



# Universidad Austral de Chile

Facultad de Ciencias de la Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Civil en Obras Civiles

**“ANÁLISIS COMPUTACIONAL NO LINEAL DE  
ESTRUCTURAS DE ACERO, INCORPORANDO AISLADORES  
SÍSMICOS DE COMPORTAMIENTO LINEAL Y NO LINEAL  
EN SU BASE”**

Memoria para optar al Título de  
**Ingeniero Civil en Obras Civiles**

**Profesor Patrocinante : Sr. José Soto M.**  
Ingeniero Civil  
M. Sc. Eng. Civil

**Profesor Copatrocinante : Sr. Julio Lopetegui T.**  
Ingeniero Civil,  
Doctor en Ingeniería

**Profesor Examinador : Sr. Adolfo Castro B.**  
Ingeniero Civil  
M. Sc. Eng. Civil

**EDUARDO JAVIER PELDOZA ANDRADE  
VALDIVIA, 2002**

## **AGRADECIMIENTOS**

Quisiera aprovechar este espacio para agradecer primero que nada a Dios, que me ha bendecido y acompañado durante todos estos años.

A mi familia, quien me ha brindado cariño y comprensión en todos mis proyectos de vida.

A los profesores Sr. Julio Lopetegui Torres y Sr. José Soto Miranda, por las horas de apoyo teórico y la disponibilidad de material bibliográfico y equipo necesario.

A todos mis compañeros de la carrera de Ingeniería Civil en Obras Civiles, que esperaron (pacientemente) los resultados de esta tesis con grandes expectativas.

## ÍNDICE DE MATERIAS

Capítulo	Página
1. Introducción.	1
2. Descripción del Programa Computado-nal Estructural Utilizado (PLANT).	2
2.1. Introducción.	2
2.2. Hipótesis de cálculo estructural utilizadas por el programa.	2
2.2.1. Reacciones internas en el estado deformado.	2
2.2.2. Desplazamientos rígidos y propios.	3
2.2.3. Superposición de las rotaciones resultantes.	4
2.2.4. Transformación de sistemas de coordenadas.	6
2.2.5. Descripción de la posición de un elemento deformado.	7
2.2.6. Estados de carga - deformación.	10
2.2.7. Trabajo y energía de deformación.	11
2.2.8. Trabajo de una carga sobre el desplazamiento causado por otra carga.	12
2.2.9. Ejemplo de solución aproximada.	13
2.2.10. Resolución de grandes sistemas de ecuaciones.	15
2.2.11. Análisis de sistemas no lineales.	17
2.2.12. Control por desplazamientos.	18
2.3. Modalidades de cálculo del programa.	20
2.4. Entrada de datos al programa.	20
2.4.1. Representación espacial de la estructura.	20
2.4.2. Descripción de las secciones transversales.	21
2.4.3. Soficttaciones de carga.	22
2.5. Cálculos dinámicos utilizando PLANT.	23
2.5.1. El método de Newmark.	23
2.5.2. Adaptación del método de Newmark al programa PLANT	25
3. Programas de Computación para Análisis de Estructuras Aisladas Existentes en el Mercado.	30
3.1. Programa N - PAD.	30
3.2. Programa 3D - BASIS.	30
3.3. Programa ETABS.	31
3.4. Programa SAP2000 Nonlinear.	32

4.	Modelos de Ablación Sísmica.	33
4.1.	El objetivo de la aislación sísmica.	33
4.2.	Aislador de goma con bajo amortiguamiento (Low-damping rubber bearing: LDB).	35
4.3.	Aislador de goma de alto amortiguamiento (High-damping rubber bearing: HDB).	36
4.4.	Aislador de goma con núcleo de plomo (Lead-rubber bearing: LRB).	37
4.5.	Aislador Bectriaté de France (EDF).	40
4.6.	Aislador elástico - friccionante (Resilient-friction base isolator: R-FBI).	41
4.7.	Aislador de péndulo friccionante (Friction pendulum system: FPS).	42
5.	Método Utilizado para Incorporar el Modeb de Aislación Sísmica al Programa PLANT Original.	44
5.1.	Modelo de aislación utilizado.	44
5.2.	Resolución de la ecuación diferencial asociada al modelo.	47
5.2.1.	Solución por medio del método de Euler.	47
5.2.2.	Solución por medio del método de Runge - Kutta de quinto orden.	48
5.3.	Adaptación de las soluciones del modelo de Wen al programa PLANT.	50
6.	Presentación de Resultados.	52
6.1.	Aislador solo.	52
6.2.	Marco plano con aislación basal.	55
6.3.	Estructura tridimensional de un piso con aislación basal.	62
7.	Conclusiones.	66
	Resumen.	67
	Summary.	68
	Bibliografía.	69
	Anexo A: Diagrama de Flujo para la Subrutina DYNAM.	71
	Anexo B: Entrada de datos para cálculos dinámicos con PLANT.	80
	Anexo C: Input de los ejemplos del Capítulo VI en formato de PLANT.	85

## CAPÍTULO I : INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el computador se ha convertido en una herramienta indispensable para la Ingeniería Civil. No sólo ha mejorado enormemente la velocidad y precisión de los cálculos, también ha posibilitado el tratamiento y la operatoria de algoritmos y modelos matemáticos que hasta hace unas décadas atrás eran impracticables y que sólo pertenecía al ámbito puramente teórico. Ello ha abierto innumerables posibilidades para solucionar satisfactoriamente una amplia gama de problemas que requieren complejas simulaciones numéricas o el manejo de grandes cantidades de información en forma casi instantánea.

En el campo de la Ingeniería Estructural, el computador ha posibilitado entre otras cosas el análisis del comportamiento de estructuras frente a variadas formas de solicitaciones de cargas. Para el caso del diseño sismorresistente, es de especial interés el estudio de la respuesta estructural frente a la aceleración basal debida a un terremoto. Como se trata de una sollicitación de duración e intensidad aleatoria, lo ideal es representar la estructura de manera lo más fidedigna posible, considerando que muchos de sus elementos pueden sufrir algún tipo de falla que comprometa su estabilidad y capacidad de soporte.

En la década de los ochenta, un grupo de ingenieros del Lehrstuhl für Stahlbau de Aachen (Alemania) desarrolló el programa computacional PLANT con el objetivo de llevar a cabo numerosas modalidades de cálculo estructural que incluyesen la posible plastificación de algún elemento. Dicho programa abarca la determinación de la carga última, estabilidad estructural (pandeo), y análisis dinámico (frecuencias propias y método de Newmark). A través de los años, este programa ha sido corregido y aumentado en varias oportunidades, según sean los requerimientos de los usuarios y las nuevas tecnologías implementadas.

La presente tesis trata sobre la inclusión del modelo de Wen en las subrutinas de cálculo dinámico del programa PLANT, el cual hace posible la simulación de aisladores sísmicos de base de comportamiento elastoplástico, a fin de disponer de una herramienta de cálculo que, además de describir la respuesta de una estructura aislada, también verifique si ésta incurre en algún tipo de falla que implique plastificación. Se incluyen los fundamentos teóricos del programa, como así también algunos ejemplos de cálculo de estructura aislada.

## **CAPÍTULO II : DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA COMPUTACIONAL ESTRUCTURAL UTILIZADO (PLANT)**

### **2.1. Introducción.**

El programa de cálculo estructural PLANT fue creado en 1980 en el Lehrstuhl für Stahlbau de Aachen (Alemania) por los Drs. J. Lopetegui, A. Saleh y Ch. Stutzki. Fue concebido como un programa de análisis experimental que simulase test de carga sobre estructuras, incorporando modelos de comportamiento de materiales y las condiciones del sistema analizado (barras, nudos, apoyos, secciones, etc.) (LOPETEGUI, 1983; SALEH, 1982; STUTZKI, 1982).

El programa fue escrito en lenguaje FORTRAN, a fin de hacer comprensible su funcionamiento al usuario, además de dejar abierta la posibilidad de incorporar nuevas subrutinas, según sean los futuros requerimientos de análisis (LOPETEGUI et al., 1987).

### **2.2. Hipótesis de cálculo estructural utilizadas por el programa.**

Los algoritmos de PLANT se fundamentan en el equilibrio de las fuerza de reacción interiores de una estructura deformada y las cargas que se obtienen directamente por la matriz de rigidez elástica que se genera de los elementos que componen dicha estructura. Esto permite saber si comportamiento del sistema está dentro del rango elástico, o bien ha incurrido en valores que producen la plastificación de algún elemento. La teoría que sustenta estos cálculos es la que se explica a continuación.

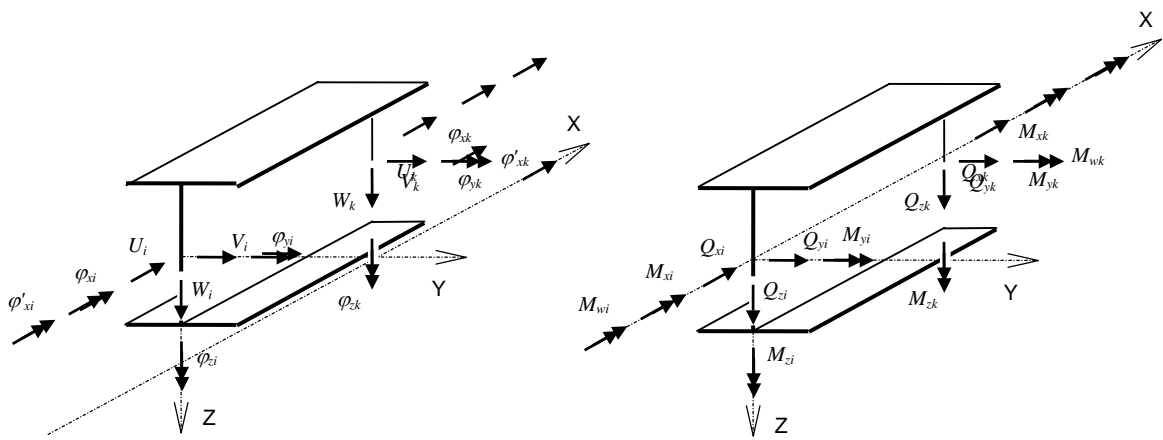
#### **2.2.1. Reacciones internas en el estado deformado.**

Para un elemento estructural tipo barra, la teoría de cálculo de matriz de rigidez utiliza un sistema de coordenadas locales asociado a los extremos del elemento. Con ello es posible describir la barra tanto en su posición inicial como deformada, puesto que en cada sección transversal existen las siguientes posibilidades de deformación (SEDLACEK et al., 1985):

- 1) Tres desplazamientos ( $u, v, w$ )
- 2) Tres rotaciones ( $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ )
- 3) Un ángulo de alabeo ( $\varphi_x'$ )

Además, a cada deformación le corresponde una reacción interna:

- 1) Tres fuerzas ( $Q_x, Q_y, Q_z$ )
- 2) Tres momentos ( $M_x, M_y, M_z$ )
- 3) Un bimomento ( $M_w$ )



**FIGURA 2.1 Definición de las posibles deformaciones y sus reacciones internas asociadas.**

El equilibrio de las fuerzas interiores de los extremos de las barras con las fuerzas exteriores en los extremos de las mismas lleva a la ecuación en notación matricial que expresa esta relación:

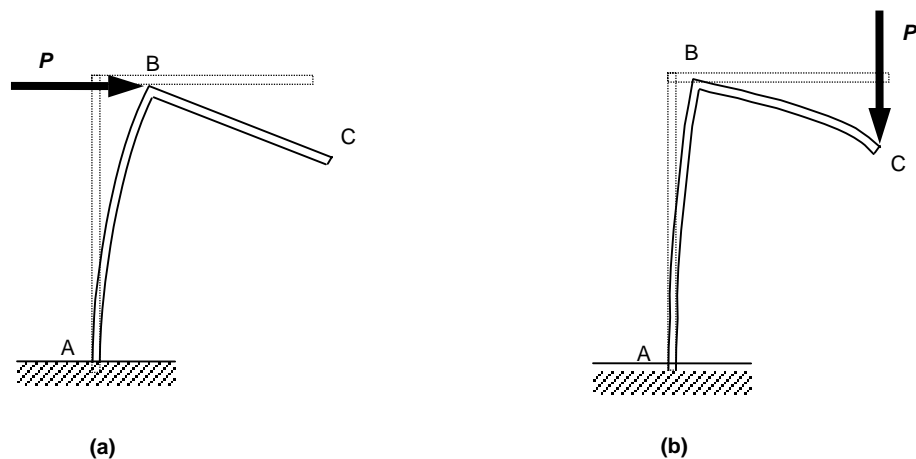
$$\mathbf{F}_{ext} = \bar{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{v} \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{F}_{ext}$  es el vector de las fuerzas exteriores,  $\bar{\mathbf{K}}$  es la matriz de rigidez del elemento, y  $\mathbf{v}$  es el vector de las deformaciones antes mencionadas.

### 2.2.2. Desplazamientos rígidos y propios.

En un elemento perteneciente a una estructura bajo carga, y atendiendo a un sistema global de coordenadas, se pueden distinguir dos tipos de desplazamientos:

- 1) Desplazamientos rígidos: corresponden a los desplazamientos y giros del elemento analizado en los cuales no están comprometidas sus propiedades mecánicas, sino que se deben a deformaciones de los elementos aledaños.
- 2) Desplazamientos propios: corresponden a los desplazamientos y giros que se producen al aplicar directamente algún tipo de sollicitación de carga sobre el elemento.



**FIGURA 2.2 Ejemplos de desplazamiento rígido y propio.**

La FIGURA 2.2 es un ejemplo simple de ambos casos de desplazamiento. En (a) el elemento BC presenta un desplazamiento rígido, pues se traslada por efecto de la deformación propia del elemento AB bajo la carga P. En (b) el desplazamiento de BC se debe tanto a su deformación propia como a la que presenta AB por transmisión de momento, es decir, hay tanto desplazamiento propio como rígido.

