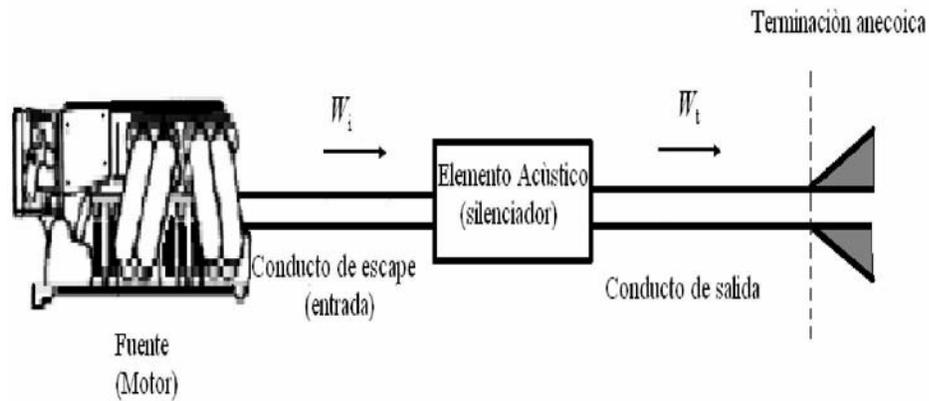


Fig. 4 Conducto de escape de un motor tradicional.

La pérdida de transmisión no involucra que se conozca la impedancia de la fuente Z_s , ni de la impedancia de radiación Z_{Rad} , debido a que el TL representa la diferencia entre la potencia incidente y la potencia transmitida a una terminación anecoica. Por este motivo el TL es independiente de las terminaciones, y se utiliza mayormente cuando es necesario encontrar las características acústicas de transmisión de los elementos acústicos.

Obtención de la Pérdida de Transmisión para el TMM

Para obtener el TL en términos de los parámetros de cuatro polos, tenemos la siguiente ecuación:

$$TL = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{2} \left(A + \frac{BS}{\rho c} + \frac{C \rho c}{S} + D \right) \right|. \quad (25)$$

Como podemos notar de la ecuación (25), el TL es independiente de la fuente y de la terminación, sólo depende de los parámetros de cuatro polos y de la superficie del camino, lo que nos permite evaluar el rendimiento en términos de atenuación del que se ha llamado en la literatura el “silenciador”.

Para obtener los otros dos parámetros que evalúan el rendimiento de un silenciador (la Pérdida de Inserción IL , y la Reducción del Nivel de Ruido LD), necesitamos predecir el ruido irradiado de los dispositivos de escape del motor, por lo cual se requiere un modelo del comportamiento acústico del sistema (desde la entrada hasta la salida del tubo de escape), y un modelo de las características de la fuente (del ciclo del motor). Los modelos se analizan en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo. Sin embargo, la evaluación de las características de la fuente sigue siendo un desafío, técnico.

Recientemente, Sathyanarayana y Munjal (2000) desarrollaron un modelo híbrido para predecir el ruido irradiado por el motor, que utiliza el análisis en el dominio del tiempo, además del análisis en el dominio de la frecuencia del silenciador. Para el análisis en el dominio de la frecuencia del silenciador, también utilizaron el método de la Matriz de Transferencia.

4.5 Matriz de transferencia de distintas configuraciones de silenciadores

A continuación veremos algunas matrices de transferencia encontradas en la literatura para modelar las cámaras de expansión estudiadas en la presente tesis.

4.5.1 Conducto recto

Conducto recto rígido de sección transversal uniforme S , se muestra a continuación (Fig.5):

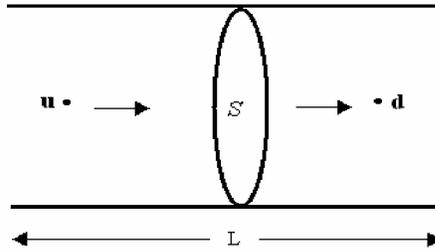


Fig. 5 Conducto recto rígido de sección transversal S y largo L .

Para un conducto recto rígido, de sección transversal constante S , la relación para la matriz de transferencia es:

$$\begin{bmatrix} P_u \\ u_u \end{bmatrix} = e^{-jMk_c L} \begin{bmatrix} \cos k_c L & j \frac{\rho c}{S} \sin k_c L \\ j \frac{S}{\rho c} & \cos k_c L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_d \\ u_d \end{bmatrix}, \quad (26)$$

en donde k_c es el número de onda convectivo (ecuación 17).

Los subíndices u y d , indican puntos a lo largo del conducto (Fig.5), justo en el extremo superior (u), y justo en el extremo en sentido descendente (d). La velocidad media de flujo promedio V es generalmente pequeña, para que el flujo medio sea asumido como incompresible. Por esto, el número de Mach se limita a:

$$M = \frac{V}{c} < 0.2 . \quad (27)$$

4.5.2 Cámara de expansión simple

Una cámara de expansión simple posee cambios abruptos en la sección transversal, como se muestra a continuación (Fig.6):

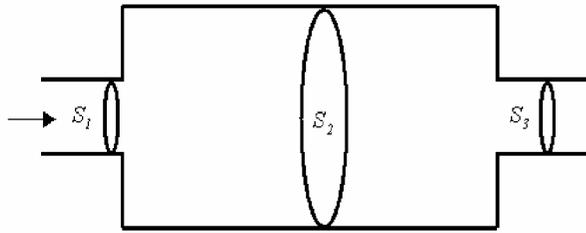


Fig. 6 Cámara de Expansión simple.

Los subíndices u y d , indican puntos a lo largo del conducto (Fig.7 y Fig.8), justo en el extremo superior (u), y justo en el extremo en sentido descendente (d), en el cambio abrupto del área transversal. Como ya ha sido mencionado anteriormente la velocidad media de flujo promedio V es generalmente pequeña y el número de Mach también es dado por la ecuación (27).

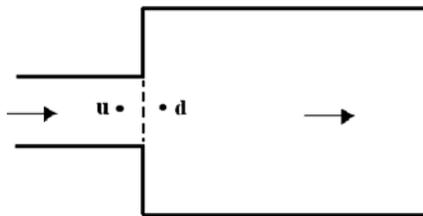


Fig.7 Expansión abrupta

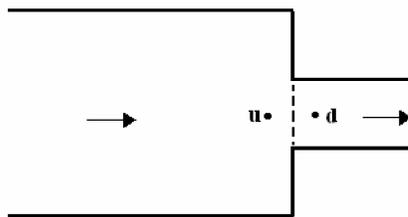


Fig.8 Contracción abrupta

Para la expansión abrupta y contracción abrupta (del área transversal del conducto), suponiendo onda plana y flujo medio incompresible, la relación para la matriz de transferencia es:

$$\begin{bmatrix} p_u \\ u_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{K_d M_d^2}{1 - M_d^2} & K_d M_d Z_d \\ \frac{(\kappa - 1) K_d M_d^2}{(1 - M_d^2) Z_d} & 1 - \frac{(\kappa - 1) K_d M_d^2}{1 - M_d^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_d \\ u_d \end{bmatrix}, \quad (28)$$

en donde:

a) Para la expansión abrupta:

$$K_d = \frac{\left(1 - \frac{S_d}{Su}\right)}{2}, \quad (29)$$

y

b) Para la contracción abrupta:

$$K_d = \left[\left(\frac{S_d}{Su} \right) - 1 \right]^2. \quad (30)$$

En la ecuación (28):

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (31)$$

La ecuación (31) es el exponente adiabático, en donde c_p es el calor específico a presión constante y c_v es el calor específico a volumen constante. Para los gases cuyas moléculas están compuestas por dos átomos, los cuales son los únicos de interés en acústica, se obtiene:

$$\kappa = 1.4. \quad (32)$$

En la ecuación (28) M_d es el número de Mach en el conducto, para cada caso (expansión abrupta y contracción abrupta), y además S_d y S_u son la superficie en cada punto d y u , respectivamente.

4.5.3 Cámara de expansión con Conducto extendido en la entrada y/o en la salida

Para este caso, también es conveniente revisar los casos para las expansiones o contracciones simples de conductos alineados (vistas anteriormente).

En las siguientes figuras se muestran dos tipos de discontinuidades abruptas de área para un conducto extendido.

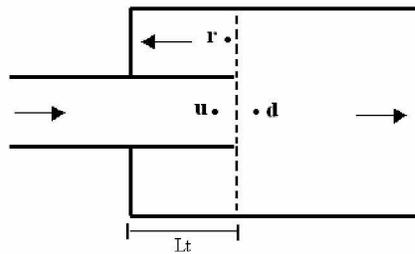


Fig.9 Conducto extendido en la entrada.

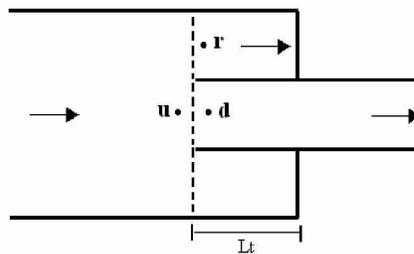


Fig.10 Conducto extendido en la salida.

Las ecuaciones de continuidad, de equilibrio, y de las fluctuaciones totales de la entropía para onda plana y flujo medio incompresible, entregan una relación para la matriz de transferencia de este caso, la cual se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} p_u \\ u_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_d M_d Z_d \\ \frac{C_r S_r}{C_r S_r Z_r + S_u M_u Z_u} & \frac{C_r S_r Z_r - M_d Z_d (C_d S_d + K_d S_u)}{C_r S_r Z_r + S_u M_u Z_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_d \\ u_d \end{bmatrix} \quad (33)$$

Los subíndices u y d , indican puntos a lo largo del conducto (Fig.8 y Fig.9), justo en el extremo superior (u), y justo en el extremo en sentido descendente (d), en el cambio repentino del área transversal, y r indica el punto de área que queda fuera del conducto extendido. En este caso, también tenemos que la velocidad media de flujo promedio V es generalmente pequeña. Por esto, el número de Mach se limita (al igual que en el caso de cambios simples de sección) a:

$$M = \frac{V}{c} < 0.2 \quad (34)$$

en la ecuación (33) se obtiene que:

a) Para el conducto extendido en la salida:

$$K_d = \frac{\left(1 - \frac{S_d}{S_u}\right)}{2} \quad (35)$$

y

b) Para el conducto extendido en la entrada:

$$K_d = \left[\left(\frac{S_d}{S_u} \right) - 1 \right]^2 \quad (36)$$

S_x son las áreas de la sección transversal (con $x = u, d, r$), M_x es el número de Mach M , dependiendo de la posición ($x = u, d, r$); y además Z_d, Z_u , son las impedancias característica de flujo también dependiendo de la posición en donde estemos evaluando dicha impedancia. Por otro lado:

$$Z_r = -jZ_t \cot(k_0 L_t) , \quad (37)$$

es la impedancia de flujo del área que se forma en el punto r (esta es el área de la cavidad de la cámara menos el área del conducto extendido), en donde L_t es el largo y Z_t es la impedancia característica, ambos del conducto extendido.

Las constantes C_r y C_d son dadas por la ecuación (38). Esta es la ecuación de compatibilidad de área:

$$S_u + C_d S_d + C_r S_r = 0 . \quad (38)$$

Así, se tiene que:

$$C_d = -1 ; C_r = -1 , \quad (39)$$

para el conducto extendido en la salida, y

$$C_d = -1 ; C_r = +1 . \quad (40)$$

para el conducto extendido en la entrada.