### 2.2.3. Superposición de las rotaciones resultantes.

En el análisis de una estructura tridimensional compuesta, un problema a resolver es la adecuada transformación y superposición de las deformaciones de los elementos, que se traducen en desplazamientos y rotaciones de los puntos que sirvieron de referencia para las posiciones iniciales; más aún si se trata de un análisis elástoplástico, en donde se pueden alcanzar grandes deformaciones.

Es de especial interés lo que sucede con las rotaciones, pues se debe considerar que en el caso tridimensional se debe convertir de un sistema particular de coordenadas (el de cada extremo de una barra) a uno global o viceversa, además de separar las rotaciones rígidas de las propias en cada elemento; pero los vectores de rotación no se pueden “sumar” o “restar” en cada paso iterativo.

En el programa PLANT se plantean las fórmulas del Dr. A. Saleh que son especialmente útiles para la conversión de grandes rotaciones de un sistema a otro, utilizando una matriz de transformación que se calcula en base a un vector de rotación obtenido en cada iteración de carga. Para un cuerpo sometido a dos rotaciones sucesivas, digamos  $A$  y a continuación  $B$ , el vector de giro resultante se obtiene a partir de la siguiente fórmula (SALEH, 1981):

$$C = \frac{A + B - A \times B}{1 - A \cdot B} \quad (2.2)$$



en notación condensada:  $(A, B) \Rightarrow C$

Es posible invertir el proceso para obtener la diferencia entre dos rotaciones, o sea, el vector de giro  $A$  a partir de  $C$  y  $B$  :

$$A = \frac{C - B + B \times C}{1 + C \cdot B} \quad (2.3)$$

Como la fórmula no es conmutativa, es decir,  $(A, B) \neq (B, A)$  , el orden de sucesión de las rotaciones necesariamente debe tenerse en cuenta (SALEH, 1981).

Una forma de describir la posición de un elemento en el espacio respecto de un sistema global de coordenadas es mediante un vector. Aplicando el concepto del vector de giro, se puede determinar su longitud, dirección y sentido iniciales con la siguiente información:

- $\Delta x_0$  : diferencia de coordenadas entre los extremos de las barras, calculada a lo largo del eje  $X$ .
- $\Delta y_0$  : diferencia de coordenadas entre los extremos de las barras, calculada a lo largo del eje  $Y$ .
- $\Delta z_0$  : diferencia de coordenadas entre los extremos de las barras, calculada a lo largo del eje  $Z$ .
- $l_0$  : longitud del elemento indeformado.

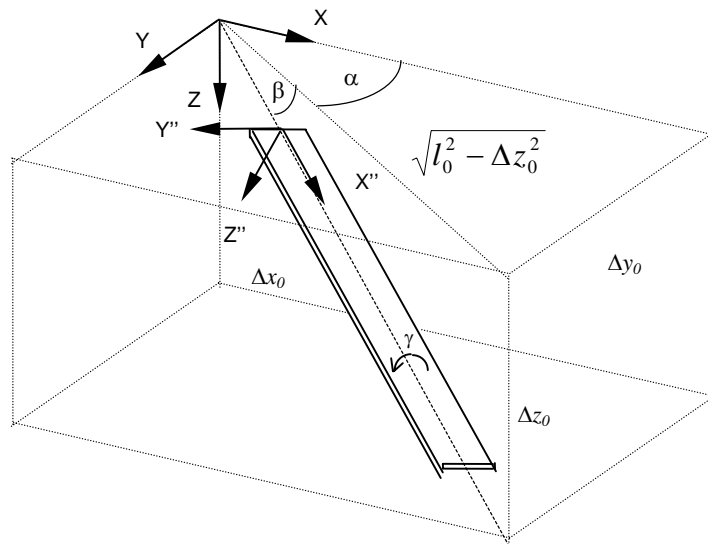
La relación entre los valores anteriores es:

$$l_0 = \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2 + \Delta z_0^2} \quad (2.4)$$

De acuerdo a la FIGURA 2.3, los ángulos que señalan la dirección del elemento en el espacio son:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arcsen\left(\Delta y_0 / \sqrt{l_0^2 - \Delta z_0^2}\right) \\ \beta &= \arcsen(-\Delta z_0 / l_0) \end{aligned} \quad (2.5a \text{ y } 2.5b)$$

Existe además un tercer ángulo, denominado  $\gamma$  , que viene dado por la geometría del sistema y que determina la posición de la sección en el eje principal del elemento.



**FIGURA 2.3** Ángulos que definen la posición del elemento en el espacio.

Estos ángulos forman los siguientes vectores de giro:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \left( 0 \quad 0 \quad \tan \frac{\alpha}{2} \right)^T \\
 \mathbf{B} &= \left( 0 \quad \tan \frac{\beta}{2} \quad 0 \right)^T \\
 \mathbf{C} &= \left( \tan \frac{\gamma}{2} \quad 0 \quad 0 \right)^T
 \end{aligned}
 \tag{2.6a, 2.6b y 2.6c}$$

#### 2.2.4. Transformación de sistemas de coordenadas.

Si tomamos en cuenta la FIGURA 2.3, para transformar el sistema de coordenadas globales al sistema de coordenadas local del elemento, se le somete a la siguiente secuencia (SEDLACEK et al., 1985):

- 1) El sistema se traslada en forma paralela hasta la posición del extremo inicial de la barra.
- 2) El sistema se rota alrededor del eje Z en el ángulo  $\alpha$  que se encuentra contenido dentro del plano XY. Los ejes X e Y se convierten en X' e Y' respectivamente.
- 3) En la nueva posición, el sistema se rota alrededor del eje Y' en el ángulo  $\beta$ ; este paso hará coincidir el eje X' con el eje longitudinal del elemento, transformándose en el eje X''.
- 4) Finalmente, el sistema en su nueva posición se rota alrededor del eje X'' en el ángulo  $\gamma$  para hacerlo coincidir con el sistema local de coordenadas, convirtiendo los ejes X' e Y'

en  $X''$  e  $Y''$  respectivamente y completándose así la transformación.

Para realizar el proceso anterior mediante vectores de giro, la transformación de coordenadas globales a coordenadas locales se puede obtener con la doble aplicación de la Ec. 2.2, lo que en notación resumida es (SALEH, 1982):

$$(C, (B, A)) \Rightarrow D \quad (2.7)$$

Para realizar la conversión de un sistema de coordenadas local a otro global, se aplica la siguiente matriz  $\bar{T}$  dada por la fórmula (SALEH, 1982):

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+D^2} \begin{bmatrix} 1+2D_x^2-D^2 & 2(D_x D_y + D_z) & 2(D_x D_z - D_y) \\ 2(D_x D_y - D_y) & 1+2D_y^2-D^2 & 2(D_y D_z + D_x) \\ 2(D_x D_z + D_y) & 2(D_y D_z - D_x) & 1+2D_z^2-D^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$\bar{T}$  : Matriz de transformación.

$D$  : Vector de giro.

$D_{x,y,z}$  : Componentes del vector de giro.

$D^2$  : Cuadrado del módulo del vector de giro.

La forma en que opera esta matriz  $\bar{T}$  es multiplicándose a ambos lados de la matriz de rigidez local  $\bar{K}$ , dando como resultado una matriz de rigidez global  $\bar{K}^G$ .

### 2.2.5. Descripción de la posición de un elemento deformado.

Un elementos en su posición deformada se le define por la deformación que presentan sus puntos extremos. Después de  $n$  iteraciones para el cálculo de la deformación final, la posición de un nudo en el espacio en coordenadas cartesianas se puede expresar vectorialmente como:

$$\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0)^T + \sum_{j=1}^n (u, v, w)_j^T \quad (2.9)$$

La rotación de un nudo se define como la rotación de su sistema local de coordenadas, el cual inicialmente se encuentra paralelo al sistema global de coordenadas. Estos ángulos de rotación para un paso iterativo cualquiera en notación vectorial son:

$$\Phi_j = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) \quad (2.10)$$

o como vector de rotaciones:

$$\mathbf{F}_j = \frac{\Phi_j}{|\Phi_j|} \tan\left(\frac{|\Phi_j|}{2}\right) \quad (2.11)$$

La rotación total después de  $n$  pasos iterativos se compone de varias rotaciones parciales  $\mathbf{F}_j$ , las cuales se superponen por medio de la Ec. 2.2. Debido a la traslación y rotación de los nudos, el eje de la viga se torna una línea curva tridimensional, presentándose los desplazamientos rígidos y propios descritos en el Párrafo 2.2.2. ; esto produce la traslación del eje principal de inercia. La relación entre los vectores de giro que describen la posición final que adopta la viga al cabo de  $n$  pasos iterativos está dada por la siguiente relación, que toma en cuenta la Ec. 2.2 (SALEH, 1982; SEDLACEK et al., 1985):

$$(\mathbf{C}_n, (\mathbf{B}_n, \mathbf{A}_n)) \Rightarrow \mathbf{E} \quad (2.12)$$

- $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  : Vectores de rotación que contienen el movimiento total del elemento debido a desplazamientos tanto rígidos como propios de la barra.
- $\mathbf{C}$  : Vector de rotación en el sentido del desplazamiento del eje de la viga; este resultado corresponde al valor medio de la torsión del elemento.
- $\mathbf{E}$  : Vector de rotación correspondiente a la rotación rígida del eje longitudinal de la viga desde su posición inicial indeformada hasta su posición final.

Los vectores anteriores se muestran como ejemplo para una viga en el espacio en la FIGURA 2.4 (SEDLACEK et al., 1985).

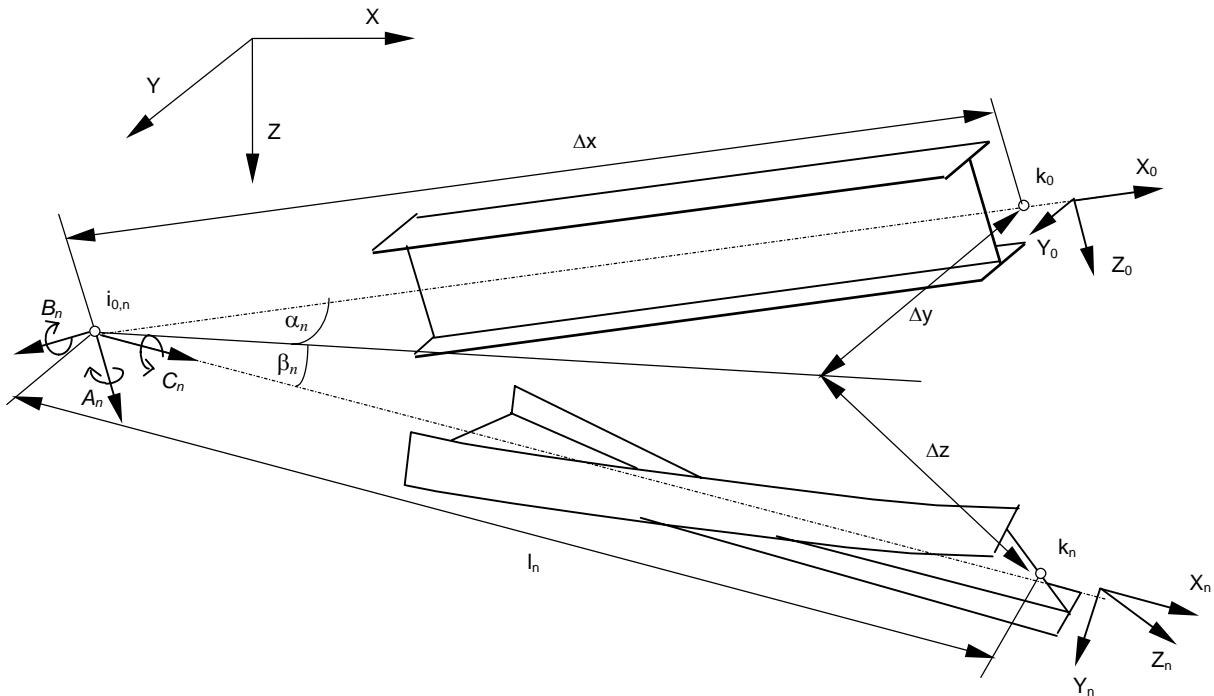


FIGURA 2.4 Vectores de giro que definen la posición deformada.

Una vez determinado el vector de rotación  $E$ , es posible mediante la Ec. 2.2 determinar el vector que relaciona la posición en coordenadas globales con la posición deformada (SALEH, 1982; SEDLACEK et al., 1985):

$$(E, D_0) \Rightarrow D_n \quad (2.13)$$

Además, también es posible determinar la rotación relativa de los extremos de la viga, separando la rotación total de la rotación rígida:

$$\begin{aligned} (-E, F_{ni}) &\Rightarrow F_{ni}^* \\ (-E, F_{nj}) &\Rightarrow F_{nj}^* \end{aligned} \quad (2.14a \text{ y } b)$$

en donde:

- $F_{ni}, F_{nj}$  : Rotaciones de los nudos en los extremos de las vigas en la n-ésima iteración, con respecto a los ejes locales iniciales ( $X_0, Y_0, Z_0$ ).
- $E$  : Rotación rígida del eje de la viga.
- $F_{ni}^*, F_{nj}^*$  : Rotaciones relativas de los nudos extremos de la viga, las cuales causan las deformaciones.