4.5.4 Resonador concéntrico

Este tipo de silenciador consiste básicamente de un conducto perforado, envuelto por una cámara de expansión.

En este punto se presenta la teoría para el modelado de dos diferentes formas:

- i) Cámara de expansión con Resonador concéntrico de cuatro orificios.
- ii) Resonador concéntrico en un medio estacionario.

i) Cámara de expansión con Resonador concéntrico de cuatro orificios.

Esta cámara consiste en un tubo extendido a lo largo de ella, que comunica la entrada con la salida, incluyendo en el centro de la cavidad un número finito de orificios (cuatro). El esquema de este tipo de cámara se muestra en la figura 11. El resonador concéntrico es representado por una impedancia que define las cuatro perforaciones del conducto en el centro (hay un cambio de impedancia en el lugar donde se encuentran las perforaciones, esto es en el punto 2), y las variables en el extremo superior del conducto p_3 y u_3 (en el punto 3), son relacionadas con las variables en el extremo inferior del conducto p_1 y u_1 (en el punto 1).

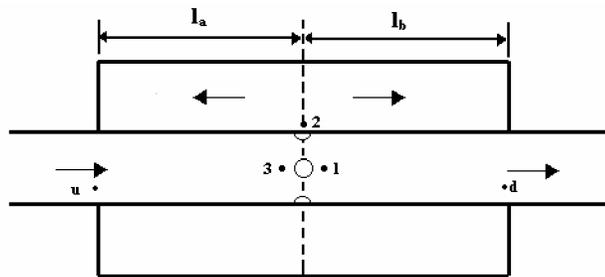


Fig.11 Cámara de expansión con resonador concéntrico.

La impedancia en el punto 2 esta dada por la siguiente relación [1]:

$$Z_2 = \frac{1}{n_h} \left\{ j\omega \frac{l_{eq}}{S_h} + \frac{\omega^2}{\pi c} \right\} - jY_c \frac{1}{\tan k_0 l_a + \tan k_0 l_b} , \quad (41)$$

en donde tenemos que los subíndices h y c describen las perforaciones y la cavidad del conducto, respectivamente y además:

n_h = número de perforaciones en el punto dos (en nuestro caso 4 perforaciones);

$$S_h = \frac{\pi d_h^2}{4} \quad (d_h \text{ es el diámetro de los orificios}); \quad (42)$$

$$Y_c = \frac{c}{S_c} \quad ; \quad (43)$$

$$S_c = \pi r_c^2 \quad (r_c \text{ es el radio de la cavidad}); \quad (44)$$

$$l_{eq} = t_w + 0.85 d_h \quad ; \quad (45)$$

$$t_w = \text{espesor de la pared del conducto.} \quad (46)$$

$$Z_c = \frac{\rho_0 c}{S_c} . \quad (47)$$

La relación para la matriz de transferencia, en este caso, se muestra a continuación (donde T es la matriz de transferencia para un conducto recto, dada por la ecuación (26)):

$$\begin{bmatrix} p_u \\ u_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ T \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ T \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_d \\ u_d \end{bmatrix} . \quad (48)$$

ii) **Resonador concéntrico en un medio estacionario.**

Esta cámara de expansión en particular consta de una región interna 1, y una región externa 2, que se unen por medio de un conducto perforado, como se muestra en la figura siguiente:

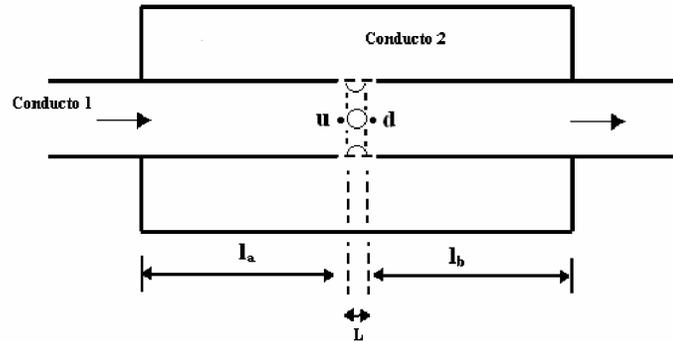


Fig.12 Resonador concéntrico de cuatro hoyos.

Para describir este resonador tenemos la siguiente relación de matriz de transferencia de orden 4×4 [6]:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ Z_1 u_1(0) \\ Z_2 u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(L) \\ p_2(L) \\ Z_1 u_1(L) \\ Z_2 u_2(L) \end{bmatrix}, \quad (49)$$

en donde $[T] = [A(0)][A(L)]^{-1}$.

Los elementos de la matriz $[A(z)]$ están dados, para $i = 1, 2, 3, 4$, de la siguiente manera:

$$A_{1,i} = \Psi_{3,i} e^{\beta_i z}, \quad (50)$$

$$A_{2,i} = \Psi_{4,i} e^{\beta_i z}, \quad (51)$$

$$A_{3,i} = -\frac{e^{\beta_i z}}{jk_0}, \quad (52)$$

$$A_{4,i} = -\frac{\Psi_{2,i} e^{\beta_i z}}{jk_0}, \quad (53)$$

en donde

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & \Psi_{44} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

es la matriz de los auto-vectores, o matriz modal; y

$$\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}, \quad (55)$$

son los auto-valores, de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_4 \\ -\alpha_5 & -\alpha_7 & -\alpha_6 & -\alpha_8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

en donde,

$$\alpha_1 = 0, \quad (57)$$

$$\alpha_2 = k_a^2, \quad (58)$$

$$\alpha_3 = 0, \quad (59)$$

$$\alpha_4 = -(k_a^2 - k_0^2), \quad (60)$$

$$\alpha_5 = 0, \quad (61)$$

$$\alpha_6 = -(k_b^2 - k_0^2), \quad (62)$$

$$\alpha_7 = 0, \quad (63)$$

$$\alpha_8 = k_b^2. \quad (64)$$

Los valores para las ecuaciones 57 a la 64, se evalúan usando:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (65)$$

$$k_a^2 = k_0^2 - \frac{4jk_0}{d_1\zeta}, \quad (66)$$

$$k_b^2 = k_0^2 - \frac{4jk_0 d_1}{(d_2^2 - d_1^2)\zeta}, \quad (67)$$

en donde ζ es la impedancia normalizada de la zona donde se encuentra la perforación. Para perforaciones en un medio estacionario esta impedancia es dada por la siguiente expresión [6]:

$$\zeta = \frac{[0.006 + jk_0(t_w + 0.75d_h)]}{\sigma}. \quad (68)$$

La notación para las ecuaciones vistas en esta sección (figura 12), es:

d_1 es el diámetro del conducto 1.

d_2 es el diámetro del conducto 2.

d_h es el diámetro de las perforaciones.

t_w es el espesor de la pared del conducto.

σ es la porosidad (σ = número de perforaciones dividido por unidad de longitud).

Luego, para obtener la relación para la matriz de transferencia de orden 2×2 , con la cual se calcula el TL mediante los parámetros de los cuatro polos, tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ Z_1 u_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(L) \\ Z_1 u_1(L) \end{bmatrix}, \quad (69)$$

en donde,

$$T_a = T_{11} + A_1 A_2, \quad (70)$$

$$T_b = T_{13} + B_1 A_2, \quad (71)$$

$$T_c = T_{31} + A_1 B_2, \quad (72)$$

$$T_d = T_{33} + B_1 B_2, \quad (73)$$

donde tenemos que:

$$A_1 = \frac{(X_1 T_{21} - T_{41})}{F_1}, \quad (74)$$

$$A_2 = T_{12} + X_2 T_{14}, \quad (75)$$

$$B_1 = \frac{(X_1 T_{23} - T_{43})}{F_1}, \quad (76)$$

$$B_2 = T_{32} + X_2 T_{34}, \quad (77)$$

$$F_1 = T_{42} + X_2 T_{44} - X_1 (T_{22} + X_2 T_{24}). \quad (78)$$

y,

$$X_1 = -j \tan(k_0 l_a), \quad (79)$$

$$X_2 = +j \tan(k_0 l_b). \quad (80)$$

4.6 Método numérico de Elementos de Contorno para el análisis tridimensional de cámaras de expansión y silenciadores simples de sección transversal circular en un medio estacionario no viscoso

A pesar de que las frecuencias de interés en el ruido de escape de motores de combustión interna son lo suficientemente bajas, y aunque el análisis de onda plana ha demostrado ser adecuado para describir el funcionamiento de conductos y silenciadores, los efectos tridimensionales son uno de los principales motivos de discrepancia en el funcionamiento de estos, en frecuencias altas. El análisis exacto para cámaras de expansión simples implica el uso de álgebra muy complicada, y el método numérico de Elementos Finitos (FEM) requiere tiempos de cómputo y base de almacenaje muy grandes.

Un método numérico simple se analiza en esta sección. Este método hace uso de las condiciones de contorno para la presión sonora p y para la velocidad de partícula u en un número de puntos igualmente espaciados en los planos de las discontinuidades de área (cambios abruptos de sección). Esto genera el número requerido de ecuaciones algebraicas para la evaluación de las amplitudes relativas de los modos. El método se presenta para la evaluación de los parámetros de los cuatro polos de las cámaras de expansión simples, de paredes rígidas, y de sección transversal circular para el caso de un medio estacionario. Los resultados obtenidos para la Pérdida de Transmisión TL, se comparan con los obtenidos empleando la teoría de onda plana, para luego analizar varios modos de orden superior y apreciar el efecto que esto produce sobre los resultados obtenidos para la pérdida de transmisión del silenciador [13].

4.6.1 Ondas tridimensionales en un medio estacionario no viscoso

Las ecuaciones básicas para las ondas en un medio estacionario no viscoso son:

$$\text{Continuidad de masa: } \rho_0 \nabla \cdot u + \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad (81)$$

$$\text{Equilibrio dinámico: } \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = 0; \quad (82)$$

Por medio de estas ecuaciones se obtienen las ecuaciones en 3D requeridas:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \right] p = 0, \quad (83)$$

donde el Laplaciano ∇^2 está dado de la siguiente manera:

a) En coordenadas cartesianas (para conductos rectangulares):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (84)$$

b) En coordenadas cilíndricas polares (para conductos cilíndricos como el estudiado en este caso):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (85)$$

4.6.1.1 Conductos Circulares

Debido a que los conductos estudiados en este trabajo son de sección transversal circular, es necesario hacer un estudio de la propagación de ondas en 3D para este tipo de geometría.

La ecuación de ondas (83), con el Laplaciano dado por la ecuación (85), entrega la propagación de ondas en conductos circulares (ver figura 13). Usando el

método de separación de variables, y escribiendo la dependencia temporal como $e^{j\omega t}$ y la dependencia de θ como $e^{jm\theta}$, se obtiene:

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_m R_m(r) e^{jm\theta} Z(z) e^{j\omega t}, \quad (86)$$

donde la función $Z(z)$ satisface la ecuación:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 Z. \quad (87)$$

Sustituyendo las ecuaciones (86) y (87) en la ecuación de onda, se obtiene una ecuación de Bessel para $R(r)$:

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} + \left(k_0^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R_m = 0. \quad (88)$$

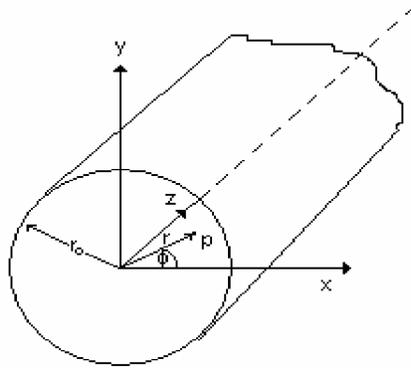


Fig. 13 Coordenadas para el sistema de propagación tridimensional en un conducto de sección transversal circular.