También se pueden aprovechar las Ecs. 2.6a, b y c, para obtener los ángulos de rotación de los extremos de la viga (SALEH, 1982; SEDLACEK et al., 1985).

$$\Phi_{ni,j}^* = \begin{Bmatrix} \varphi_x^* \\ \varphi_y^* \\ \varphi_z^* \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} \arctan F_x \\ \arctan F_y \\ \arctan F_z \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Con esta información se pueden calcular las fuerzas de reacción elástica mediante la teoría lineal clásica, pues las deformaciones relativas  $\varphi_n^*$  son pequeñas. Los valores para los momentos ( $M_x, M_y, M_z$ ) y las fuerzas ( $F_x, F_y, F_z$ ) se obtienen en los extremos de la viga mediante el método de las deformaciones. Con la fuerzas internas elásticas es posible determinar la deformación del material en los extremos del elemento (SEDLACEK et al., 1985; STUTZKI, 1980):

$$\begin{aligned} u' &= Q_x^{el} / EA \\ v'' &= -M_z^{el} / EJ_z \\ w''' &= -M_y^{el} / EJ_y \\ \varphi_x'' &= -M_w^{el} / EC_M \end{aligned} \quad (2.16a - d)$$

con la expresión para la deformación:

$$\varepsilon(x, y, z, w) = 1 \cdot u' - y \cdot v'' - z \cdot w'' - \omega \cdot \varphi_x'' \quad (2.17)$$

Por medio de las relaciones esfuerzo - deformación del material, se obtiene la distribución de tensiones en la sección. Las fuerzas internas se calculan por integración de estas tensiones en las secciones transversales. Estas fuerzas de reacción en la sección son a la vez las reacciones del elemento en sus extremos. Para calcular las fuerzas de reacción de la estructura completa, se suman las fuerzas internas de los elementos producidas en los puntos nodales. Para poder ejecutar este cálculo, las fuerzas en los extremos de las vigas son transformadas por medio de la matriz  $\bar{T}_n^T$  de la Ec. 2.8, desde un sistema local de coordenadas a uno global (SEDLACEK et al., 1985).

### 2.2.6. Estados de carga - deformación.

Un estado de carga - deformación se define como un par de vectores  $P$  y  $v$  que satisfacen la expresión correspondiente a la Ec. 2.1. Esta ecuación expresa una correspondencia única en el caso de vectores lineales; esto se puede denotar (LOPETEGUI, 1983; SEDLACEK et al., 1985):

$$P \leftrightarrow v \quad (2.28)$$

Se define la ortogonalidad de dos estados cualesquiera de carga - deformación, digamos  $P_1 \leftrightarrow v_1$  y  $P_2 \leftrightarrow v_2$ , si la carga de una de las configuraciones no tiene una contribución de trabajo en la otra configuración:

$$P_1 \cdot v_2 = P_2 \cdot v_1 = 0 \quad (2.29)$$

Dos vectores de carga o dos vectores de deformación son paralelos cuando existe un escalar, digamos  $x$ , tal que  $P_1 = xP_2$  o bien  $v_1 = xv_2$ .

La ortogonalización de dos estados de carga - deformación es siempre posible. Una forma es expresar un vector de carga, por ejemplo  $P_2$ , en dos componentes: una paralela al otro vector de carga conocido, digamos  $P_1$ , y otra perpendicular al vector deformación conocido, digamos  $v_1$ :

$$P_2 = P_2^{||P_1} + P_2^{\perp v_1} = x_1 P_1 + P_2^* \quad (2.30)$$

$P_2^*$  es la componente de  $P_2$  la cual es ortogonal a  $v_1$ :

$$\mathbf{P}_2^* = \mathbf{P}_2^{\perp v_1} = \mathbf{P}_2 - x_1 \mathbf{P}_1 \quad (2.31)$$

El escalar  $x_1$  se calcula a partir de la condición de ortogonalidad entre  $\mathbf{P}_2^*$  y  $\mathbf{v}_1$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_2 - x_1 \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{v}_1 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \end{aligned} \quad (2.32)$$

El vector de desplazamiento  $\mathbf{v}_2$  también se puede expresar por medio de dos componentes; una paralela al vector de desplazamiento  $\mathbf{v}_1$  y la otra componente ortogonal al vector de carga:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^{\parallel v_1} + \mathbf{v}_2^{\perp P_1} = y_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^* \quad (2.33)$$

$\mathbf{v}_2^*$  es la componente de  $\mathbf{v}_2$  la cual es ortogonal a  $\mathbf{P}_1$  . El escalar  $y_1$  también se puede calcular usando la doble condición de ortogonalidad, es decir,  $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_2^* = 0$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_2 - y_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{P}_1 &= 0 \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Si consideramos el principio general de Betti, obtenemos la expresión (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1986; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988; SEDLACEK et al., 1985):

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \quad (2.35)$$

Si a la Ec. 2.35 le aplicamos la Ec. 2.32 y la Ec. 2.34, entonces se llega a la conclusión que  $x_1 = y_1$  ; luego, el segundo estado ortogonal se puede expresar como  $\mathbf{P}_2^* \leftrightarrow \mathbf{v}_2^*$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2^* &= \mathbf{P}_2^{\perp v_1} = \mathbf{P}_2 - x_1 \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{v}_2^* &= \mathbf{v}_2^{\perp P_1} = \mathbf{v}_2 - y_1 \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (2.36a \text{ y } b)$$

### 2.2.7. Trabajo y energía de deformación.

La ecuación que expresa el trabajo para un estado de carga - deformación en un sistema estructural es:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \quad (2.37)$$

donde  $\mathbf{P}_1$  es un vector generalizado de carga, y  $\mathbf{v}_1$  es su correspondiente vector generalizado de deformación.

La Ec. 2.37 expresa el trabajo realizado por el vector de carga  $\mathbf{P}_1$  sobre el estado de deformación, representado por el desplazamiento  $\mathbf{v}_1$ . Este trabajo es almacenado como energía de deformación. La energía de deformación en estructuras almacenada inicialmente por medio de la flexión puede escribirse:

$$U = \frac{1}{2} \sum \int_0^l EI v''(x)^2 dx \quad (2.38)$$

Donde  $v(x)$  es la función de desplazamiento. De acuerdo a la teoría clásica de flexión en vigas:  $E I v''(x) = -M(x)$ , lo cual aplicado a la Ec. 2.38:

$$U = \frac{1}{2} \sum \int_0^l \frac{M(x)^2}{EI} dx \quad (2.39)$$

### 2.2.8. Trabajo de una carga sobre el desplazamiento causado por otra carga.

Considerando dos estados de carga - deformación denotados como  $\mathbf{P}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{P}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_2$  y a partir de lo planteado en el Párrafos 2.2.6 y 2.2.7, se tienen los siguientes resultados (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1986; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \sum \int_0^l EI v_1''(x) v_2''(x) dx \\ &= \sum \int_0^l (M_1(x) M_2(x) / EI) dx \end{aligned} \quad (2.40a \text{ y } b)$$

$M(x)$  representa el diagrama de momento de flexión en la estructura debido a  $\mathbf{P}_i$

Es posible trabajar a nivel global en la estructura con estados de carga - deformación de la misma manera que con funciones de Ritz en un medio continuo. Si existen estados de carga - deformación disponibles, o si éstos pueden ser generados usando una matriz de rigidez existente, entonces se pueden aplicar todos los métodos de análisis estático, reemplazando las funciones e integrales con estados de carga - deformación. Para el análisis de sistemas no lineales, la matriz de rigidez necesaria para generar los estados de carga - deformación podría



ser la del sistema lineal o simplificado (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1986; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988).

### 2.2.9. Ejemplo de solución aproximada.

A continuación, se expondrá un ejemplo de solución aproximada con un subespacio definido por algunos estados de carga - deformación. Sean  $\mathbf{P}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{P}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_2$ , ...,  $\mathbf{P}_n \leftrightarrow \mathbf{v}_n$  estados de carga - deformación para un sistema estructural bajo un vector de carga externa  $\mathbf{F}_0$ . Una solución aproximada para un campo de desplazamiento se puede escribir (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1986; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988; SEDLACEK et al., 1985):

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \quad (2.41)$$

Las fuerzas de reacción correspondientes al estado deformado son:

$$\mathbf{R} = -x_1 \mathbf{P}_1 - x_2 \mathbf{P}_2 - \dots - x_n \mathbf{P}_n \quad (2.42)$$

Las fuerzas residuales corresponden a fuerzas que no están en balance, las cuales se pueden expresar como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{R} = \mathbf{F}_0 - x_1 \mathbf{P}_1 - x_2 \mathbf{P}_2 - \dots - x_n \mathbf{P}_n \quad (2.43)$$

El estado deformado se varía sucesivamente, de tal manera que cada componente de la deformación es aumentado de  $x_i \mathbf{v}_i$  hasta  $(x_i + dx_i) \mathbf{v}_i$ . La nueva deformación está dada por:  $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_i$ , con  $\Delta \mathbf{v}_i = dx_i \mathbf{v}_i$ .

El diferencial  $dx_i$  es un escalar. El trabajo correspondiente a la variación  $d\mathbf{v}_i$  puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} dU_i^* &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{v}_i \\ &= (\mathbf{F}_0 - x_1 \mathbf{P}_1 - x_2 \mathbf{P}_2 - \dots - x_n \mathbf{P}_n) \cdot \mathbf{v}_i dx_i \end{aligned} \quad (2.44)$$

El trabajo virtual es cero cuando el producto escalar  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{v}_i$  es cero. Si se fijan las variaciones  $dU_i^*$  en cero, se puede obtener un sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{v}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{v}_n & \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{v}_n & \cdots & \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

El sistema de ecuaciones tiene una solución si la matriz de coeficientes no es singular y éste es el caso cuando los estados de carga - deformación son linealmente independientes.

La mejor aproximación posible al vector de deformación  $\mathbf{v}$  de la estructura viene dada por la Ec. 2.41, y la correspondiente fuerza residual es  $\mathbf{F}$  de la Ec. 2.43. La solución proporcionada será una solución exacta cuando el vector de carga dado sea una combinación lineal de vectores de carga conocidos  $\mathbf{P}_i$ . La matriz de coeficientes es una matriz diagonal cuando los estados de carga - deformación son ortogonales, es decir, los productos  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{v}_k = 0$  para  $i \neq k$ , los escalares  $x_i$  (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1986; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988):

$$x_i = \frac{\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{v}_i} \quad (2.46)$$

Si los estados de carga - deformación no fuesen ortogonales, puede efectuarse un procedimiento de ortogonalización.

Otra forma de llegar al mismo resultado es descomponiendo el vector de carga  $\mathbf{F}_0$  en componentes paralelas a las cargas individuales  $\mathbf{P}_i$  y en una componente perpendicular a todos los vectores de desplazamiento de los estados de carga - deformación (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1986; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988).

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}_0^{|\mathbf{P}_1} + \mathbf{F}_0^{|\mathbf{P}_2} + \dots + \mathbf{F}_0^{|\mathbf{P}_n} + \mathbf{F}_0^{\perp \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n} \\ &= x_1 \mathbf{P}_1 + x_2 \mathbf{P}_2 + \dots + x_n \mathbf{P}_n + \mathbf{F}^* \end{aligned} \quad (2.47)$$

Esto lleva a una expresión de la componente ortogonal antes mencionada:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_0 - x_1 \mathbf{P}_1 - x_2 \mathbf{P}_2 - \dots - x_n \mathbf{P}_n \quad (2.48)$$

La condición de ortogonalidad  $\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{v}_i = 0$  nos lleva también al sistema planteado en la Ec. 2.45 (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988).

### 2.2.10. Resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales.

A fin de resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales con el método de estados de carga - deformación, dichos estados deben ser calculados. A continuación se da un algoritmo para encontrar los estados en caso que el sistema de ecuaciones esté particionado como se indica (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1986; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988):

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_b \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_{11}\mathbf{V}_a + \bar{A}_{12}\mathbf{V}_b = \mathbf{P}_a \\ \bar{A}_{21}\mathbf{V}_a + \bar{A}_{22}\mathbf{V}_b = \mathbf{P}_b \end{cases}$$

Primero, se intentará resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \bar{A}_{11}\mathbf{V}_a + \bar{A}_{12}\mathbf{V}_b = \mathbf{P}_a - \mathbf{P}_{00} \\ \bar{A}_{21}\mathbf{V}_a + \bar{A}_{22}\mathbf{V}_b = \mathbf{P}_b \end{cases} \quad (2.50)$$

Donde están dadas las matrices  $\bar{A}_{ik}, i, k = 1, 2$  y los vectores  $\mathbf{P}_a$  y  $\mathbf{P}_b$ ; la solución que se busca es  $\mathbf{V}_a$ ,  $\mathbf{V}_b$  y  $\mathbf{P}_{00}$ . Una posible estrategia de solución podría ser primero resolver  $\mathbf{V}_a$  en la siguiente ecuación (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1986; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988):

$$\bar{A}_{11}\mathbf{V}_a = \mathbf{P}_a \quad (2.51)$$

Conocido el vector  $\mathbf{V}_a$ , luego se resuelve el siguiente sistema:

$$\bar{A}_{22}\mathbf{V}_b = \mathbf{P}_b - \bar{A}_{21}\mathbf{V}_a \quad (2.52)$$

Se puede entonces obtener una solución para el vector de desplazamientos  $\mathbf{V}_b$ . El vector  $\mathbf{P}_{00}$ , el cual es desconocido hasta este momento, se puede determinar (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988):

$$\mathbf{P}_{00} = -\bar{A}_{12}\mathbf{V}_b \quad (2.53)$$

El vector  $\mathbf{P}_{00}$  en el análisis estructural es el vector de las fuerzas residuales, las cuales están presentes cuando el vector de deformación es  $\mathbf{V}$ . El vector  $\mathbf{P}_{00}$  tiene componentes distintas de cero solamente en su parte superior. Cuando cada estado de carga - deformación no tiene componentes en su parte inferior de su vector de carga, el método de ortogonalización

resulta ser muy ventajoso pues los productos escalares  $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{v}_k$  sólo necesitan ser evaluados en la parte superior de los vectores (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988).