La ecuación (88) tiene una solución general dada por:

$$R_m = C_1 J_m(k_r r) + C_2 N_m(k_r r), \quad (89)$$

donde

$$k_r^2 = k_0^2 - k_z^2. \quad (90)$$

La función $N_m(k_r, r)$ tiende a infinito en $r = 0$ (el eje), pero la presión acústica en todo punto debe ser finita. Por esto, en este caso particular, la constante C_2 debe ser cero. Además la velocidad radial en las paredes ($r = r_0$) debe ser cero, es decir:

$$\frac{dJ_m(k_r r)}{dr} = 0, \text{ en } r = r_0. \quad (91)$$

Así, k_r toma sólo aquellos valores discretos en los cuales:

$$J'_m(k_r r_0) = 0. \quad (92)$$

Si denotamos el valor de k_r correspondiente a la n -ésima raíz de esta ecuación como $k_{r,m,n}$ se obtiene:

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m(k_{r,m,n} r) e^{jn\theta} e^{j\omega t} \times (A_{m,n} e^{-jk_{z,m,n} z} + B_{m,n} e^{+jk_{z,m,n} z}), \quad (93)$$

en donde,

$$k_{z,m,n} = (k_0^2 - k_{r,m,n}^2)^{1/2}. \quad (94)$$

Como el primer cero de J'_0 (o el de J_1) es cero, $k_{r,0,1} = 0$ y $k_{z,0,1} = k_0$. Por eso, para el modo (0,1), la ecuación (93) se reduce a la ecuación para las ondas planas que se propagan sin atenuación:

$$p(z, t) = [A e^{-jkz} + B e^{+jkz}] e^{j\omega t}. \quad (95)$$

En la mayor parte de la literatura [1], n representa el número de ceros de la derivada $J'_m(k_r r_0)$ y así también para la ecuación (92). Esto introduce una disimilitud entre las notaciones para tubos rectangulares y circulares. En conductos rectangulares, m y n representan el número de modos en la distribución de presión transversal. Podemos utilizar de forma similar a n para denotar el número de nodos circulares en la distribución de presión transversal para conductos circulares. Esto se muestra en la figura 14. Con esta notación el modo de onda plana tendría asociado el índice (0,0) tanto para conductos circulares como para rectangulares [1]. Los índices m y n tienen la misma connotación, esto es, el número de modos (en las direcciones respectivas) en la distribución de presión transversal. Por esto se adopta este tipo de notación.

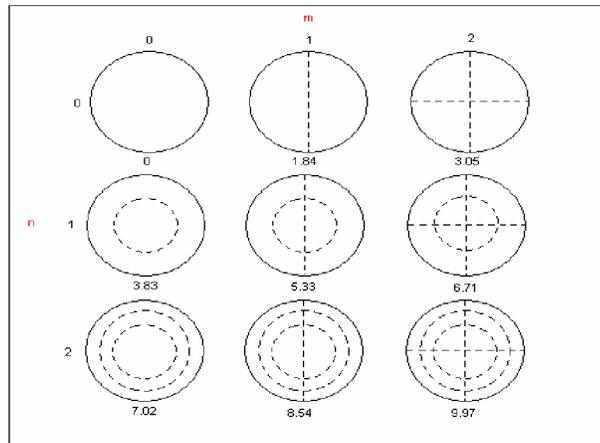


Fig. 14 Distribución de presión transversal para conductos circulares según el número de modos (m, n) presentes [(0,0) corresponde a la onda plana].

De acuerdo a esto, $n = 0$ representaría la primera raíz de la ecuación (92) y n representaría la $(n+1)$ -ésima raíz.

Los primeros dos modos de más alto orden (1,0) y (0,1) aparecerán si $k_{z,1,0}$ y $k_{z,0,1}$ son reales, esto es, si $k_0 > k_{r,1,0}$ y $k_{r,0,1}$. El primer cero de J'_1 ocurre en 1.84 y el segundo cero de J'_0 ocurre en 3.83. Entonces, los números de onda de corte para la aparición de estos modos serían $1.84/r_0$ y $3.83/r_0$, respectivamente. En otras palabras, el primer modo diametral comienza a propagarse cuando $k_0 r_0 = 1.84$ y el primer modo asimétrico cuando $k_0 r_0 = 3.83$. Si la frecuencia es lo suficientemente baja (o la longitud de onda es lo suficientemente grande), de forma que:

$$k_0 r_0 < 1.84, \quad \text{o} \quad \lambda > \frac{\pi}{1.84} D, \quad \text{o} \quad f < \frac{1.84}{\pi D} c_0, \quad (96)$$

donde D es el diámetro ($D = 2r_0$), entonces sólo se propagarán ondas planas.

4.6.2 Cámara de expansión de sección transversal circular

Para el análisis de una cámara de expansión de sección transversal circular (de manera análoga a los conductos circulares), utilizaremos coordenadas cilíndricas. Para la dependencia sinusoidal ($e^{j\omega t}$) del tiempo para la presión p , y para las paredes rígidas ($\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ en $r = R$), se tiene la ecuación (93), en donde también se introduce la ecuación (94).

La componente axial de la velocidad de partícula u_z , se relaciona con la presión p mediante:

$$\rho_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (97)$$

Luego, reemplazando la ecuación (93) en la ecuación (97) se obtiene:

$$u_z(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{k_{r,m,n}}{\omega \rho_0} J_m(k_{r,m,n} r) e^{jn\theta} e^{j\omega t} \times (A_{m,n} e^{-jk_{z,m,n} z} - B_{m,n} e^{+jk_{z,m,n} z}) \right]. \quad (98)$$

4.6.2.1 Localización de los puntos para el análisis modal de cámaras de expansión de sección circular en la entrada y la salida

La localización de los puntos para la cámara de expansión en la entrada y en la salida, nos dará el resultado del TL para dicha elección.

Por otro lado, la localización de los puntos indicados en la figura 15, no es única.

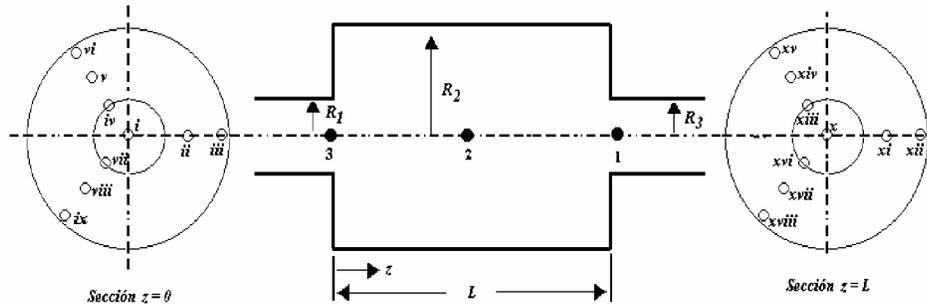


Fig. 15 Cámara de expansión de sección transversal circular con el detalle de los puntos escogidos en cada sección.

En la figura 15, se muestran nueve puntos, de los cuales, un punto está en el centro de la cámara en la discontinuidad de área (en la entrada, esto es en el punto 1), y los 8 puntos restantes se introducen en un anillo que se forma entre el conducto de entrada y el resto del área de la cámara. En el caso de la discontinuidad de área en la salida se usa la misma elección. En esencia, la disposición de

$$m = 0, 1, 2 \quad \text{y} \quad n = 0, 1, 2. \quad (99)$$

esta dada para tres puntos en cada una de las líneas radiales, siendo la excepción el punto en el centro, el cual tiene que estar en el radio cero. El principio equidistante entre dos puntos consecutivos no se aplica en general, lo importante es tomar sólo un punto en el centro y los demás puntos dentro del anillo.

Conociendo la expresión para la presión p y para la velocidad u (ecuaciones (93) y (98), respectivamente), tenemos que los valores para los números de onda $k_{r,m,n} r_0$ están dados por la siguiente tabla:

n	0	1	2
m			
0	0.0	3.83	7.02
1	1.84	5.33	8.53
2	3.05	6.71	9.97

Tabla 1. Valores para $k_{r,m,n} r_0$

De esta forma, aplicando la ecuación (94), se pueden obtener los números de onda $k_{z,m,n}$.

4.6.3 Condiciones para la compatibilidad en las discontinuidades de área

Para la compatibilidad en las discontinuidades de área se requiere de un cierto número de ecuaciones (20 ecuaciones), las cuales son proporcionadas por los requisitos físicos del problema, en los cuales, la presión sonora p y la velocidad de partículas u son iguales en las ensambladuras de la cámara de expansión, en la entrada y en la salida de ésta. Además, se requiere que la velocidad axial de partículas normal a la parte rígida de las dos placas en los extremos, sea cero.

Considerando el párrafo anterior, existen $2(M+1)(N+1)+2$ valores incógnitos, A_3 , B_3 , $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ ($m = 0.1.2.....,M$; $n = 0.1.2.....,N$), A_1 y B_1 . Aquí, M (el valor máximo de m) y N (el valor máximo de n), no necesitan ser iguales. Así, habría 20 variables para $M = N = 2$ (m y $n = 0,1,2$), requiriendo 20 ecuaciones para la compatibilidad en el sistema analizado.

Las ecuaciones en cada punto escogido (ver figura 15), son las siguientes:

$$p_2(r_q, \theta_q, 0) = A_3 + B_3, \quad q=i \quad (100)$$

$$u_2(r_q, \theta_q, 0) = \frac{k_0}{\omega \rho_0} (A_3 - B_3), \quad q=i \quad (101)$$

$$u_2(r_q, \theta_q, 0) = 0, \quad q=ii \text{ al } ix \quad (102)$$

$$u_2(r_q, \theta_q, L) = 0, \quad q=xi \text{ al } xviii \quad (103)$$

$$p_2(r_q, \theta_q, L) = A_1 + B_1, \quad q=x \quad (104)$$

$$u_2(r_q, \theta_q, L) = \frac{k_0}{\omega \rho_0} (A_1 - B_1), \quad q=x, \quad (105)$$

en donde p_2 y u_2 están dados por las ecuaciones (93) y (98), respectivamente.

Cabe destacar que el esquema de la enumeración es totalmente arbitrario. Así, hay 20 ecuaciones para un determinado número de variables, en las que se encuentra solución para un valor arbitrario de A_3 (por ejemplo $A_3 = I$). Se puede observar que la amplitud reflejada de la onda B_1 , depende del valor de A_1 y de la terminación de la cámara en el punto 1 (figura 15) y, por lo tanto, esta no es una variable independiente.

Esto queda claro al escribir la relación de la matriz de transferencia de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad (106)$$

en donde

$$v = \rho_0 S u. \quad (107)$$

Luego, los valores de los elementos de la matriz satisfacen:

$$T_{11} = \left. \frac{p_3}{p_1} \right|_{v_1=0} = \left. \frac{A_3 + B_3}{A_1 + B_1} \right|_{B_1 = A_1}, \quad (108)$$

$$T_{12} = \left. \frac{p_3}{v_1} \right|_{p_1=0} = Y_1 \left. \frac{A_3 + B_3}{A_1 - B_1} \right|_{B_1 = -A_1}, \quad (109)$$

$$T_{21} = \left. \frac{v_3}{p_1} \right|_{v_1=0} = \frac{1}{Y_3} \left. \frac{A_3 - B_3}{A_1 + B_1} \right|_{B_1 = A_1}, \quad (110)$$

$$T_{22} = \left. \frac{v_3}{v_1} \right|_{p_1=0} = \frac{Y_1}{Y_3} \left. \frac{A_3 - B_3}{A_1 - B_1} \right|_{B_1 = -A_1}, \quad (111)$$

en donde

$$Y = \frac{c}{S}. \quad (112)$$

Así, el sistema anterior de 20 ecuaciones no homogéneas, tiene que ser resuelto cuatro veces con distintas condiciones para B_1 y, por lo tanto, de p_1 y de v_1 , para así calcular los parámetros de cuatro polos. Se puede notar que el determinante de la matriz de transferencia vale uno para todas las frecuencias.