Para la solución de un sistema de ecuaciones lo más recomendable es, en primer lugar, determinar un vector de deformación  $\mathbf{v}_0$  y una fuerza residual  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{00}$ . La solución luego se postula de la siguiente forma (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \quad (2.54)$$

El procedimiento de cálculo consta de los siguientes pasos (LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988):

- 1) Determinación de  $\mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{P}_{i,i}$  usando  $\mathbf{P}_i$  (donde  $i = 1, 2, \dots, n$ ). El estado de carga - deformación es:  $\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i,i} \leftrightarrow \mathbf{v}_i$
- 2) El estado de carga - deformación es ortogonalizado para  $i > 1$ . Cada caso de carga - deformación que se obtenga con este algoritmo será ortogonal a todos los estados anteriores excepto el último, por tanto necesita ser ortogonalizado solamente a partir de las componentes del último estado de carga - deformación. El estado ortogonalizado se denota así:

$$\mathbf{P}_i^* \leftrightarrow \mathbf{v}_i^* \quad (2.55)$$

- 3) Se mejora la aproximación a la solución:

$$\mathbf{v}_{nueva} = \mathbf{v}_{antes} + x_i \mathbf{v}_i^* \quad (2.56)$$

donde  $\mathbf{v}_i^*$  es el vector de deformación del estado de carga - deformación ortogonal, y el coeficiente  $x_i$  es:

$$x_i = \frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{v}_i^*}{\mathbf{P}_i^* \cdot \mathbf{v}_i^*} \quad (2.57)$$

- 4) Las fuerzas residuales correspondientes a  $\mathbf{v}_{nueva}$  son:

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_i - x_i \mathbf{P}_i^* \quad (2.58)$$

- 5) Si no se alcanza la precisión requerida, el procedimiento debe reiniciarse desde el paso (1) con  $i = i + 1$ .

### 2.2.11. Análisis de sistemas no lineales.

En el caso de sistemas no lineales, también es posible calcular el vector de deformación si se conocen numerosos estados de carga - deformación del tipo  $\mathbf{P}_i^* \leftrightarrow \mathbf{v}_i^*$ . El asterisco indica que los estados de carga - deformación son semi - ortogonales, es decir  $\mathbf{P}_i^* \cdot \mathbf{v}_k^* = 0$  si  $i > k$  (LOPETEGUI, 1983).

La aproximación en la deformación que define el estado de equilibrio deseado es:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1^* + x_2 \mathbf{v}_2^* + \dots + x_n \mathbf{v}_n^* \quad (2.59)$$

El siguiente procedimiento se realiza para construir un sistema de estados de carga - deformación ortogonalizados y para mejorar simultáneamente la aproximación del vector deformación. Sea una estructura no lineal en el estado deformado  $\mathbf{v}_{antes}$ , cargada con las fuerzas residuales  $\mathbf{F}_i$ . Se calcula un vector de deformación  $\mathbf{v}_i$  con la matriz de rigidez inicial y con  $\mathbf{F}_i$  como vector de carga. La nueva aproximación para el vector de deformación es:

$$\mathbf{v}_{nueva} = \mathbf{v}_{antes} + \mathbf{v}_i \quad (2.60)$$

En el siguiente paso, las fuerzas residuales  $\mathbf{F}_{ii}$  se calculan con el sistema real no lineal en el estado deformado  $\mathbf{v}_{nueva}$ . El nuevo estado de carga - deformación se define:

$$\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{ii} \leftrightarrow \mathbf{v}_i \quad (2.61)$$

En el lado izquierdo está la diferencia entre las fuerzas residuales correspondientes a las deformaciones  $\mathbf{v}_{antes}$  y  $\mathbf{v}_{nueva}$ , y al lado derecho el incremento de deformación  $\mathbf{v}_i$ .

Si se conoce otro estado de carga - deformación, el nuevo debe ser ortogonalizado con respecto a todos los estados anteriores. Esto sólo requiere que el vector de carga de este nuevo estado no realice trabajo en el vector deformación de todos los anteriores. Si el nuevo estado de carga - deformación es  $\mathbf{P}_i \leftrightarrow \mathbf{v}_i$  y los anteriores son  $\mathbf{P}_k^* \leftrightarrow \mathbf{v}_k^* (k = 1, 2, \dots, i - 1)$  entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i^* &= \mathbf{P}_i - z_k \mathbf{P}_k^* \\ \mathbf{v}_i^* &= \mathbf{v}_i - z_k \mathbf{v}_k^* \end{aligned} \quad (2.62a \text{ y } b)$$

donde:  $z_i = \frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{v}_k^*}{\mathbf{P}_k^* \cdot \mathbf{v}_k^*}$

Este estado de carga - deformación ortogonalizado se varía bajo el supuesto de linealidad en los alrededores de  $\mathbf{v}_{nueva}$ , lo que significa que  $x_i \mathbf{P}_i^* \leftrightarrow x_i \mathbf{v}_i^*$  también es válido. La nueva aproximación para el vector deformación:

$$\mathbf{v}_{nueva} = \mathbf{v}_{antes} + x_i \mathbf{v}_i^* \quad (2.63)$$

El factor  $x_i$  se determina de tal manera que el producto escalar de las fuerzas residuales así calculadas multiplicadas con  $\mathbf{v}_i^*$  sea cero.

$$x_i = \frac{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i^*}{\mathbf{P}_i^* \cdot \mathbf{v}_i^*} \quad (2.64)$$

La fuerza residual para el siguiente paso es  $\mathbf{F}_{i+1}$ :

$$\mathbf{F}_{i+1} = \mathbf{F}_i - x_i \mathbf{P}_i^* \quad (2.65)$$

### 2.2.12. Control por desplazamientos.

Para cálculos con desplazamiento controlado, se determina una línea inicial de deformación  $\mathbf{v}_1$  y una variación de la misma, de tal manera que la amplitud en el vector de deformación se mantenga suficientemente cerca de un valor constante para reducir las fuerzas residuales al mínimo. Para una deformada  $\mathbf{v}_1$ , se calcula la fuerza  $\mathbf{R}$  requerida para mantener el sistema en equilibrio. Esto se asume (LOPETEGUI et al., 1987; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988):

$$\mathbf{R} = \lambda \mathbf{F}_0 + \mathbf{F} \quad (2.66)$$

donde:

$\lambda$  : Factor de carga.

$\mathbf{F}_0$  : Carga que recibe el sistema.

$\mathbf{F}$  : Fuerzas residuales.

El factor de carga es entonces determinado para que las fuerzas residuales no realicen ningún trabajo en la deflexión  $\mathbf{v}_1$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} - \lambda \mathbf{F}_0) \cdot \mathbf{v}_1 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{v}_1} \end{aligned} \quad (2.67a \text{ y } b)$$

Con ayuda de la fuerza residual  $\mathbf{F}$  se calcula un incremento de deformación  $\mathbf{v}_2$  , y la deformación resultante  $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$  se normaliza de tal manera que tiene una amplitud muy cercana a la de  $\mathbf{v}_1$  . Se dan a continuación dos posibilidades:

- 1) El nuevo vector  $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$  se multiplica por un factor de reducción  $a$  , para que el vector total de deformación  $a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$  y el vector  $\mathbf{v}_1$  tengan igual longitud:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{i1}^2 &= a^2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{i2})^2 \\ \Rightarrow a &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{i1}^2}{\sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{i2})^2}} \end{aligned} \quad (2.68a \text{ y } b)$$

- 2) La deformación  $\mathbf{v}_2$  es la única multiplicada por el factor  $a$  , para que las longitudes de los vectores  $\mathbf{v}_1$  y  $(\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2)$  sean iguales:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{v}_{i1}^2 &= \sum \mathbf{v}_{i1}^2 + 2a \sum \mathbf{v}_{i1} \cdot \mathbf{v}_{i2} + a^2 \sum \mathbf{v}_{i2}^2 \\ \Rightarrow a &= -\frac{2 \sum \mathbf{v}_{i1} \cdot \mathbf{v}_{i2}}{\sum \mathbf{v}_{i2}^2} \end{aligned} \quad (2.69a \text{ y } b)$$

Se calcula la fuerza  $\mathbf{R}_1$  la cual mantiene al sistema en la posición deformada  $\mathbf{v}_{nueva}$  . El incremento de la deformación mejorado es  $\mathbf{v}_{nueva} - \mathbf{v}_1$  . El estado de carga deformación más reciente es:

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_{nueva} - \mathbf{v}_1 \quad (2.70)$$

La iteración se realiza de la misma forma explicada en el Párrafo 2.2.11. La longitud del vector deformación es mantenida constante sólo para la determinación de los estados de carga - deformación (LOPETEGUI et al., 1987; LOPETEGUI y SEDLACEK, 1988).

### **2.3. Modalidades de cálculo del programa.**

En cuanto a la forma de cálculo, PLANT considera la teoría de primer, segundo y tercer orden, contemplando los estados elástico y elastoplástico del material, dentro de lo cual existen las siguientes opciones de procedimientos de análisis (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI et al., 1987):

- 1) Cálculo con deformaciones iniciales.
- 2) Carga última por medio de deformación controlada.
- 3) Estabilidad, pandeo longitudinal.
- 4) Estabilidad, pandeo torsional.
- 5) Estabilidad, pandeo con volcamiento.
- 6) Cálculo con deformación controlada.
- 7) Cálculo con factor de carga controlado por historial de carga.
- 8) Cálculo con factor de carga controlado por iteración corregida.
- 9) Cálculo con deformación controlada por historial de carga.
- 10) Análisis dinámico, cálculo de frecuencias propias.
- 11) Análisis dinámico, método de Newmark para integrar la ecuación de movimiento.

### **2.4. Entrada de datos al programa.**

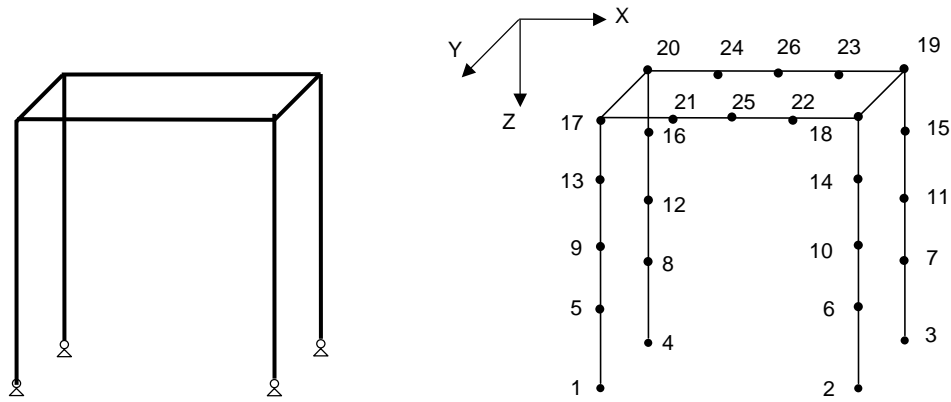
A fin de ingresar los datos que representen a la estructura, PLANT está diseñado con una orden de leer un archivo de input en formato ASCII, el cual debe contar con los siguientes códigos descriptivos (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI et al., 1987):

- 1) Procedimiento de análisis requerido.
- 2) Representación espacial de la estructura.
- 3) Características de las secciones, tanto geométricas como del material constituyente.
- 4) Solicitaciones de carga.

#### **2.4.1 Representación espacial de la estructura.**

PLANT trabaja por medio de estructuras planteadas en base a barras descritas por medio de sus puntos extremos, con su respectiva ubicación espacial dada en coordenadas cartesianas. A estos puntos se les asocian los grados de libertad correspondientes a las condiciones de conexión dadas por el problema, tales como nudos desplazables o fijos, con o sin transmisión de momento (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI et al., 1987).





**FIGURA 2.2 Descripción de una estructura simple mediante barras y nudos.**

#### **2.4.2. Descripción de las secciones transversales.**

Como se consideran tanto el análisis elástico y plástico de las estructura, se han incluido dos formas de representar las secciones transversales de los elementos (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI *et al.*, 1987):

- 1) Para los cálculos de tipo elástico, se ingresan directamente los valores de área de la sección, momentos de inercia y torsionales, módulo de elasticidad y corte, distancia entre el centro de gravedad y corte, constante de alabeo y área interna de Brent (para secciones tipo cajón).
- 2) Para los cálculos de tipo elastoplástico, la descripción geométrica del perfil debe hacerse mediante láminas. Dichas láminas se describen mediante coordenadas de inicio y fin, referidas a un sistema que tiene como origen el centro de gravedad de la sección.

Además para cada lámina se incluirá el espesor y los valores de ordenadas de alabeo y tensiones residuales de cada extremo. A estos datos se les debe adjuntar información general de la sección como módulo de elasticidad y corte, esfuerzo de fluencia y distancia del centro de gravedad al centro de corte (LOPETEGUI *et al.*, 1987).

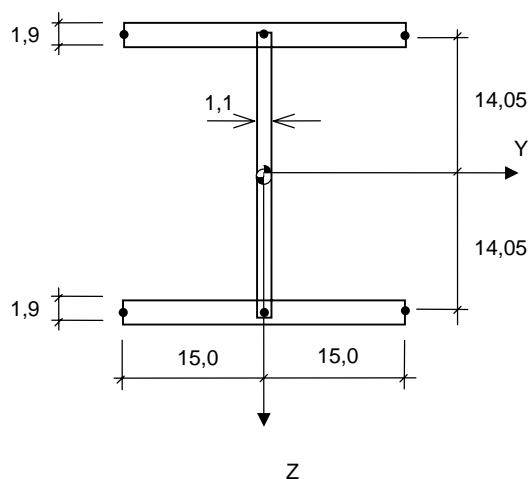


Lámina Nº	e [cm]	$y_i$ [cm]	$z_i$ [cm]	$W_i$ [cm <sup>2</sup> ]	$y_k$ [cm]	$z_k$ [cm]	$W_k$ [cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_i$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_i$ [kN/cm <sup>2</sup> ]
1	1,9	-15,0	-14,05	210,0	15,0	-14,05	-210,0	0,0	0,0
2	1,1	0,0	-14,05	0,0	0,0	14,05	0,0	0,0	0,0
3	1,9	-15,0	14,05	-210,0	15,0	14,05	210,0	0,0	0,0

**FIGURA 2.2 Ejemplo de un perfil representado con tres láminas para cálculos elastoplásticos.**

### 2.4.3. Solicitaciones de carga.

Se puede distinguir tres tipos de cargas aplicables a la estructura (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI et al., 1987):

- 1) Cargas puntuales, ingresadas en forma vectorial con respecto a un sistema global de coordenadas.
- 2) Momentos, ingresados en forma vectorial.
- 3) Cargas dinámicas, ingresadas como aceleraciones basales por medio de un archivo de datos.