Finalmente, se puede calcular la pérdida de transmisión de la siguiente manera:

$$TL = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{2} (T_{11} + T_{12}/Y_1 + Y_3 T_{21} + T_{22}) \right|. \quad (113)$$

5 Metodología

La metodología utilizada en la presente tesis consta de dos partes: la metodología de programación, utilizada para la modelación teórica de las diferentes configuraciones de cámaras de expansión (obtención del TL), y la metodología de medición empleada para obtener el TL de manera experimental.

5.1 Metodología de programación utilizada

Se utilizó para la modelación teórica el software MATLAB 6, el cual facilita la modelación teórica mediante el Método de la Matriz de Transferencia, ya que este software está hecho para trabajar principalmente con matrices.

Los programas computacionales que implementan la modelación teórica, se desarrollan como funciones para el cálculo de las matrices de transferencia que constituyen los diferentes elementos de las cámaras de expansión estudiadas, para luego ocuparlas en una función final que calcula la Pérdida de Transmisión TL , a través del Método de la Matriz de Transferencia, de cada silenciador.

En cada una de las funciones diseñadas, se definen en primer lugar las variables de entrada (temperatura, longitudes de radio y largo, velocidad de flujo, frecuencia, etc.), y luego se introducen las fórmulas que describen teóricamente cada elemento de los distintos silenciadores estudiados.

5.2 Introducción general de la metodología utilizada para las mediciones experimentales

Se dispuso de un montaje experimental, el cual permitió realizar las mediciones adecuadas para cumplir con los objetivos propuestos. El montaje experimental se muestra en la figura 16.

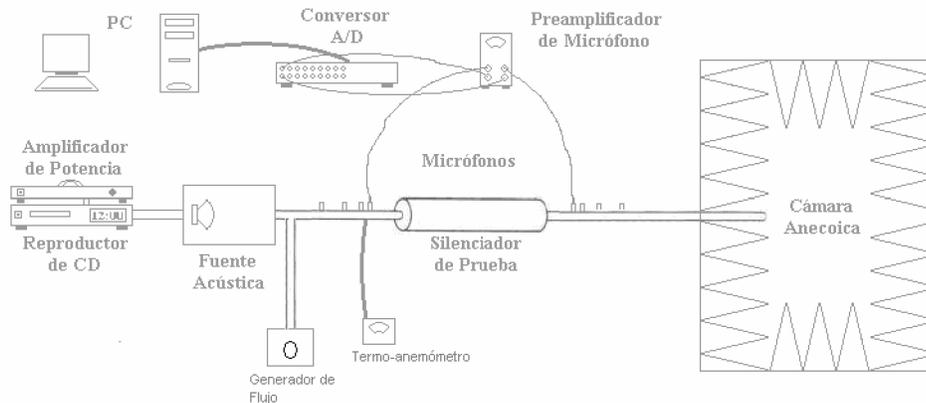


Fig.16 Montaje experimental

Para encontrar estos parámetros acústicos se aplicó el “método de la función de transferencia” *ISO/FDIS 10534-2:1998(E)* [14]. Este método consiste en la medición de presiones en dos puntos fijos a lo largo de un conducto recto o un tubo de impedancia. La instalación del sistema de medición debe cumplir con ciertos requerimientos que están especificados en la norma.

La adquisición de los datos se realizó con las señales que provienen de los dos micrófonos instalados en el montaje experimental. Para esto, se implementó un sistema de medición con una interfase analógica/digital (DSP o “DAQ”). Para la adquisición de estos datos se trabajó con el software LabVIEW 6i y para el posterior análisis de los datos se trabajó con MATLAB 6.

En LabVIEW se programó la adquisición de datos y el programa de comunicación con la tarjeta aduicidora. Además, LabVIEW es capaz de calcular funciones instantáneas, como por ejemplo la función de transferencia, y exportar estos datos procesados y promediados a MATLAB 6.

MATLAB 6 se utilizó principalmente para obtener los resultados de los parámetros acústicos estudiados y los gráficos de éstos en el dominio de la frecuencia. Por otro lado, se utilizó para obtener resultados teóricos, con el objeto de compararlos con los resultados experimentales.

5.2.1 Métodos de medición utilizados

Para determinar el TL de manera experimental se utilizó el “Método de las dos cargas” y el “Método de las dos fuentes” [8] y [9].

5.2.1.1 Método de las dos cargas

El método de las dos cargas, se basa en la aproximación de la Matriz de Transferencia de nuestro elemento de prueba (silenciador).

Este método consiste en la conducción del elemento de prueba con dos diferentes cargas (Z_a y Z_b) y con la fuente acústica en el mismo lado. Estas dos configuraciones se muestran en la figura 17.

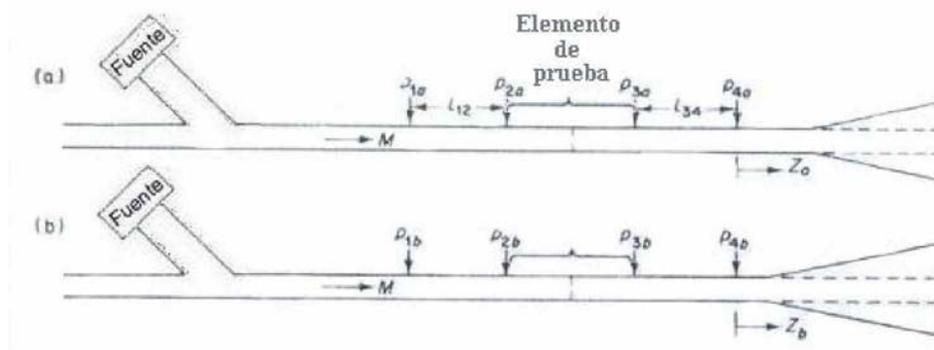


Fig.17 Arreglo experimental para el Método de las dos cargas [15].

Básicamente, la metodología de esta técnica es:

- medir la presión acústica (o mejor dicho sus razones más conocidas como funciones de transferencia) en 4 puntos fijos, como se muestra en la figura 11(a);
- cambiando la impedancia de carga, tal como se muestra en la figura 11(b), y midiendo la presión acústica en los mismos cuatro puntos anteriores;
- calculando A, B, C y D (parámetros de los cuatro polos del elemento de prueba), por medio de un analizador FFT de dos canales.

5.2.1.2 Método de las dos fuentes

El método de las dos fuentes, en su comportamiento teórico, sigue las mismas ecuaciones que el método de las dos cargas. La diferencia radica en que el método de las dos fuentes utiliza otro procedimiento para la adquisición de los datos (función de transferencia), que a continuación se explicará en forma muy resumida.

Cuando utilizamos el método de las dos fuentes, se colocan dos fuentes como se ilustra en la figura 18.

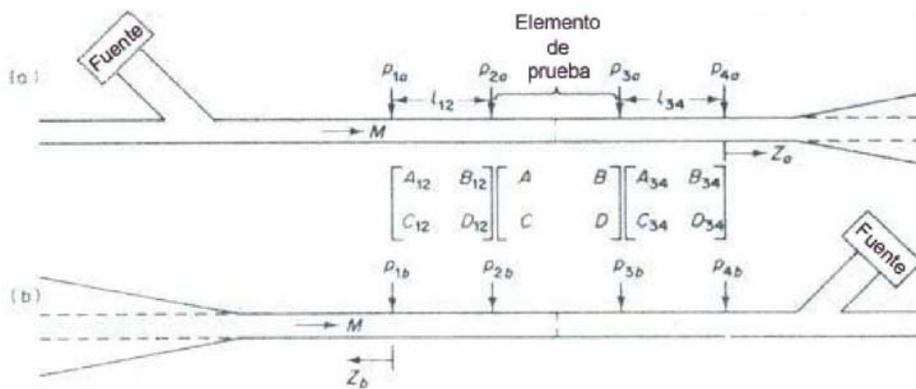


Fig.18 Arreglo experimental para el Método de las dos fuentes [15].

Al igual que el método de las dos cargas, el objetivo principal del método de las dos fuentes es:

- Medir la presión acústica en 4 puntos fijos, tal como se muestra en la figura 18(a).
- Cambiando la fuente acústica al otro extremo de nuestra configuración, como se muestra en la figura 18(b), y midiendo la presión acústica en los mismos cuatro puntos anteriores.
- Por último, se calculan A, B, C y D (parámetros de los cuatro polos del elemento de prueba), por medio de un analizador FFT de dos canales.

Para encontrar los parámetros de los cuatro polos de nuestro elemento de prueba, utilizamos el Método de la Matriz de Transferencia. Las ecuaciones que se obtienen son las mismas que las ecuaciones del Método de las dos cargas, con y sin flujo al interior de nuestro arreglo experimental.

Los detalles del método experimental y de los métodos de medición utilizados en este estudio, se muestran con mayor detalle en los anteriores trabajos de tesis, desarrollados durante el proyecto FONDECYT que ha financiado el presente trabajo [8] y [9].

6 Resultados

Para obtener la pérdida de transmisión experimentalmente, se midió con el montaje de la figura 16, utilizando una separación de micrófonos de $s = 3, 6$ y 12 cm. Para estos efectos se utilizó un programa (creado en MATLAB), que permitió procesar los datos para las funciones de transferencia obtenidas mediante LabVIEW 6i.

A continuación se muestran los resultados experimentales obtenidos mediante la utilización del Método de las dos cargas y el Método de las dos fuentes y los resultados obtenidos teóricamente mediante del Método de la Matriz de Transferencia y el Método de Elementos de Contorno (este último, particularmente para las cámaras de expansión simple).

6.1 Resultados obtenidos en ausencia de flujo

La figura 19 muestra la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión simple de 195 mm. de longitud y radio interior de 77.85 mm., con una temperatura media de 14.9 ° Celsius.

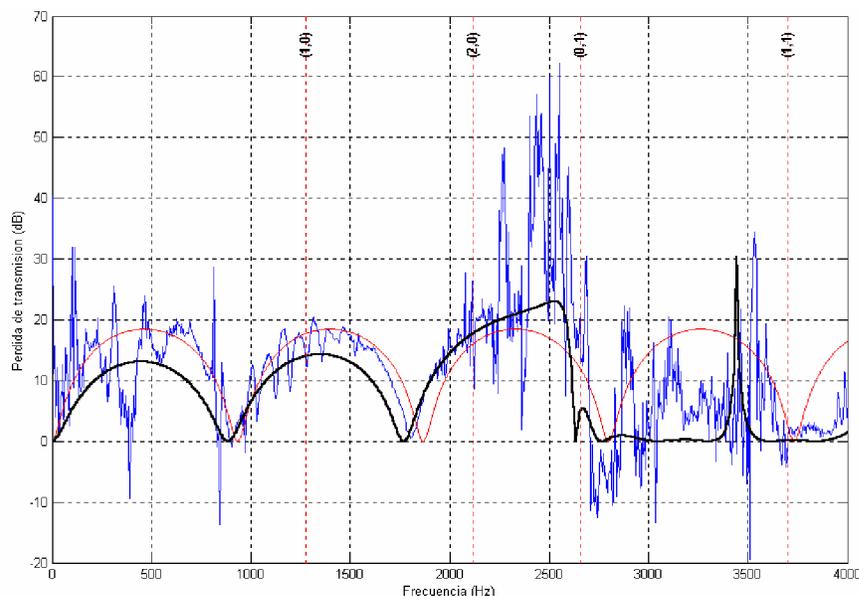


Fig.19 Pérdida de Transmisión en Cámara de expansión simple usando tres métodos.
—Experimental, —Matriz de Transferencia, —Elementos de Contorno.

La figura 20 muestra la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión simple de 500 mm. de longitud y radio interior de 77.85 mm., con una temperatura media de 23.3 ° Celsius.

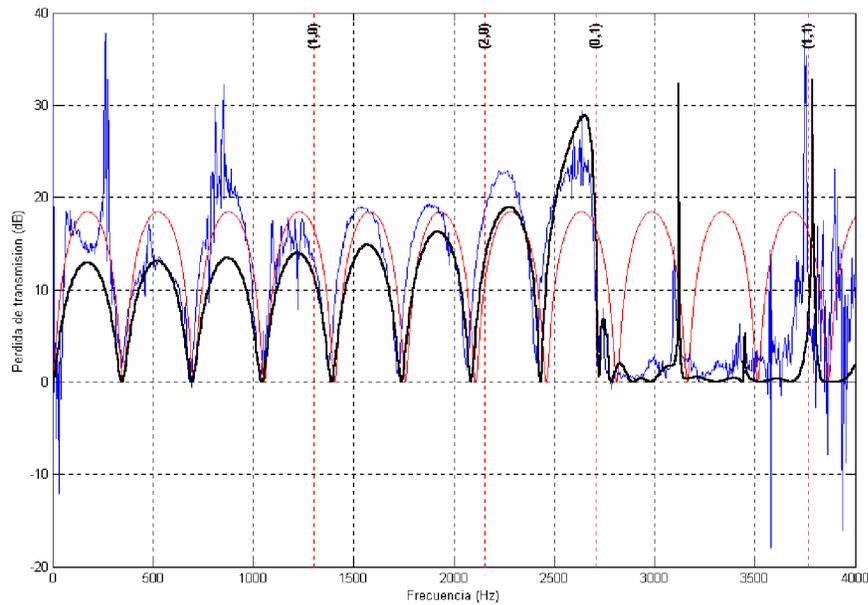


Fig.20 Pérdida de Transmisión en Cámara de expansión simple usando tres métodos.
— Experimental, — Matriz de Transferencia, — Elementos de Contorno.

La figura 21 muestra la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión con un conducto extendido en la entrada, hasta la mitad de la cámara; la cámara es de 195 mm. de longitud y radio interior de 77.85 mm., el largo y el radio del conducto extendido son 97.5 mm. y 19.05 mm., respectivamente, con una temperatura media de 14.4 ° Celsius.

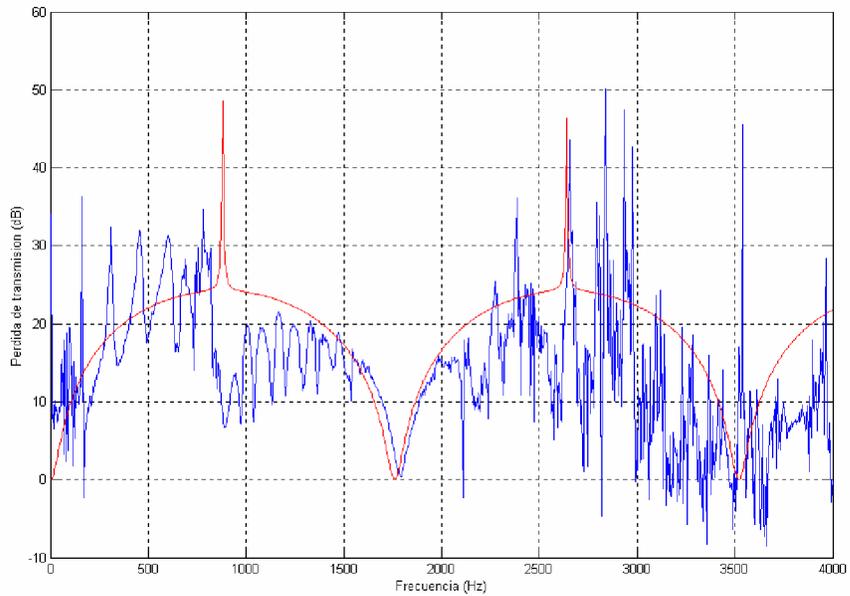


Fig.21 Pérdida de Transmisión en Cámara de expansión con conducto extendido.
 —Experimental, —Matriz de Transferencia.

La figura 22 muestra la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión con un resonador concéntrico de cuatro orificios; la cámara es de 195 mm. de longitud y radio interior de 77.85 mm., el radio del conducto del resonador es de 19.05 mm., las perforaciones son de 10 mm., el espesor del conducto es de 4 mm., con una temperatura media de 20.1 ° Celsius.

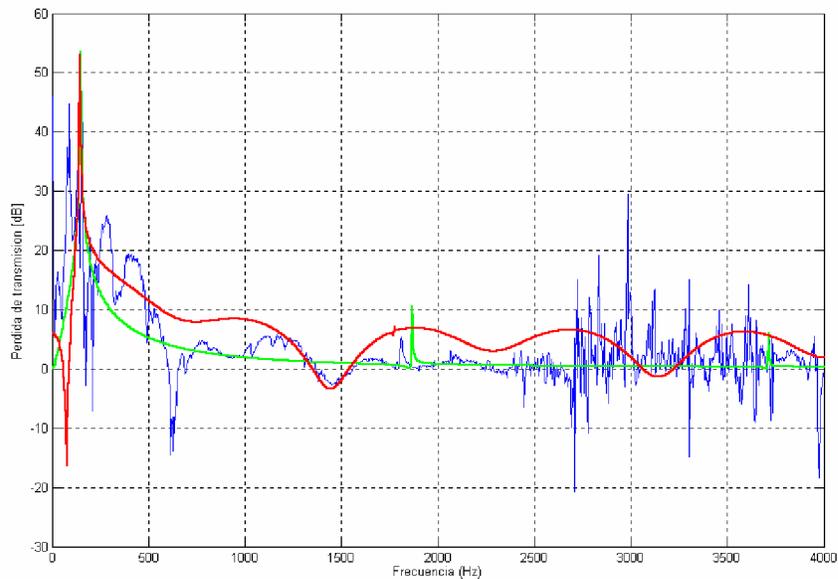


Fig.22 Pérdida de Transmisión en Cámara de expansión con resonador concéntrico de cuatro orificios, usando tres métodos.
 —Experimental, —Resonador concéntrico i), —Resonador concéntrico ii).

6.2 Resultados obtenidos en presencia de flujo

En este punto se presentan los resultados obtenidos en presencia de flujo medio, cuya velocidad se midió con un termo-anemómetro.

La figura 23 muestra la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión simple de 195 mm. de longitud y radio interior de 77.85 mm., con una temperatura media de 19.7 ° Celsius, y un flujo medio de aproximadamente 7 [m/s].

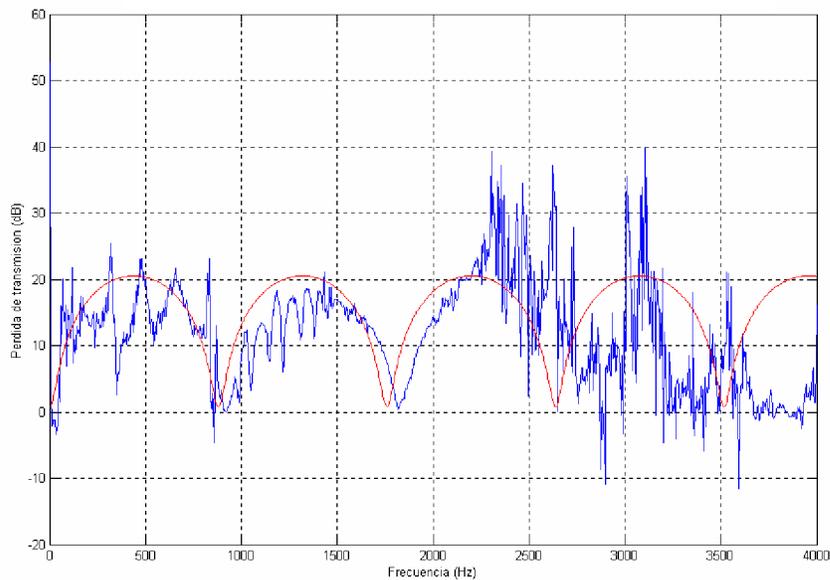


Fig.23 Pérdida de Transmisión en Cámara de expansión simple en presencia de flujo medio.
—Experimental, —Matriz de Transferencia.

La figura 24 muestra la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión simple de 195 mm. de longitud y radio interior de 77.85 mm., con una temperatura media de 23.8 ° Celsius, y un flujo alto de aproximadamente 15 [m/s].

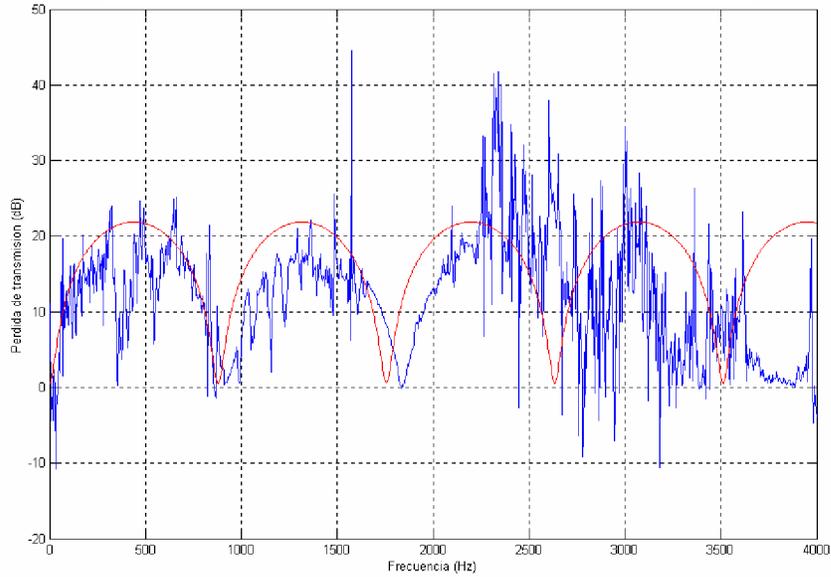


Fig.24 Pérdida de Transmisión en Cámara de expansión simple en presencia de flujo alto.
 —Experimental, —Matriz de Transferencia.

La figura 25 muestra la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión simple de 500 mm. de longitud y radio interior de 77.85 mm., con una temperatura media de 17.5 ° Celsius, y un flujo medio de aproximadamente 7 [m/s].