Además, de acuerdo a la modalidad de análisis realizada, a dichas sollicitaciones se les debe adjuntar un código que exprese el uso que deberán tener dentro de los cálculos, los cuales son:

- 1) Cargas multiplicadas por un factor adimensional, a fin de estudiar su comportamiento frente a las reacciones internas de la estructura (por ejemplo, en análisis de carga última).

- 2) Cargas que permanecen constantes durante el análisis completo (por ejemplo, las de peso propio).
- 3) Cargas que producen perturbaciones iniciales en la estructura, y por ello solamente se incluyen en la primera iteración del análisis (por ejemplo, para calcular pandeo de columnas se necesita incluir, además de la carga compresiva axial, una carga perpendicular al eje del elemento, ubicada en un punto conveniente).
- 4) Cargas para el cálculo de valores propios (por ejemplo, frecuencias propias).

## 2.5. Cálculos dinámicos utilizando PLANT.

Por medio de la integración de los esfuerzos que provocan las deformaciones, PLANT permite calcular las reacciones internas de la sección en cada extremo de la barra. El vector de las fuerzas resultantes se obtiene mediante la suma de las fuerzas de reacción. Para el caso de un vector de fuerzas que incluye momentos, dicha suma se calcula aplicando la superposición de vectores de rotación para distintos sistemas de coordenadas que fue explicada en los Párrafos 2.2.3, 2.2.4 y 2.2.5 (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI et al., 1987).

La intención de crear un programa que obtenga reacciones por medio de integración es precisamente abarcar los casos en que la sollicitación implica un mayor riesgo, y detectar si es que en alguno de los extremos de las barras en las cuales se ha discretizado la estructura se ha producido alguna plastificación que pueda inducir deformaciones adicionales, o bien comprometer la capacidad de soporte.

En lo referente al cálculo de estructuras sometidas a terremotos, PLANT posee subrutinas adaptadas para el análisis dinámico, basado en la ecuación que expresa la relación de equilibrio entre la aceleración del suelo y las reacciones de la estructura frente a los desplazamientos (LOPETEGUI et al., 1987):

$$\bar{M} \ddot{y} + \bar{C} \dot{y} + \bar{K} y = Q(t) \quad (2.71)$$

La resolución se efectúa mediante las ecuaciones de Newmark, que expresan la integración de la velocidad y el desplazamiento en pequeños intervalos de tiempo.

### 2.5.1. El método de Newmark.

Este método propuesto originalmente por N. Newmark (1959) incluye en su formulación variados métodos que usan intervalos de tiempo para la solución de ecuaciones lineales y no lineales. Dentro de las ecuaciones se utilizan los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ , los cuales sirven para expresar la forma en que varía la aceleración a través del tiempo (PAZ, 1997).

La expresión para el incremento de la velocidad, considerando intervalos de tiempo de igual longitud (PAZ, 1997):

$$\Delta \dot{y} = \dot{y}_i \Delta t + \gamma \Delta \ddot{y} \Delta t \quad (2.72)$$

Además, el incremento del desplazamiento, considerando también intervalos de tiempo de igual longitud (PAZ, 1997):

$$\Delta y = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{y}_i \Delta t^2 + \beta \Delta \ddot{y} \Delta t^2 \quad (2.73)$$

Con respecto al parámetro  $\gamma$ , se han observado que su valor óptimo es  $\gamma = \frac{1}{2}$ , ya que cualquier valor distinto a éste introduce un efecto de amortiguación superfluo al problema. Atendiendo a esto, y combinando las Ecs. 2.72 y 2.73, es posible hallar las siguientes expresiones para el incremento de la aceleración y la velocidad (PAZ, 1997):

$$\Delta \ddot{y} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta y - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{y}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{y}_i \quad (2.74)$$

$$\Delta \dot{y} = \frac{1}{2\beta \Delta t} \Delta y - \frac{1}{2\beta} \dot{y}_i + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \Delta t \ddot{y}_i \quad (2.75)$$

Además, si se considera la Ec. 2.71 de movimiento de la estructura en forma incremental, se tiene:

$$\bar{M} \Delta y + \bar{C} \Delta \dot{y} + \bar{K} \Delta y = \Delta Q \quad (2.76)$$

Si en la Ec. 2.76 se introduce lo obtenido en las Ecs. 2.74 y 2.75, es posible hallar una expresión que relacione el incremento del desplazamiento con el resto de las fuerzas que participan en el movimiento (PAZ, 1997):

$$\left( \frac{\bar{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\bar{C}_i}{2\beta \Delta t} + \bar{K}_i \right) \Delta y = \Delta Q + \frac{\bar{M}}{\beta \Delta t} \dot{y}_i + \frac{\bar{C}_i}{2\beta} \dot{y}_i + \frac{\bar{M}}{2\beta} \ddot{y}_i - \bar{C}_i \Delta t \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \ddot{y}_i \quad (2.77)$$

En la Ec. 2.77 es posible asumir lo siguiente:

$$\bar{K}_i^* = \frac{\bar{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\bar{C}_i}{2\beta \Delta t} + \bar{K}_i \quad (2.78)$$

Y además:

$$\Delta Q^* = \Delta Q + \frac{\bar{M}}{\beta \Delta t} \dot{y}_i + \frac{\bar{C}_i}{2\beta} \dot{y}_i + \frac{\bar{M}}{2\beta} y_i - \bar{C}_i \Delta t \left( 1 - \frac{1}{4\beta} \right) \dot{y}_i \quad (2.79)$$

Reemplazando las Ecs. 2.78 y 2.79 en la Ec. 2.77 se obtiene:

$$\bar{K}_i^* \Delta y = \Delta Q^* \quad (2.80)$$

En todas las ecuaciones anteriores,  $\bar{C}_i$  y  $\bar{K}_i$  son las matrices de amortiguación y rigidez respectivamente, evaluadas en el instante de tiempo inicial  $t_i$  del intervalo de tiempo  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  (PAZ, 1997).

En el uso del método de Newmark se debe seleccionar primeramente un valor numérico para el parámetro  $\beta$ ; el autor sugiere que  $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ . Para  $\beta = \frac{1}{6}$  el método asume una variación lineal de la aceleración, si bien los cálculos resultan ser condicionalmente estables. Para  $\beta = \frac{1}{4}$ , el método asume una variación lineal de la velocidad, lo que conlleva a considerar la aceleración como constante dentro del intervalo de tiempo. Este segundo caso es el más usado, pues ha demostrado ser estable en forma incondicional, además de poseer una precisión satisfactoria en sus resultados (PAZ, 1997).

### 2.5.2. Adaptación del método de Newmark al programa PLANT.

Para el cálculo de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones resultantes en una estructura debido a un terremoto, PLANT recoge los conceptos planteados por Newmark para su aplicación en algoritmos que equilibran las fuerzas de reacción (inercia, amortiguación y restauración) con las producidas por aceleraciones basales (LOPETEGUI *et al.*, 1987).

Retomando lo expuesto en el Párrafo 2.5.1. , Newmark plantea las siguientes ecuaciones para calcular el incremento de la velocidad y desplazamiento en un intervalo de tiempo dado:

$$\Delta \dot{y} = \dot{y}_i \Delta t + \gamma \Delta y \Delta t \quad (2.72)$$

$$\Delta y = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \dot{y}_i \Delta t^2 + \beta \Delta \dot{y} \Delta t^2 \quad (2.73)$$

Si consideramos que la variación de la aceleración comprende la diferencia entre los valores extremos del intervalo, entonces se tiene que:

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i \quad (2.81)$$

Con la Ec. 2.81 es posible ampliar las Ecs. 2.72 y 2.73. Recordando además que los valores óptimos para el análisis son  $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ , se obtiene (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI et al., 1987):

$$\Delta \dot{y} = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} (\ddot{y}_{i+1} - \ddot{y}_i) \Delta t \quad (2.82)$$

$$\Delta y = \dot{y}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{y}_i \Delta t^2 + \frac{1}{4} (\ddot{y}_{i+1} - \ddot{y}_i) \Delta t^2 \quad (2.83)$$

De la Ec. 2.83 es posible obtener la siguiente expresión para  $\ddot{y}_{i+1}$  :

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta y - \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_i - \ddot{y}_i \quad (2.84)$$

La Ec. 2.84 puede sustituirse en la Ec. 2.82, a fin de expresar la variación de la velocidad en función de los valores para el instante  $t = t_i$  :

$$\Delta \dot{y} = \frac{2}{\Delta t} \Delta y - 2 \dot{y}_i \quad (2.85)$$

Además, teniendo presente que  $\Delta \dot{y} = \dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i$ , se obtendrá de la Ec. 2.85 una nueva expresión:

$$\dot{y}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t} \Delta y - \dot{y}_i \quad (2.86)$$

Como se observa, las Ecs. 2.84 y 2.86 establecen una relación entre desplazamiento, velocidad y aceleración en los instantes  $t = t_{i+1}$  y  $t = t_i$ . Si además retomamos la Ec. 2.71, ésta puede quedar determinada para el instante  $t = t_{i+1}$ , resultando (LOPETEGUI et al., 1987):

$$\bar{M} \ddot{y}_{i+1} + \bar{C} \dot{y}_{i+1} + \bar{K} y_{i+1} = Q_{i+1} \quad (2.87)$$

Como  $y_{i+1} = y_i + \Delta y$ , se tiene de la Ec. 2.87 :

$$\bar{M} \ddot{y}_{i+1} + \bar{C} \dot{y}_{i+1} + \bar{K} \Delta y = Q_{i+1} - \bar{K} y_i \quad (2.88)$$

Es posible ahora sustituir las Ecs. 2.84 y 2.86 en la Ec. 2.88 :

$$\bar{\mathbf{M}}\left(\frac{4}{\Delta t^2}\Delta\mathbf{y} - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{y}}_i - \ddot{\mathbf{y}}_i\right) + \bar{\mathbf{C}}\left(\frac{2}{\Delta t}\Delta\mathbf{y} - \dot{\mathbf{y}}_i\right) + \bar{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{y} = \mathbf{Q}_{i+1} - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{y}_i \quad (2.89)$$

De la Ec. 2.89 se puede separar  $\Delta\mathbf{y}_i$  a un lado de la igualdad:

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2}\bar{\mathbf{M}} + \frac{2}{\Delta t}\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}}\right)\Delta\mathbf{y} = \mathbf{Q}_{i+1} + \left(\frac{4}{\Delta t}\bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{C}}\right)\dot{\mathbf{y}}_i + \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{y}_i \quad (2.90)$$

En la Ec. 2.90 es posible asumir los siguientes valores auxiliares:

$$\bar{\mathbf{K}}^s = \frac{4}{\Delta t^2}\bar{\mathbf{M}} + \frac{2}{\Delta t}\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{Q}_{i+1}^s = \mathbf{Q}_{i+1} + \left(\frac{4}{\Delta t}\bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{C}}\right)\dot{\mathbf{y}}_i + \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{y}}_i \quad (2.92)$$

Reemplazando las Ecs. 2.91 y 2.92 en la Ec. 2.90, se obtiene una expresión equivalente a un problema estático (LOPETEGUI et al., 1987):

$$\bar{\mathbf{K}}^s \Delta\mathbf{y} = \mathbf{Q}_{i+1}^s - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{y}_i \quad (2.93)$$

Para el caso de la Ec. 2.93, el programa obtiene las reacciones que equivalen a  $\bar{\mathbf{K}}\mathbf{y}_i$  mediante integración, mientras que  $\Delta\mathbf{y}_i$  se calcula por los métodos clásicos de resolución de sistemas de ecuaciones (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI et al., 1987).

Para optimizar el resultado de  $\Delta\mathbf{y}_i$  que se obtiene de la Ec. 2.93, se debe retomar lo planteado en la Ec. 2.90, y establecer que las fuerzas de reacción para  $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \Delta\mathbf{y}$  se determinen por medio de integración de las secciones, es decir (KUCK y HOFFMEISTER, 1988; LOPETEGUI et al., 1987):

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2}\bar{\mathbf{M}} + \frac{2}{\Delta t}\bar{\mathbf{C}}\right)\Delta\mathbf{y} = \mathbf{Q}_{i+1} + \left(\frac{4}{\Delta t}\bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{C}}\right)\dot{\mathbf{y}}_i + \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{y}_i + \Delta\mathbf{y}) \quad (2.94)$$

De manera análoga a la Ec. 2.93, en la Ec. 2.94 posible distinguir fuerzas que dependen de las reacciones internas ( $\mathbf{R}_s$ ), otras que dependen de factores asociados al problema

dinámico como son masa, amortiguamiento y tiempo ( $R_M$ ), lo que se resume en las siguientes fórmulas (LOPETEGUI et al., 1987):

$$R_S = \bar{K}(y_i + \Delta y) \quad (2.95)$$

$$R_M = \left( \frac{4}{\Delta t^2} \bar{M} + \frac{2}{\Delta t} \bar{C} \right) \Delta y \quad (2.96)$$

Reemplazando las Ecs. 2.95 y 2.96 en la Ec. 2.94, y aprovechando la sustitución de la Ec. 2.92, se tiene:

$$R_M = Q_{i+1}^S - R_S \quad (2.97)$$

Lo anterior sólo se cumple si los desplazamientos obtenidos en la Ec. 2.93 por medio de la solución del sistema de ecuaciones satisfacen lo planteado en la Ec. 2.97, cosa que no siempre sucede debido a que  $R_S$  es la resultante que se obtiene mediante la integración de las reacciones, la cual también considera la plastificación de alguna parte de la sección si ésta alcanza esfuerzos superiores al de fluencia del material; es por ello que se producen fuerzas residuales que rompen el equilibrio, las cuales se pueden calcular reordenando la Ec. 2.97 de la siguiente forma (LOPETEGUI et al., 1987):

$$F_{des} = Q_{i+1}^S - R_S - R_M \quad (2.98)$$

Dicho vector de fuerzas residuales es controlado por algoritmos del programa PLANT, puesto que es utilizado para aplicar los siguientes criterios de convergencia:

- 1) El módulo del vector de las fuerzas residuales deberá ser menor que un valor de tolerancia establecido previamente.
- 2) El módulo del vector de las fuerzas residuales para el presente paso de tiempo deberá ser menor que el del paso de tiempo anterior.
- 3) El trabajo realizado por las fuerzas residuales deberá ser menor que el trabajo realizado por las fuerzas que solicitan la estructura.
- 4) El trabajo realizado por las fuerzas residuales en el presente paso de tiempo deberá ser menor que el trabajo realizado por las fuerzas residuales del paso de tiempo anterior.