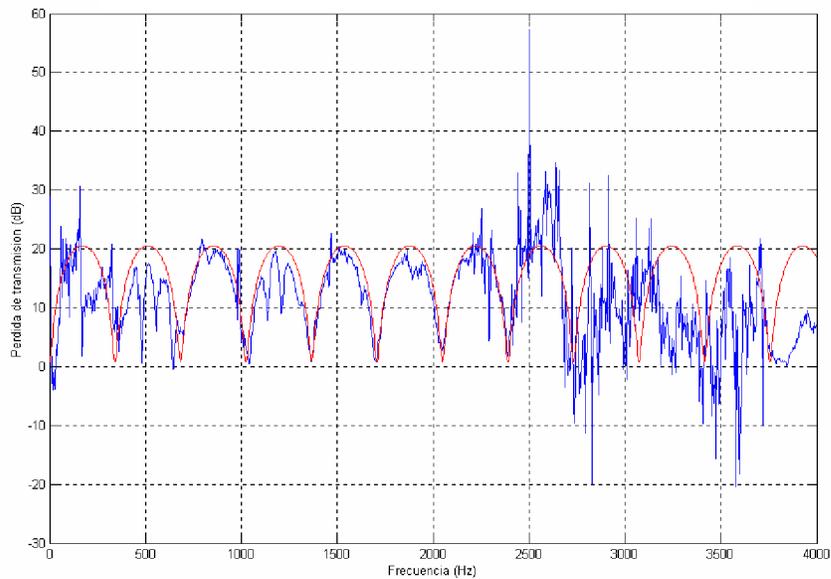


Fig.25 Pérdida de Transmisión en Cámara de expansión simple en presencia de flujo medio.
 —Experimental, —Matriz de Transferencia.

La figura 26 muestra la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión simple de 500 mm. de longitud y radio interior de 77.85 mm., con una temperatura media de 25.3 ° Celsius, y un flujo alto de aproximadamente 15 [m/s].

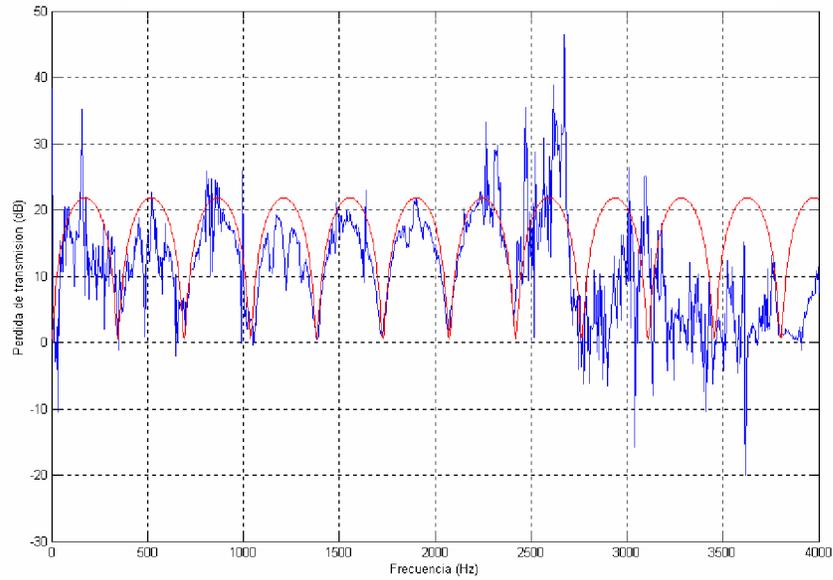


Fig.26 Pérdida de Transmisión en Cámara de expansión simple en presencia de flujo alto.
—Experimental, —Matriz de Transferencia.

7 Análisis de los Resultados

En las dos primeras figuras (19 y 20), se muestran los resultados para la Pérdida de Transmisión de las cámaras de expansión simples de 195mm. de longitud (figura 19), y de 500 mm. de longitud (figura 20), en las cuales se puede observar que los resultados teóricos de los dos métodos aplicados, se acercan de buena manera a los resultados obtenidos experimentalmente.

En estos resultados se puede apreciar claramente que el Método de la Matriz de Transferencia tiene una limitación para frecuencias altas, y que el Método de Elementos de Contorno (análisis modal), refleja de mejor manera el comportamiento de los silenciadores analizados, como era lo esperado.

En la figura 21, se puede observar una mayor correspondencia en el rango de frecuencias comprendido entre 1.500 Hz. y 2.000 Hz., de los resultados experimentales con respecto a los resultados teóricos obtenidos a través del Método de la Matriz de Transferencia.

En la figura 22, se puede observar que los dos métodos teóricos aplicados para la modelación de la cámara de expansión con resonador concéntrico de cuatro orificios, se acercan levemente a los resultados obtenidos experimentalmente.

Con respecto a los resultados obtenidos en presencia de flujo (figuras 23, 24, 25 y 26), se puede observar una tendencia, aunque no de manera muy clara, lo cual puede deberse al ruido generado por el propio flujo dentro del silenciador.

8 Conclusiones

-Se concluye, en primer lugar, que el análisis de ondas tridimensionales en los conductos, refleja de mejor manera el real comportamiento de los silenciadores estudiados en la presente tesis. No obstante, no se pueden descartar los resultados obtenidos por medio del Método de la Matriz de Transferencia en bajas frecuencias (bajo los 2.500 Hz.), pues la aproximación de este método, en este rango de frecuencias, se asemeja bastante a los resultados experimentales.

-Se puede mencionar que en las dos cámaras de expansión simples (195mm. y 500 mm. de longitud, figuras 19 y 20 respectivamente), la influencia de los modos, después de la tercera frecuencia de corte, se hace más notoria.

-En cuanto al resonador concéntrico de cuatro orificios, se puede mencionar que el primer método aplicado se aproxima de mejor manera a los resultados obtenidos experimentalmente. Esto se puede ver en general comparando las curvas de la figura 22, pero más precisamente en los 100 Hz., y 1.800 Hz. aproximadamente, lo cual supone que este método es mejor. Sería bueno mencionar además que la curva experimental no se asemeja de buena manera a los dos resultados teóricos, lo cual puede deberse a defectos en la fabricación del silenciador. Esto afectaría la modelación numérica, pues es necesario conocer exactamente las dimensiones de las perforaciones para obtener una buena predicción teórica del TL .

-El Método de la Matriz de Transferencia demostró ser de gran utilidad al momento de modelar silenciadores compuestos por diferentes elementos.

-En general, los resultados teóricos para la predicción del TL , cumplen de buena manera las expectativas propuestas en los objetivos generales y específicos.

9 Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi Madre, por su infinito sacrificio y constante apoyo a lo largo de mi carrera, por ayudarme y levantarme en los malos momentos, por su confianza e inmensa paciencia. A mi Padre, a mis hermanos, cuñada y sobrinos, por su estímulo en cada momento.

A Andrea, por su amor y paciencia, dándome fuerzas cada día, acompañándome y apoyándome para terminar este largo camino.

Al Dr. Jorge Arenas B., profesor patrocinante de este trabajo, por la entrega de valiosos conocimientos y orientación, y la oportunidad de trabajar junto a él, un académico de excelencia.

Al profesor Víctor Poblete R., por su constante apoyo a lo largo de mi permanencia en la Universidad.

Al profesor Jorge Sommerhoff H., por su buen humor y buena disposición para finalizar este trabajo.

A Juan Luis Aguayo y Carlos Jurado, en especial a “Andi”, por su respaldo y ayuda para completar de buena manera la parte experimental de esta Tesis.

A Daniel Mena, por su apoyo en cada momento.

A don Víctor Cumián, por su cooperación y buena disposición siempre.

A Magali Pugin, Arturo Hernández, y Sarita Flández, por ocupar el lugar de mi Familia tan lejos de mi hogar.

A mis tías y amigos, por su apoyo y estímulo para culminar mi carrera.

Finalmente, quisiera agradecer al apoyo de CONICYT, por confiar y financiar esta Tesis, estimulando el desarrollo de la investigación en el área de la acústica, a través del proyecto FONDECYT N° 1020196.

10 Referencias Bibliográficas

- [1]. Munjal, M.L., *Acoustics of Ducts and Mufflers*, New York: Wiley-Interscience (1987).
- [2]. Arenas, J.P. and Poblete, V., Asymptotic approximation for sound propagation in ducts carrying low subsonic mean flow, *Mathematical and Computer Modelling* 38(5-6), 459-463 (2003).
- [3]. Gerges, S.N.Y. & Arenas, J.P., “Fundamentos y Control del Ruido y Vibraciones”, NR Editora, Florianópolis, SC (2004).
- [4]. Arenas, J.P. and Poblete, V., Low-frequency models to compare acoustical performance of ducts of gradual area change, *Journal of Acoust Soc. Am.* 112(5) Pt.2, 2425-2426 (2002).
- [5]. Arenas, J.P. and Crocker, M.J., Numerical solution for the transmission loss in pipes and reactive expansion chambers of gradual area change, *Noise Control Engineering Journal* 48(5), 224-230 (2001).
- [6]. Mechel, F.P., *Formulas of Acoustics*, Editorial Springer, Berlin (2004).
- [7]. Arenas, J.P. and Crocker, M.J., A note on a WKB application to a duct of varying cross-section, *Applied Mathematics Letters* 14(6), 667-671 (2001).
- [8]. Jurado, C., “Estudio experimental de la impedancia acústica en conductos y silenciadores bajo diferentes condiciones de borde”, Tesis presentada para optar al Grado Académico de Licenciado en Acústica. Universidad Austral de Chile, 2004.
- [9]. Aguayo, J., “Aplicación de técnicas digitales de medición del aislamiento suministrado por silenciadores en presencia de flujo”, Tesis presentada para optar

al Grado Académico de Licenciado en Acústica. Universidad Austral de Chile, 2005

[10]. Tao, Z. and Seybert, A. F., “A Review of Current Techniques for Measuring Muffler Transmission Loss,” SAE Paper 03NVC-38, Society of Automotive Engineers, Inc. (2001).

[11]. Möser, M. y Barros, J.L. Ingeniería Acústica, Teoría y Aplicaciones, primera edición.

[12]. Gerges S. N. Y., Jordan R., Thieme F. A., Bento Coelho J. L. & Arenas J. P., “Muffler Modeling by Transfer Matrix Method and Experimental Verification”, J. of the Braz. Soc. of Mec. Sci. & Eng., 27(2), pp. 132-140 (2005).

[13]. Munjal, M.L., “A simple numerical method for three-dimensional analysis of simple expansion chambers mufflers”, J. Sound and Vibration 116(1), 71-88 (1987).

[14] International Organization for Standardization “Acoustics - Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes. Part 2: Transfer-function method”, *ISO/FDIS 10534-2*, (1998).

[15] Munjal, M.L. y Doige, A.G., “Theory of a two source-location method for direct experimental evaluation of the four-pole parameters of an aeroacoustic element”, J. of Sound and Vibration, 141(2), 323-333 (1990).

11 Anexos

11.1 Programas creados en MATLAB

A continuación se presentan los códigos en MATLAB creados para simular el comportamiento de las distintas cámaras de expansión estudiadas en la presente Tesis, calculando la Pérdida de Transmisión a través del método de la Matriz de Transferencia.

Anexo 1 “Fórmula que nos permite calcular la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión de sección transversal circular”

```
1 function y=TLTeorico(r1,r2,l,fs,m,t)
2 %Calcula la Perdida de transmision (TL), de una camara de expansion simple.
3 %TLteorico(r1,r2,l,fs,m,t);
4 %r1=radio del conducto de entrada(r1=r3 cond. salida),metros
5 %r2=radio del conducto del silenciador, metros
6 %fs=frecuencia de sampleo medicion experimental, Hz
7 %t=temperatura media medicion experimental, °Celcius
8 %l=longitud horizontal cavidad del silenciador, metros
9 %m=numero de mach
10 fmax=fs/2;
11 s1=pi*r1^2;
12 s2=pi*r2^2;
13 faux=linspace(0,fmax,fmax);
14 for ii=1:length(faux)
15   TL(ii)=tl(s1,s2,l,faux(ii),m,t);
16 end
17 plot(faux,TL,'B');
18 xlabel('Frecuencia (Hz)'); ylabel('Perdida de transmision (dB)');
19 grid on;
20 title('Perdida de transmision en camara de expansion simple');
21 zoom on;
22 function y=tl(s1,s2,l,faux,m,t)
23 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
24 T=SudExp(s1,s2,m)*tubolineal(s2,l,m,faux,c)*SudCont(s2,s1,m);
25 z=1.18*c/s1;
26 y=20*log10((abs( T(1,1) + T(1,2)/z + T(2,1)*z + T(2,2) )/2));
```

Este programa utiliza la matriz de transferencia de un conducto recto rígido (ecuación 26), y las matrices de transferencia para la expansión abrupta (ecuaciones 28 y 29) y contracción abrupta (ecuaciones 28 y 30).

Se muestra a continuación las funciones utilizadas para obtener el TL de este caso.

Función para la obtención de la matriz de transferencia de un conducto recto rígido de sección transversal circular.

```

1 function T=tubolineal(r,l,m,f,t)
2 %Calcula la Perdida de transmision (TL), de un conducto recto de longitud l.
3 % T=tubolineal(s,l,m,f,c)
4 %r=radio del conducto, metros
5 %f=frecuencia, Hz
6 %t=temperatura media medicion experimental, °Celsius
7 %l=longitud horizontal conducto recto, metros
8 %m=numero de mach
9 s1=pi*r1^2;
10 c=343.2*sqrt(0.9317+T/293);
11 kc=(2*pi*f/c)/(1-m^2);
12 z=1.18*c/s;
13 T=exp(-j*m*kc*l)*[cos(kc*l)    j*z*sin(kc*l);...
14    j/z*sin(kc*l)    cos(kc*l)];

```

Función para la obtención de la matriz de transferencia de la expansión abrupta de la sección transversal.

```

1 function T=SudExp(s1,s2,m)
2 % T=SudExp(s1,s2,m)
3 AdiabExp=1.4;
4 kd=(s2/s1-1)^2;
5 Zd=1.18*340/s2;
6 T=[1-kd*m^2/(1-m^2)    kd*m*Zd;...
7 (AdiabExp-1)*kd*m^3/(1-m^2)/Zd  1-(AdiabExp-1)*kd*m^2/(1-m^2)];

```

Función para la obtención de la matriz de transferencia para la contracción abrupta de la sección transversal.

```

1 function T=SudCont(s1,s2,m)
2 % T=SudCont(s1,s2,m)
3 AdiabExp=1.4;
4 kd=(1-s2/s1)/2;
5 Zd=1.18*340/s2;
6 T=[1-kd*m^2/(1-m^2)    kd*m*Zd;...
7 (AdiabExp-1)*kd*m^3/(1-m^2)/Zd  1-(AdiabExp-1)*kd*m^2/(1-m^2)];

```

Anexo 2 “Fórmula que nos permite calcular la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión de sección transversal circular con conducto extendido en la entrada, o conducto extendido en la salida”

```

1 function tuboextendido(r1,r2,l,fs,m,t)
2 %Calcula la Perdida de transmision de un silenciador con conducto extendido.
3 %tuboextendido(r1,r2,l,fs,m,t);
4 %fs=frecuencia, Hz
5 %t=temperatura media medicion experimental, Celcius
6 %l=longitud horizontal cavidad del silenciador, metros
7 %r1=radio del conducto de entrada(r1=r3 cond. salida),metros
8 %r2=radio del conducto del silenciador, metros
9 %m=numero de mach
10 faux=linspace(0.1,fs,1000);
11 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
12 Su=pi*((r1)^2);
13 Sd=pi*((r2)^2);
14 z=1.18*c/Su;
15 for ii=1:length(faux)
16 T=tubolineal(Su,l/2,m,faux(ii),c) * Ext(Su,Sd,l/2,m,faux(ii),c,1) * ...
17 tubolineal(Sd,l/2,m,faux(ii),c) * SudCont(Sd,Su,m);
18 TL(ii)=20*log10((abs( T(1,1) + T(1,2)/z + T(2,1)*z + T(2,2) )/2));
19 end
20 plot(faux,TL,'b')
21 xlabel('Frecuencia (Hz)'); ylabel('Perdida de transmision (dB)');
22 grid on;
23 title('Perdida de transmision en camara de expansion con tubo extendido');

```

Este programa utiliza la matriz de transferencia de un conducto recto rígido (ecuación 26), y las matrices de transferencia para la contracción abrupta (ecuaciones 28 y 30) y para un conducto extendido (ecuaciones 33 a la 40) .

Se muestra a continuación las funciones utilizadas para obtener el TL de este caso.

Función para la obtención de la matriz de transferencia de un conducto extendido en la entrada y/o la salida.

```

1 function T=Ext(Su,Sd,l2,m,f,c,opcion)
2 % T=Ext(Su,Sd,l2,m,f,c,opcion)
3 % Calcula la Matriz de tranferencia T de 2 tipos de silenciadores definidos por opcion
4 % opcion: 1=conducto extendido en la salida
5 %      2=conducto extendido en la entrada
6 switch opcion
7 case 1
8     Cd=-1; Cr=-1; kd=(1-Sd/Su)/2;
9
10 case 2
11     Cd=-1; Cr=1; kd=(Sd/Su-1)^2;
12 otherwise

```

```

13 error('invalido valor de opcion tipear "help Ext" para mas informacion')
14 end
15 Zu=1.18*c/Su;
16 Zd=1.18*c/Sd;
17 Z2=1.18*c/abs(Sd-Su);
18 Zr=-j*Z2*cot(2*pi*f/c*12);
19 Sr=abs(Sd-Su);
19 T=[1 kd*m*Zd;...
20 Cr*Sr/(Cr*Sr*Zr+Su*m*Zu) (Cr*Sr*Zr- m*Zd*(Cd*Sd+kd*Su))/(Cr*Sr*Zr+Su*m*Zu)];

```

Anexo 3 *“Fórmula que nos permite calcular la Pérdida de Transmisión de una cámara de expansión de sección transversal circular con resonador concéntrico de cuatro orificios”*

i) Cámara de expansión con Resonador concéntrico de cuatro orificios.

```

1 function TLtuboperforado(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,fs,m,t)
2 %Calcula la Perdida de transmision (TL), de un silenciador con resonador concentrico.
3 %TLtuboperforado(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,fs,m,t)
4 %t=temperatura media medicion experimental, Celcius
5 %la=longitud horizontal (desde el principio hasta la mitad del conducto), metros
6 %lb=longitud horizontal (desde la mitad del conducto hasta la salida), metros
7 %r1=radio del conducto de entrada(r1=r3 cond. salida), metros
8 %r2=radio del conducto del silenciador, metros
9 %nh=numero de perforaciones
10 %dh=diametro de las perforaciones, metros
11 %tw=ancho de la pared del conducto, metros
12 %m=numero de mach
13 if nargin==0 % valores por defecto cuando la funcion no tiene valores de entrada
14 fs=8000;
15 t=20;
16 r1=0.03;
17 r2=0.08;
18 nh=4;
19 dh=0.009;
20 la=0.2;
21 lb=0.2;
22 tw=0.002;
23 m=0;
24 end
25 faux=linspace(0.1,fs/2,1000);
26 s1=pi*r1^2;
27 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
28 z=1.18*c/(pi*r1^2);
29 for ii=1:length(faux)
30 T=[1 1/z 0]*tubolineal(s1,lb,m,faux(ii),c)*tuboperforado(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,t,faux(ii))*...
31 tubolineal(s1,la,m,faux(ii),c)*[1 z;0 1];
32 TL(ii)=20*log10((abs( T(1,1) + T(1,2)/z + T(2,1)*z + T(2,2) ))/2);
33 end
34 plot(faux,TL,'b')
35 xlabel('Frecuencia (Hz)'); ylabel('Perdida de transmision [dB]');
36 grid on;
37 title(['Perdida de transmision en Resonador Concentrico de ' num2str(nh) ' Hoyos']);

```

Este programa utiliza la matriz de transferencia de un conducto recto rígido (ecuación 26), y la matriz de transferencia para un resonador concéntrico y la impedancia de este (ecuaciones 41 a la 48).

Se muestra a continuación las funciones utilizadas para obtener el TL de este caso.

Función para la obtención de la impedancia de un resonador concéntrico y la matriz de transferencia de este.

```

1 function T=tuboperforado(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,t,f)
2 %Calcula la impedancia del resonador concentrico y la matriz de transferencia de este.
3 %tuboperforado(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,t,f);
4 %f=frecuencia, Hz
5 %t=temperatura media medicion experimental, Celcius
6 %la=longitud horizontal (desde el principio hasta la mitad del conducto), metros
7 %lb=longitud horizontal (desde la mitad del conducto hasta la salida), metros
8 %r1=radio del conducto de entrada(r1=r3 cond. salida), metros
9 %r2=radio del conducto del silenciador, metros
10 %nh=numero de perforaciones
11 %dh=diametro de las perforaciones, metros
12 %tw=ancho de la pared del conducto, metros
13 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
14 S1=pi*r1^2;
15 Sc=pi*r2^2-pi*r1^2;
16 w=2*pi*f;
17 k0=w/c;
18 Sh=pi*dh^2/4;
19 Yc=c/Sc;
20 leq=tw+0.85*dh;
21 zres=(1/nh)*(j*w*leq/Sh+w.^2/pi/c)-j*Yc/(tan(k0*la)+tan(k0*lb));
22 T=[1 0;1/zres 1];

```

ii) Resonador concéntrico en un medio estacionario.

```

1 function TLtuboperforado2(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,fs,t)
2 %Calcula la Perdida de transmision (TL), de un silenciador con resonador concentrico.
3 %TLtuboperforado(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,fs,t)
4 %fs=frecuencia de sampleo, Hz
5 %t=temperatura media medicion experimental, °Celcius
6 %la=longitud horizontal (desde el principio hasta la mitad del conducto), metros
7 %lb=longitud horizontal (desde la mitad del conducto hasta la salida), metros
8 %r1=radio del conducto de entrada(r1=r3 cond. salida), metros
9 %r2=radio del conducto del silenciador, metros
10 %nh=numero de perforaciones
11 %dh=diametro de las perforaciones, metros
12 %tw=ancho de la pared del conducto, metros
13 if nargin==0 % valores por defecto cuando la funcion no tiene valores de entrada
14 fs=8000;
15 t=20;
16 r1=0.01905;
17 r2=0.07785;

```

```

18 nh=4;
19 dh=0.01;
20 la=0.0925;
21 lb=0.0925;
22 tw=0.004;
23 end
24 faux=linspace(0.1,fs/2,1000);
25 s1=pi*r1^2;
26 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
27 z=1.18*c/(pi*r1^2);
28 for ii=1:length(faux)
29 T=tuboperforado(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,t,faux(ii));
30 TL(ii)=20*log10((abs( T(1,1) + T(1,2)/z + T(2,1)*z + T(2,2) ))/2);
31 end
32 plot(faux,TL,'b')
33 xlabel('Frecuencia (Hz)'); ylabel('Perdida de transmision [dB]');
34 grid on;
35 title(['Perdida de transmision en Resonador Concentrico de ' num2str(nh) ' Hoyos']);

```

Este programa utiliza el método para un Resonador concéntrico en un medio estacionario, utilizando la matriz de transferencia de éste (ecuaciones 49 a la 80).