Si alguna de las condiciones anteriores no se cumple, entonces el programa ejecuta una subrutina de optimización de cargas y deformaciones, en donde a las fuerzas residuales se les restan sus componentes que no realizan trabajo en los estados de carga - deformación que se obtienen por integración. Dicha condición se determina mediante la ortogonalización de estados de carga y deformación que fue explicada en el Párrafo 2.2 (LOPETEGUI et al., 1987).

## **CAPÍTULO III : PROGRAMAS DE COMPUTACIÓN PARA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS AISLADAS EXISTENTES EN EL MERCADO**

### **3.1. Programa N-PAD.**

Fue el primer programa desarrollado específicamente para el cálculo de estructuras aisladas sísmicamente. Funciona en computadores IBM o compatibles, y es propiedad de Base Isolation Consultants of San Francisco (California). En él se modela explícitamente el comportamiento no-lineal del aislador, pero se simplifica el modelamiento de la superestructura. La aproximación se debe al supuesto que el aislador, al modificar el período y aumentar la energía disipada, reduce la transmisión de esfuerzos a través de la base a tal punto que la superestructura permanece dentro del rango elástico. En la representación de ésta se asumen diafragmas rígidos, de tal manera que hay sólo dos grados de libertad posibles en cada piso: dos de traslación y uno de rotación. Se puede especificar un amortiguamiento viscoso equivalente para cada modo de la superestructura (NAEIM y KELLY, 1999).

Este programa trabaja con dos modelos de comportamiento de material para representar la aislación: elastoplástico y bilineal, aparte de éstos también se puede representar el comportamiento lineal. Estos modelos consideran que las relaciones fuerza - deformación se producen dentro de un plano de corte. También se puede incluir para el aislador un coeficiente de amortiguación viscosa y la rigidez vertical (NAEIM y KELLY, 1999).

La configuración de la superestructura y los aisladores en el N-PAD tienden a resultados eficientes desde el punto de vista computacional. La desventaja de este programa radica en que no está diseñado para obtener el comportamiento completo de la superestructura, además de la falta de un modelo que considere el endurecimiento posterior a la fluencia que presentan algunos tipos de aisladores (NAEIM y KELLY, 1999; SKINNER *et al.*, 1996).

### **3.2. Programas 3D-BASIS.**

Corresponde a una serie de programas ampliamente difundidos para el cálculo de estructuras con aislación sísmica. Su primera versión fue desarrollada en la State University of New York con sede en Buffalo el año 1989, y fue posteriormente actualizada en 1991. En él se representa la superestructura con un modelo lineal elástico similar al del N-PAD, pero además se incorporan variados modelos para representar los comportamientos bilineales, friccionales o lineales viscosos que pueda presentar un aislador. El modelo bilineal está representado con el modelo de Wen, pero la respuesta está desacoplada en las dos direcciones horizontales (WEN, 1976). Los elementos friccionales consideran cargas bidireccionales e incorporan un coeficiente de fricción que varía con la velocidad de deslizamiento. Los soportes elásticos con amortiguación moderada se pueden representar también con elementos elásticos lineales y

viscosos lineales. El 3D-BASIS no incorpora ninguna capacidad vertical de análisis (NAEIM y KELLY, 1999).

En el 3D-BASIS se implementó un esquema de solución eficiente, en el cual las fuerzas de los elementos no lineales se trasladan al lado derecho de la ecuación y se resuelven iterativamente. Sin embargo, al igual que el N-PAD, no tiene la capacidad de modelar una superestructura general en tres dimensiones ni considerar el posible endurecimiento del aislador. Actualmente existen versiones del 3D-BASIS para diferentes tipos de plataformas y estaciones de trabajo. También se han creado versiones adaptadas para diferentes necesidades de cálculo estructural, como el 3D-BASIS-M (para varias estructuras soportadas por una única base aislada), el 3D-BASIS-ME (para estanques con aislación sísmica), y el 3D-BASIS-TABS (interface con el programa de análisis estructural ETABS). La distribución del 3D-BASIS se hace a través del National Center for Earthquake Engineering Research (NCEER) de la State University of New York en Buffalo (EE.UU.), y también en el National Information Service for Earthquake Engineering (NISEE) de la University of California en Berkeley (NAEIM y KELLY, 1999).

### **3.3. Programa ETABS.**

El programa ETABS es uno de los más populares para el análisis dinámico estructural en la zona oeste de Estados Unidos. Ha sido desarrollado por Computer and Structures of Berkeley (California). A partir de su sexta versión se le han introducido numerosos elementos no-lineales, los cuales son apropiados para la modelación de aisladores sísmicos. Éstos incluyen elementos bilineales simples con endurecimiento constante y elementos viscosos con velocidades de exponente variable. Al combinar estos elementos se puede modelar el comportamiento de aisladores de elastómero de alto amortiguamiento, con núcleo de plomo, o del tipo friccional. En un análisis de historial de tiempo el modelo de una superestructura tridimensional completa de comportamiento lineal se descompone en sus formas modales y luego se combina con los elementos no-lineales. Estos elementos no-lineales concentrados también se pueden usar dentro de la superestructura, por ejemplo, para modelar disipadores pasivos de energía. El uso de elementos especiales como aberturas (“gaps”) y resortes (“springs”) hace posible la modelación de la tensión neta y el levantamiento del aislador. En este caso, sin embargo, las masas no producen efecto en el sentido vertical, por lo que se subestima la fuerza de impacto que se produce cuando un aislador levantado retorna a su posición de equilibrio. Una característica importante de este programa es la facilidad con que se pueden modelar losas de piso no-rígidas (NAEIM y KELLY, 1999).

### **3.4. Programa SAP-2000 Nonlinear.**

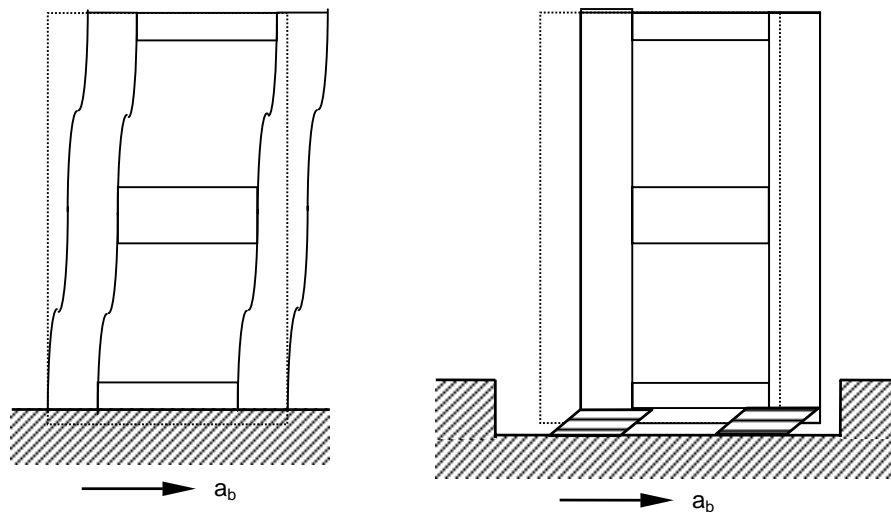
El programa SAP-2000 pertenece a una serie de programas desarrollados por Edward L. Wilson en la University of California (Berkeley, EE.UU.) desde los primeros años de la década del '70. En dicha época, las versiones más populares de esta serie eran SAP-IV, NONSAP y SOLIDSAP. Posteriormente, con la aparición de los computadores personales, aparecen nuevas versiones para este formato a cargo de la Computer and Structures (Berkeley, California). La última generación es la SAP-2000, diseñada para ejecutarse en ambiente Microsoft Windows, e incluye interfases gráficas que permiten entre otras cosas la visualización de la estructura diseñada, deformaciones a escala, y animaciones en tiempo real de desplazamientos en un historial de carga a través del tiempo (CSI, 1997; NAEIM y KELLY, 1999).

La serie SAP-2000 está compuesta por los programas SAP-2000, SAP-2000 PLUS y SAP-2000 Nonlinear. Todos estos programas incluyen sistemas rápidos de solución de ecuaciones, solicitaciones estructurales de cargas o deformaciones, vigas no prismáticas, elementos tipo cáscara de alta precisión, análisis dinámico con vectores propios o de Ritz, diferentes tipos de sistemas coordinados, opciones de constricción de puntos, fusión de mallas creadas en forma independiente, elementos de resorte para todos los grados de libertad, múltiples análisis dinámicos en un sólo cálculo, y el diseño y optimización de estructuras de acero o concreto. La versión SAP-2000 Nonlinear es de especial interés para el modelamiento de edificios aislados sísmicamente, pues incluye variados elementos no lineales que simulan el comportamiento de aisladores elastoplásticos o friccionales, amortiguadores viscosos, entre otras no-linealidades localizadas. El SAP-2000 Nonlinear utiliza un esquema de solución similar al del 3D-BASIS, en el cual las fuerzas de los elementos no-lineales se colocan en el lado derecho de la ecuación de movimiento, que luego se resuelve en forma iterativa hasta alcanzar la convergencia (CSI, 1997; NAEIM y KELLY, 1999).

## CAPÍTULO IV : MODELOS DE AISLACIÓN SÍSMICA

### 4.1. El objetivo de la aislación sísmica.

Un aislador sísmico pasivo, a la luz del análisis estructural, es un elemento conector que en virtud de sus propiedades mecánicas produce un desacople del movimiento de una estructura con respecto a su base. Su objetivo principal es producir una concentración de deformaciones en la base, de tal manera que la inercia y la rigidez relativa mayor que tiene la estructura montada sobre él produzcan un efecto análogo al que tendría un cuerpo rígido apoyado sobre una base muy blanda, es decir, mientras el suelo se desplaza, la estructura tiende a mantener su posición original. Como se muestra en la FIGURA 4.1. , este hecho hace ventajosa la implementación de aisladores, puesto que los efectos más dañinos para las estructuras se deben precisamente a los esfuerzos resultantes del desplazamiento relativo entre pisos (“drift”) (BOZZO, 1996; ASOCIACIÓN CHILENA DE SISMOLOGÍA E INGENIERÍA SISMICA (ACHISINA), 2001).



**FIGURA 4.1** Comportamiento de una estructura de base fija y con aislación basal.

En términos generales, cuando se habla de un modelo de aislación, el concepto va enfocado a representar mediante una ecuación las fuerzas restauradoras (lineales o no lineales, según sea el caso) localizadas en la base de una estructura (BOZZO, 1996; ORDÓÑEZ, 1996). Es decir, para un elemento aislador:

$$m_b \ddot{x}_b + c_{ais} \dot{x}_b + f_r = F(t) \quad (4.1)$$

$m_b$  : Masa asociada al aislador, generalmente referida a la base de la estructura.

$c_{ais}$  : Amortiguamiento viscoso correspondiente al aislador.

$x_b$  : Grado de libertad donde está involucrado el efecto del aislador.

$f_r$  : Función que representa la fuerza restauradora que varía según el tipo de aislador.

$F(t)$  : Función que representa la sollicitación de carga sobre el aislador en un instante de tiempo determinado.

Al incluir este elemento aislador en las ecuaciones correspondientes al sistema estructural analizado, se obtiene la siguiente ecuación matricial (ORDÓÑEZ, 1996; SKINNER et al., 1996):

$$\bar{M} \dot{X} + (\bar{C}_L + \bar{C}_{ais}) \dot{X} + \bar{K}_L X + R_{ais} = F(t) \quad (4.2)$$

$X$  : Vector de los grados de libertad del sistema que forman la estructura y el aislador.

$\bar{M}$  : Matriz de masa del sistema.

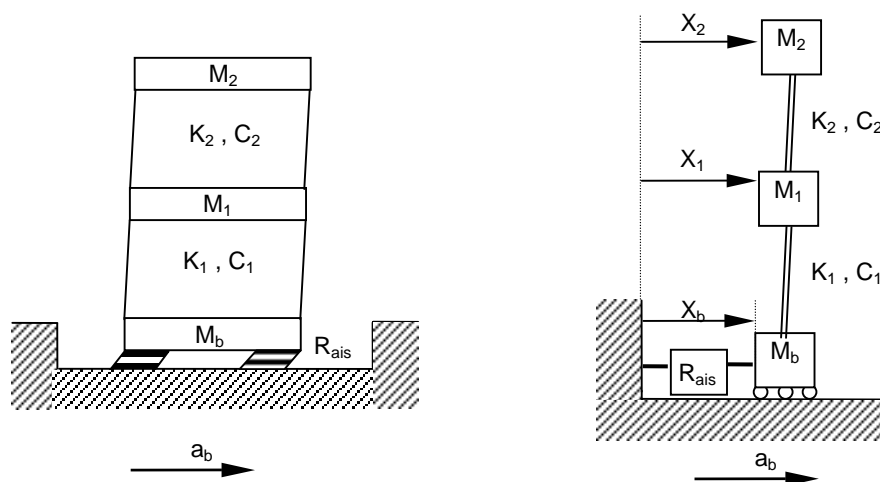
$\bar{C}_L$  : Matriz de amortiguación para la estructura como cuerpo libre.