Se muestra a continuación las funciones utilizadas para obtener el TL de este caso.

Función para la obtención de la matriz de transferencia de un resonador concéntrico en un medio estacionario.

```

1 function TT=tuboperforado2(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,t,f)
2 %Calcula la matriz de transferencia de resonador concentrico.
3 %tuboperforado2(r1,r2,la,lb,nh,dh,tw,t,f);
4 %f=frecuencia, Hz
5 %t=temperatura media medicion experimental, °Celsius
6 %la=longitud horizontal (desde el principio hasta la mitad del conducto), metros
7 %lb=longitud horizontal (desde la mitad del conducto hasta la salida), metros
8 %r1=radio del conducto de entrada(r1=r3 cond. salida), metros
9 %r2=radio del conducto del silenciador, metros
10 %nh=numero de perforaciones
11 %dh=diametro de las perforaciones, metros
12 %tw=ancho de la pared del conducto (espesor), metros
13 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
14 S1=pi*r1^2;
15 Sc=pi*r2^2-pi*r1^2;
16 w=2*pi*f;
17 k0=w/c;
18 Sh=pi*dh^2/4;
19 por=nh/dh;%porosity
20 pip=((tw+0.75*dh)*j*k0+0.006)/por;%normalized partition impedance of the perforate
21 ka_cuad=k0^2-4*j*k0/(2*r1)/pip;
22 kb_cuad=k0^2-4*j*k0*(2*r1)/pip/(4*r2^2-4*r1^2);
23 C=[0 0 -ka_cuad ka_cuad-k0^2;...
24 0 0 kb_cuad-k0^2 -kb_cuad;...
25 1 0 0 0;...
26 0 1 0 0];
27 [V D]=eig(C);D=diag(D).';
28 A0=[V(3,:);...

```

```

29 V(4,:);...
30 repmat(-1/j/k0,1,4);...
31 -V(2,:)/j/k0];
32 A1=[V(3,:).*exp(D);...
33 V(4,:).*exp(D);...
34 -exp(D)./j/k0;...
35 -V(2,:).*exp(D)./j/k0];
36 T=A0*(A1^-1);
37 X1=-j*tan(k0*a);
38 X2=+j*tan(k0*b);
39 F1=T(4,2)+X2*T(4,4)-X1*(T(2,2)+X2*T(2,4));
40 AA1=(X1*T(2,1)-T(4,1))/F1;
41 BB1=(X1*T(2,3)-T(4,3))/F1;
42 AA2=T(1,2)+X2*T(1,4);
43 BB2=T(3,2)+X2*T(3,4);
44 TT=[T(1,1)+AA1*AA2 T(1,3)+BB1*AA2;...
45 T(3,1)+AA1*BB2 T(3,3)+BB1*BB2];

```

Anexo 4 *“Fórmula que nos permite graficar la Pérdida de Transmisión y las frecuencias de corte, de una cámara de expansión de sección transversal circular usando el Método de Elementos de Contorno”*

```

1 function y=TLBEM(l,r1,r2,t)
2 %Grafica la Perdida de transmision (TL), de una camara de expansion simple utilizando analisis
modal,
3 %con sus frecuencias de corte
4 %r1=radio del conducto de entrada(r1=r3 cond. salida), metros
5 %r2=radio del conducto del silenciador, metros
6 %t=temperatura media medicion experimental, °Celsius
7 %l=longitud horizontal cavidad del silenciador, metros
8 if nargin==0 % valores por defecto cuando la funcion no tiene valores de entrada
9 l=0.225;r1=0.025;r2=0.075;t=20;
10 end
11 faux=linspace(0.1,4000,1000);
12 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
13 for ii=1:length(faux)
14 TL(ii)=tubobacilon(l,r1,r2,faux(ii),t);
15 end
16 plot(faux,TL,'b');
17 % -----
18 [kr kz N M]=kaes(1000,t,r2);
19 kr=kr(1:3,1:3);
20 N=N(1:3,1:3);
21 M=M(1:3,1:3);
22 kr=kr(:);M=M(:);N=N(:);f_corte=kr*c/2/pi;
23 % -----
24 xlabel('Frecuencia (Hz)'); ylabel('Perdida de transmision (dB)');
25 grid on;
26 title('Calculo de TL en camara de expansion simple usando analisis modal ');
27 % set(gca,'xtick',f_corte)
28 limy=get(gca,'Ylim');
29 limx=get(gca,'Xlim');
30 aux=find(f_corte<4000);aux(1)=[];f_corte=f_corte(aux).';
31 hold on
32 plot(repmat(f_corte,2,1),repmat(limy.',1,length(aux)),':r','LineWidth',1)

```

```

33 texto=[repmat(' ',length(aux),1) num2str(M(aux)) repmat(' ',length(aux),1) num2str(N(aux))
repmat(' ',length(aux),1)]
34 h=text(f_corte,repmat(limy(2)*0.9,1,length(f_corte)),texto)
35 set(h,'Rotation',90)
36 set(h,'FontWeight','bold')
37 hold off

```

Este programa utiliza análisis modal para la presión p y la velocidad u (ecuaciones 81 a la 113), evaluando en las paredes del silenciador para aplicar condiciones de contorno para la presión p y la velocidad u .

Se muestra a continuación las funciones utilizadas para obtener el TL de este caso.

Función para la obtención los números de onda para coordenadas cilíndricas.

```

1 function [kr,kz,N,M]=kaes(f,t,r0)
2 % Calcula los numeros de onda krmn y kznm del tubo cilindrico.
3 % [kr,kz,N,M]=kaes(f,t,r0)
4 %f=frecuencia, Hz
5 %t=temperatura media medicion experimental, °Celcius
6 %r0=radio del conducto del silenciador, metros
7 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
8 k0=2*pi*f/c;
9 [M N]=ndgrid(0:5,0:2);
10 mn=[0.0 3.83 7.02 ;
11 1.84 5.33 8.53;
12 3.05 6.71 9.97;
13 4.20 8.02 11.35;
14 5.32 9.28 12.68;
15 6.42 10.52 13.99 ];
16 kr=mn/r0;
17 kz=(k0.^2-kr.^2).^0.5;
18 kz=real(kz)-abs(imag(kz))*i;
19 % f_corte=kr*c/2/pi;

```

Función para la obtención la Pérdida de Transmisión de un silenciador de sección transversal circular usando análisis modal.

```

1 function TL=tubobacilon(l,r1,r2,f,t)
2 %Calcula la Perdida de transmision (TL), de una camara de expansion simple utilizando analisis
modal.
3 %tubobacilon(l,r1,r2,f,t);
4 %f=frecuencia, Hz
5 %t=temperatura media medicion experimental, Celcius
6 %l=longitud horizontal cavidad del silenciador, metros
7 %r1=radio del conducto de entrada(r1=r3 cond. salida),metros
8 %r2=radio del conducto del silenciador, metros
9 c=343.2*sqrt(0.9317+t/293);
10 S1=pi*r1^2;
11 w=2*pi*f;
12 rho=1.18;

```

```

13 k0=2*pi*f/c;
14 deltaR=0.025;
15 % r=0:deltaR:r2;
16 % r(length(r))=0.069;
17 r=[0 r1 (r1+r2)/2 r2];
18 deltaphi=2*pi/3;
19 phi=0:deltaphi:2*pi; % es de 1x4
20 phi=phi(1:3); % sake el ultimo
21 [R phi]=ndgrid(r(2:4),phi);
22 R=R(:)';
23 phi=phi(:)';
24 R=[0 R];
25 phi=[0 phi];
26 %% --- 1 dentro-8 afuera ---
27 phi(2)=[];
28 R(2)=[];
29 aux1=1;aux2=2:length(phi);% aux1 indice de los de adentro, aux2 afuera
30 % -----
31 % ////////////
32 [kr kz N M]=kaes(f,t,r2);
33 Nec=4*length(aux1)+2*length(aux2); % aux1 dentro, aux2 fuera
34 Nmodos=(Nec-2)/2;
35 kr=kr(1:3,1:3);
36 kz=kz(1:3,1:3);
37 N=N(1:3,1:3);
38 M=M(1:3,1:3);
39 kr=kr(:);kz=kz(:);M=M(:);N=N(:);f_corte=kr*c/2/pi;
40 % ----- Grafico de los puntos
41 % polar(linspace(0,2*pi,100),repmat(r2,1,100),'k');
42 % hold on
43 % polar(linspace(0,2*pi,100),repmat(r1,1,100),'k');
44 % polar(phi(aux1),R(aux1),'or');
45 % polar(phi(aux2),R(aux2),'o');
46 % hold off
47 % -----
48 % -----
49 % Ecuaciones
50 % [ Amn Bmn A1 B3]
51 for ii=1:length(aux1)
52     aux3=exp(j*M.*phi(aux1(ii))).*besselj(M,kr*R(aux1(ii)));
53     aux3=aux3.';
54     ec1(ii,:)=[aux3 aux3 0 -1];
55     ec2(ii,:)=[aux3.*kz./rho/w -aux3.*kz./rho/w 0 k0/w/rho];
56     aux3=exp(j*M.*phi(aux1(ii))).*besselj(M,kr*R(aux1(ii)));
57     aux3=aux3.';
58     ec4mas(ii,:)=[aux3.*exp(-j*kz.*1) aux3.*exp(+j*kz.*1) -2 0];
59     ec4menos(ii,:)=[aux3.*exp(-j*kz.*1) aux3.*exp(+j*kz.*1) 0 0];
60     ec5mas(ii,:)=[aux3.*kz./rho/w.*exp(-j*kz.*1) -aux3.*kz./rho/w.*exp(+j*kz.*1) 0 0];
61     ec5menos(ii,:)=[aux3.*kz./rho/w.*exp(-j*kz.*1) -aux3.*kz./rho/w.*exp(+j*kz.*1) -
2*k0/w/rho 0];
62 end
63 for ii=1:length(aux2)
64     aux3=exp(j*M.*phi(aux2(ii))).*besselj(M,kr*R(aux2(ii)));
65     aux3=aux3.';
66     ec3(ii,:)=[aux3.*kz./rho/w -aux3.*kz./rho/w 0 0];
67     aux3=exp(j*M.*phi(aux2(ii))).*besselj(M,kr*R(aux2(ii)));
68     aux3=aux3.';
69     ec6(ii,:)=[aux3.*kz./rho/w.*exp(-j*kz.*1) -aux3.*kz./rho/w.*exp(+j*kz.*1) 0 0];
70 end
71 A3=[ones(1,length(aux1)) k0/w/rho.*ones(1,length(aux1)) zeros(1,length(aux2))]

```

```

zeros(1,length(aux2)+2*length(aux1));
72 y1=[ec1;ec2;ec3;ec4mas;ec5mas;ec6]\A3.';
73 y2=[ec1;ec2;ec3;ec4menos;ec5menos;ec6]\A3.';warning on
74 % -----
75 A1mas=y1(Nec-1);
76 B3mas=y1(Nec);
77 A1menos=y2(Nec-1);
78 B3menos=y2(Nec);
79 Y=c/S1;
80 T=[(1+B3mas)/(2*A1mas)   Y*(1+B3menos)/(2*A1menos);...
81   (1-B3mas)/(2*A1mas)/Y   (1-B3menos)/(2*A1menos)];
82 TL=20*log10(abs((T(1,1)+T(1,2)/Y+Y*T(2,1)+T(2,2))/2));

```