$\bar{C}_{ais}$  : Matriz que contiene los amortiguamientos viscosos de los aisladores en los grados de libertad correspondientes, y ceros en las restantes posiciones.

$\bar{K}_L$  : Matriz de rigidez de la estructura como cuerpo libre.

$R_{ais}$  : Vector que contiene las fuerzas restauradoras en los grados de libertad correspondientes, y ceros en las otras posiciones.

$F(t)$  : Vector de las fuerzas que sollicitan la estructura en un instante de tiempo.



**FIGURA 4.2** Ejemplo de una estructura lineal de dos pisos montada sobre un sistema de aislamiento.

Sin embargo, los planteamientos anteriores conllevan a dos hechos sustanciales dentro de la teoría y la ejecución del análisis de una estructura aislada (BOZZO, 1996; ORDÓÑEZ, 1996):

- 1) La concepción de modelos matemáticos que representen el comportamiento a través del tiempo del dispositivo aislador utilizado.
- 2) La necesidad de revisar y adaptar los procedimientos de análisis estructural dinámico convencionales a estos nuevos elementos.

A continuación se presentan algunos de los dispositivos de aislación pasiva usados en la actualidad; junto a ellos está su correspondiente modelo matemático adecuado para el análisis estructural (BOZZO, 1996).

#### **4.2. Aislador de goma con bajo amortiguamiento (Low-damping rubber bearing: LDB).**

Históricamente, el primer uso de un dispositivo elástico de bajo amortiguamiento con fines antisísmicos data de 1969, durante la construcción del Colegio Pestalozzi en Skopje (Macedonia). En aquel entonces, un grupo de ingenieros suizos ideó una forma de desacoplar la estructura de su base, montado ésta sobre bloques macizos de goma natural (NAEIM y KELLY, 1999).

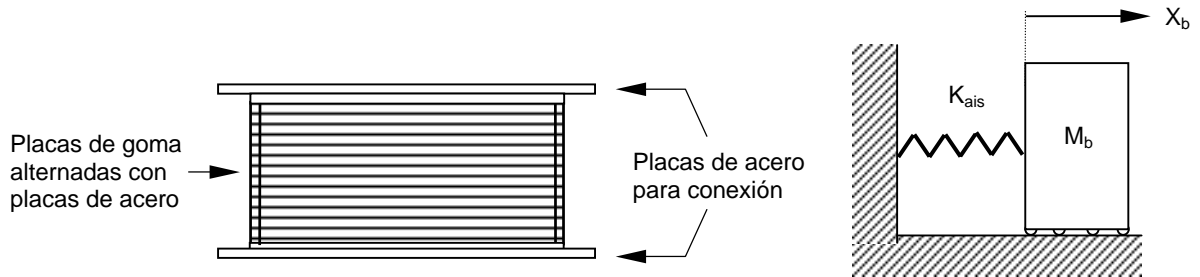
En la actualidad, estos dispositivos de aislación son fabricados con varias capas horizontales de neopreno (o goma natural) alternadas con planchas delgadas de acero; éste conjunto se somete a calor y presión para adherir ambas fases por vulcanización. Esta composición le confiere al aislador una gran rigidez axial y una gran flexibilidad al corte (ACHISINA, 2001; BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999).

Desde el punto de vista numérico, este tipo de aislador es el más directo de tratar. Básicamente es un elemento con alta rigidez vertical (o axialmente indeformable, en el caso de un análisis pseudo-tridimensional), rigidez horizontal lineal baja y amortiguación viscosa baja o nula; esto le permite ser analizado por los métodos convencionales de la dinámica de estructuras. La siguiente es su ecuación de fuerza restauradora (ACHISINA, 2001; BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999; SKINNER *et al.*, 1996):

$$f_r = k_{ais} x_b \quad (4.3)$$

En la ecuación anterior se debe tener presente:

- 1) La rigidez lineal del aislador  $k_{ais}$  será mucho menor que la rigidez obtenida por condensación estática de la estructura para cualquier otro grado de libertad incluido en el análisis.
- 2) El amortiguamiento viscoso del aislador será muy bajo o prácticamente nulo.



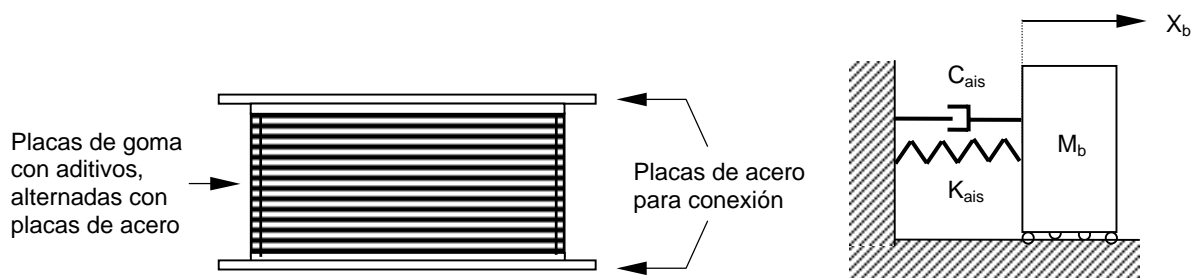
**FIGURA 4.3** Esquema de un aislador LDB junto a su modelo dinámico.

Las ventajas de este sistema de aislación radican en su bajo costo de producción y mantenimiento, además de su fácil modelamiento matemático (BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999). Su desventaja está en que a la mayoría de los edificios aislados les conviene incluir un elemento de amortiguación adicional que disipe energía dinámica, por lo que es necesario considerar la instalación de estos amortiguadores adicionales (NAEIM y KELLY, 1999).

#### 4.3. Aislador de goma de alto amortiguamiento (High-damping rubber bearing: HDB).

El primer dispositivo aislador de goma que incluía entre sus propiedades un alto amortiguamiento data de 1982, y fue creado en la Malaysian Rubber Producers' Research Association. Se obtuvo un notable incremento de la amortiguación al añadir a la goma algunos aditivos tales como bloques de carbón extrafino, aceites y resinas; el resto de las características de fabricación son las mismas de los aisladores LDB (NAEIM y KELLY, 1999).

Numéricamente, este aislador tiene el mismo tratamiento de los LDB (BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999). Sin embargo, se debe tener presente que en este caso el dispositivo tiene su propia amortiguación inherente a su composición (NAEIM y KELLY, 1999).



**FIGURA 4.4** Esquema de un aislador HDB junto a su modelo dinámico.



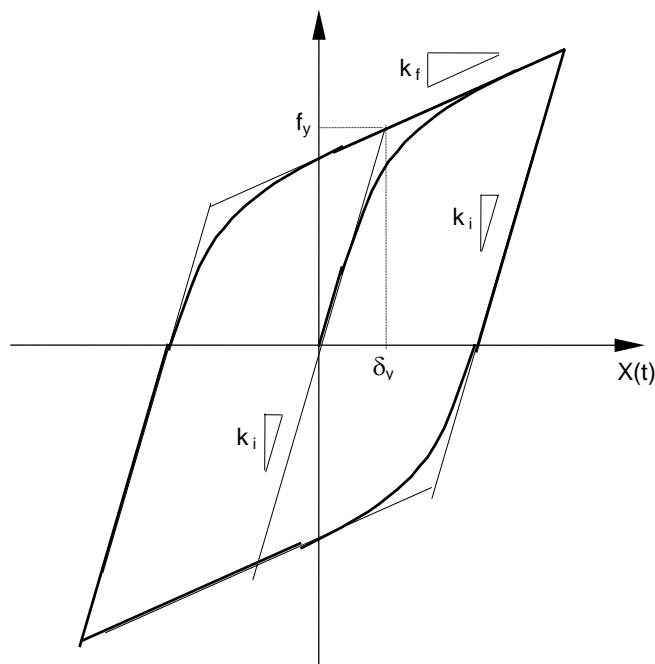
Considerando lo anterior, la fuerza restauradora del aislador HDB será la misma expresada en la Ec. 4.3, pero con un valor de amortiguación significativamente alto (BOZZO, 1996).

Las ventajas del aislador HDB son su bajo costo de producción y mantenimiento (puesto que requiere de la misma tecnología de un LDB), además de no requerir la instalación de dispositivos adicionales para agregar amortiguamiento a la estructura como en el caso de los LDB (NAEIM y KELLY, 1999). Su desventaja se encuentra precisamente en la modelación matemática de dicha amortiguación. Los ensayos de laboratorio han demostrado que el amortiguamiento varía significativamente en función de la deformación (ACHISINA, 2001; NAEIM y KELLY, 1999). Teniendo en cuenta el valor  $\zeta$  (cuociente entre el amortiguamiento viscoso y el amortiguamiento crítico del aislador), se ha observado que para valores de hasta el 20% de deformación por corte se tiene un  $\zeta$  de alrededor del 0.3, mientras que entre 20% y 120% de deformación por corte, el valor de  $\zeta$  se reduce a 0.05. Esto conlleva a que el comportamiento de este aislador no esté claramente definido; si bien lo aceptado para el diseño es usar un valor de  $\zeta = 0.1$  y asumir el modelo clásico de las Ecs 4.1 y 4.3 (BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999), es decir:

$$m_b \ddot{x}_b + c_{ais} \dot{x}_b + k_{ais} x_b = F(t) \quad (4.4)$$

#### 4.4. Aislador de goma con núcleo de plomo (Lead - rubber bearing: LRB).

Este dispositivo de aislación fue creado en Nueva Zelanda el año 1975 por el ingeniero William H. Robinson (SKINNER et al., 1996). Básicamente, se trata de un aislador LDB que tiene incorporado en el centro un cilindro de plomo que lo atraviesa longitudinalmente, el cual está firmemente confinado por las placas de acero del aislador (NAEIM y KELLY, 1999; SKINNER et al., 1996). Debido a que el plomo tiene la capacidad de recuperar la configuración cristalina a temperatura ambiente luego de una deformación plástica, además de poseer un límite de fluencia al corte más bajo que el de la mayoría de los metales (10 MPa), se observa en este tipo de aislador un comportamiento elastoplástico, el cual se hace evidente en la forma histerética de la curva de carga versus deformación del LRB sometido a un test de carga cíclica (ACHISINA, 2001; SKINNER et al., 1996). En lo referente al análisis numérico, existen dos modelos utilizados para representar este comportamiento. El primero es el modelo bilineal, en el cual la histéresis obtenida en el test de carga cíclica es aproximada por medio de rectas (ACHISINA, 2001; SKINNER et al., 1996).



**FIGURA 4.5 Curva histerética, aproximada mediante modelo bilineal.**

Como se observa en la FIGURA 4.5, mediante este modelo es posible además obtener valores que sirven para caracterizan al aislador LRB (SKINNER et al., 1996):

- 1) Una rigidez inicial ( $k_i$ ), asociada a la reacción del aislador frente a cargas de baja magnitud. Se obtiene al trazar una recta tangente a las zonas de menor carga del ciclo.
- 2) Una rigidez post - fluencia ( $k_f$ ), asociada a la reacción del aislador frente a las cargas más altas del ciclo. Se obtiene al trazar una recta tangente a la curva que pase por el punto de mayor desplazamiento de la histéresis.
- 3) Una carga de fluencia ( $f_y$ ), con su correspondiente desplazamiento de fluencia ( $\delta_v$ ), que establecen un valor convencional de transición entre las relaciones carga - deformación antes mencionadas. Se obtiene en el punto de intersección de la recta de rigidez post - fluencia con la de rigidez inicial, esta última debe pasar por el origen de coordenadas (representando así el estado previo a la primera fluencia del aislador en el ciclo).

La principal ventaja de este modelo es su simplicidad, pues mediante algoritmos sencillos es posible determinar si el aislador LRB está sometido a una carga que comprometa su rigidez inicial o de post - fluencia (SKINNER et al., 1996). Su desventaja radica en que la región de transición en el estado elastoplástico se aproxima mejor con una curva y no con una

recta, por lo que se están considerando deformaciones mucho menores que las reales (ACHISINA, 2001).

El segundo método utilizado para representar el comportamiento de un aislador LRB es el modelo histerético de Bouc - Wen, en el cual se descompone la reacción elastoplástica en una componente directamente proporcional al desplazamiento (resorte lineal) y otra dependiente de la variable  $z$ , como se observa en la Ec. 4.5 (ACHISINA, 2001; BOZZO, 1996; COMPUTER AND STRUCTURES INC. (CSI), 1997; ORDÓÑEZ, 1996; WEN,1976):

$$f_r = \alpha k_i x_b + (1 - \alpha) f_y z \quad (4.5)$$

La variable  $z$  es adimensional y su comportamiento viene dado por la siguiente ecuación diferencial (ACHISINA, 2001; BOZZO, 1996; CSI, 1997; ORDÓÑEZ, 1996; WEN,1976):

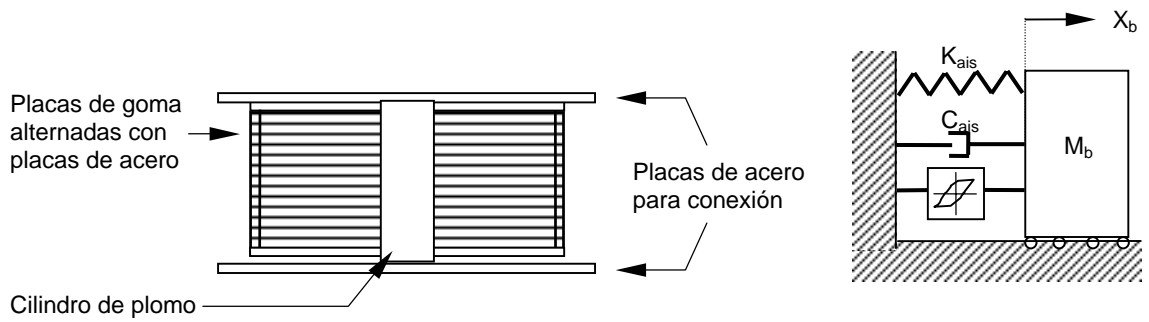
$$\dot{z} = \frac{1}{\delta_y} \left( A \dot{x}_b - \beta z |\dot{x}_b| |z|^{n-1} - \gamma \dot{x}_b |z|^n \right) \quad (4.6)$$

Los valores  $k_i$ ,  $f_y$ ,  $\delta_y$ , son los mismos utilizados para caracterizar el modelo bilineal, mientras que  $\alpha = k_f / k_i$  (BOZZO, 1996; CSI, 1997; ORDÓÑEZ, 1996). Los parámetros  $A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $n$  que aparecen en la Ec. 4.6 están relacionados con el tipo de reacción elastoplástica a través del tiempo que se desea obtener (ACHISINA, 2001; BOZZO, 1996; ORDÓÑEZ, 1996; WEN,1976).

La principal ventaja de este modelo es su refinamiento y exactitud, pues al variar sus parámetros es posible emular una gran variedad de comportamientos elastoplásticos que sirven para caracterizar la respuesta de un aislador LRB en el tiempo (ACHISINA, 2001; BOZZO, 1996; CSI, 1997; ORDÓÑEZ, 1996; WEN,1976). Su desventaja radica en que se trata de un modelo descrito mediante una ecuación diferencial, el cual al ser incorporado a la expresión general del aislador en movimiento (Ec. 4.1) se tiene:

$$\begin{cases} m_b \ddot{x}_b + c_{ais} \dot{x}_b + \alpha k_i x_b + (1 - \alpha) f_y z = F(t) \\ \dot{z} = \frac{1}{\delta_y} \left( A \dot{x}_b - \beta z |\dot{x}_b| |z|^{n-1} - \gamma \dot{x}_b |z|^n \right) \end{cases} \quad (4.7)$$

Los problemas surgen al buscar un algoritmo que combine y resuelva satisfactoriamente tanto el comportamiento del edificio analizado como el de los aisladores LRB incorporados, particularmente la fuerza expresada por el parámetro  $z$  de la Ec. 4.6 (ORDÓÑEZ, 1996).



**FIGURA 4.5 Esquema de un aislador LRB junto a su modelo dinámico.**

#### 4.5. Aislador Electricité de France (EDF).

Este sistema de aislación fue desarrollado durante los años '70 para su aplicación en la central de energía nuclear de Koeberg (Sudáfrica) (NAEIM y KELLY, 1999). El aislador EDF se compone de un bloque de neopreno reforzado, sobre el cual se adhiere una placa de aleación de bronce y plomo, sobre ésta va una placa de acero inoxidable simplemente apoyada, la cual está fijada a la base de la estructura. Esta disposición produce un efecto tal que para solicitaciones de baja intensidad el movimiento es controlado por el bloque de neopreno reforzado, de tal manera que reacciona análogamente a un aislador HDB. Si la solicitación aumenta, entonces se produce el deslizamiento entre las placas de bronce - plomo y acero, provocando una fuerza de roce con la consecuente disipación de energía (BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999). Se ha comprobado que para este tipo de aisladores el efecto del neopreno reforzado rige hasta desplazamientos no mayores a 5 cm., luego de lo cual el deslizamiento de las placas provee una fuerza de roce con un  $\mu = 0.2$  (NAEIM y KELLY, 1999).

El modelo matemático asociado a un aislador EDF consta de dos fases. Para la fase previa al deslizamiento, es la misma Ec. 4.4 utilizada para representar un aislador HDB. En la fase donde existe deslizamiento de las placas, éstas producen una fuerza de roce dada por la siguiente ecuación (BOZZO, 1996):

$$f_{roce} = \mu g m_t \text{sign}(\dot{x}_b - \dot{x}_e) \quad (4.8)$$

En la ecuación anterior,  $\mu$  es el coeficiente de roce entre las superficies deslizantes,  $g$  es la aceleración de gravedad,  $m_t$  es la masa de la estructura sobre dicho aislador (no sólo la masa de la base),  $\text{sign}$  es la función signo,  $x_b$  es el desplazamiento de la base del edificio relativo al suelo y  $x_e$  es la deformación del elastómero. Al respecto, si consideramos que las fuerzas del elastómero se encuentran en serie con las de rozamiento, entonces se tiene la siguiente ecuación (BOZZO, 1996):

$$c\dot{x}_e + kx_e - \mu g m_t \text{sign}(\dot{x}_b - \dot{x}_e) = 0 \quad (4.9)$$

Al aplicar estas ecuaciones, se debe tener presente que en la fase inicial previa al deslizamiento las fuerzas de corte generadas por la aceleración basal  $a_b$  no superan a las fuerzas de roce generadas por la carga sobre el aislador (BOZZO, 1996):

$$m_t \mu g > |m_t a_b| \quad (4.10)$$

La ventaja de este aislador es que el bloque de neopreno le proporciona buena amortiguación frente a sismos de baja intensidad, mientras que sus placas deslizantes producen gran disipación de energía cuando las solicitaciones aumentan (BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999). El principal inconveniente de este sistema es que para solicitaciones muy severas la fuerza restauradora del elastómero no es suficiente para recentrarlo, por lo que puede incurrir en deformaciones permanentes (NAEIM y KELLY, 1999).

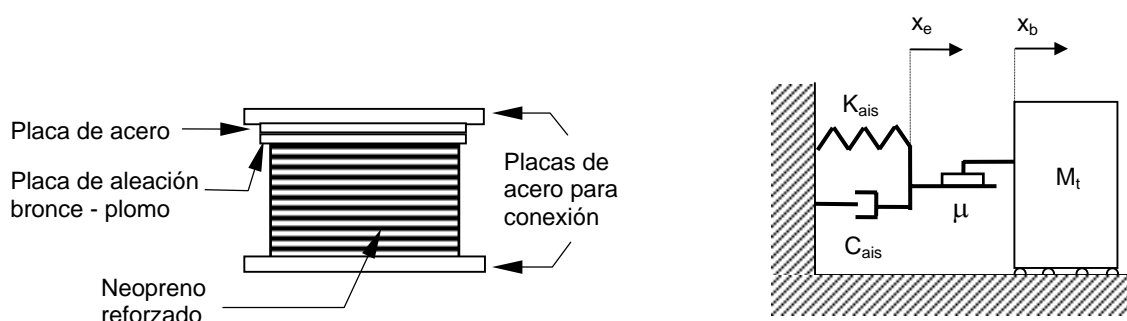


FIGURA 4.6 Esquema de un aislador EDF junto a su modelo dinámico.

#### 4.6. Aislador elástico - friccionante (Resilient - friction base isolator: R-FBI).

Este sistema aprovecha las fuerzas de roce provocadas por la velocidad relativa entre dos superficies de distinta naturaleza que permanecen en contacto. Un aislador R-FBI está compuesto de varias capas intercaladas de acero inoxidable y Teflón (politetrafluorotileno), en su núcleo posee un cilindro de elastómero que lo atraviesa longitudinalmente. La idea de una composición multilaminar es repartir en varios desplazamientos pequeños el desplazamiento total, que de otra manera generaría una excesiva fuerza de roce debido al  $\mu$  significativamente alto que existe entre el acero y el Teflón. El propósito del cilindro central de elastómero es proporcionar fuerza restauradora al aislador para recentrarlo después de un desplazamiento (BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999).

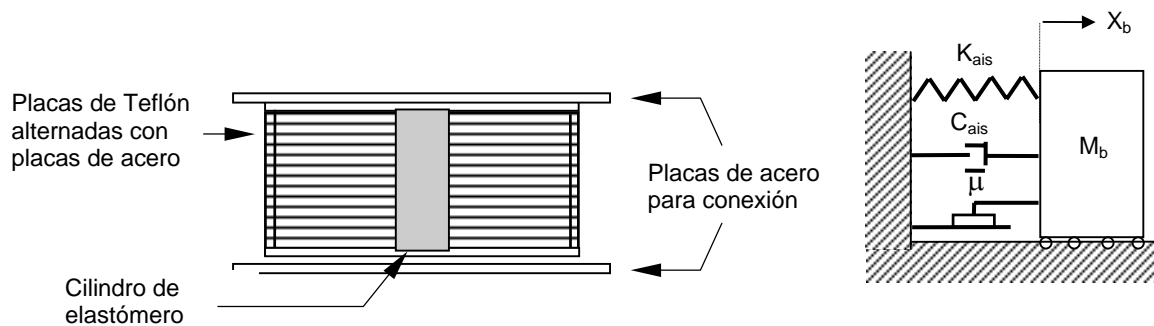
El modelo matemático de un aislador R-FBI representa la acción en paralelo del núcleo de elastómero y las placas de Teflón (BOZZO, 1996):

$$m_b \ddot{x}_b + c_{ais} \dot{x}_b + k_{ais} x_b + \mu g m_t \text{sign}(\dot{x}_b) = F(t) \quad (4.11)$$

La Ec. 4.11 no se cumple si la fuerza de corte basal junto a la fuerza restauradora elástica del aislador son inferiores a las fuerzas de roce generadas por la carga normal sobre el aislador (BOZZO, 1996):

$$m_t g \mu > |m_t a_b + k_{ais} x| \quad (4.12)$$

Con respecto al coeficiente de roce, el valor de  $\mu$  usado para el diseño es del rango de 0.03 a 0.05, el cual es bastante menor si se le compara con el  $\mu = 0.2$  utilizado para el diseño de un aislador EDF (BOZZO, 1996). Se ha comprobado mediante ensayos de laboratorio que el núcleo de elastómero no evita la concentración de deformaciones en una sola capa de Teflón, por lo que se han creado aisladores R-FBI que incluyen una barra de acero que pasa por el centro del elastómero a fin de mantener una distribución uniforme de los desplazamientos (NAEIM y KELLY, 1999).



**FIGURA 4.7 Esquema de un aislador R-FBI junto a su modelo dinámico.**

#### 4.7. Aislador de péndulo friccionante (Friction pendulum system: FPS).

Este sistema fue desarrollado durante los años '80 en Estados Unidos (BOZZO, 1996). Al igual que el aislador R-FBI, se basa en la disipación de energía por rozamiento. Este aislador consiste en un apoyo esférico cubierto con Teflón montado sobre una placa cóncava de acero pulimentado. Al desplazarse lateralmente el aislador, se rompe el equilibrio estable de la esfera sobre la superficie cóncava, lo que produce una fuerza lateral que tiende a centrar nuevamente el apoyo y que actúa como fuerza restauradora (ACHISINA, 2001; BOZZO, 1996; NAEIM y KELLY, 1999).

El modelo matemático asociado a un aislador FPS es (ACHISINA, 2001; BOZZO, 1996):

$$f_r = \frac{m_t g}{R} x + \mu m_t g \text{sign}(\dot{x}) \quad (4.13)$$

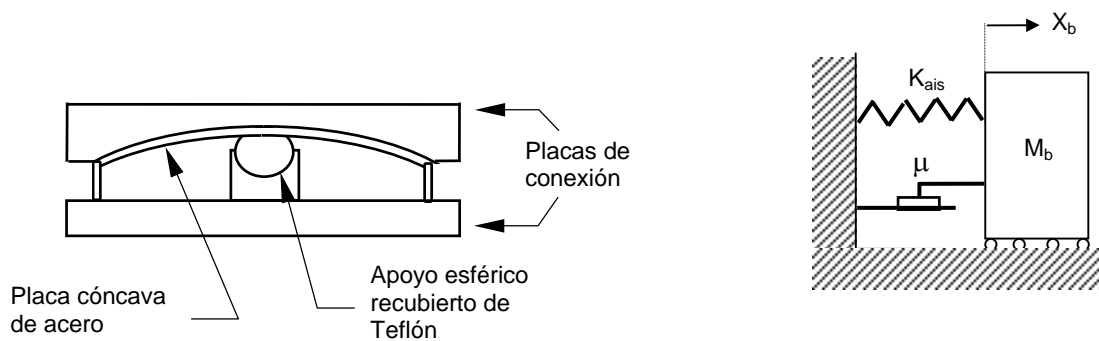
$R$  es el radio de curvatura de la placa cóncava de acero. Se puede observar que en la Ec. 4.13 se puede obtener una analogía de la rigidez elástica en la expresión que multiplica el desplazamiento del aislador (ACHISINA, 2001):

$$k_{ais} = \frac{m_t g}{R} \quad (4.14)$$

Como en los demás casos de aisladores friccionantes, se debe considerar que existe una condición que impide el deslizamiento:

$$m_t g \mu > \left| m_t a_b + \frac{m_t g}{R} x_b \right| \quad (4.15)$$

Para el diseño de los aisladores FPS se recomienda que la presión de contacto entre el Teflón y el acero no exceda los 40 Mpa (ACHISINA, 2001), y el coeficiente de fricción  $\mu$  se encuentre dentro del rango de 0.05 a 0.15 (BOZZO, 1996). Valores por debajo de este rango pueden provocar que la estructura sea susceptible a moverse por acción del viento. Por otra parte, valores por sobre el rango bloquean el deslizamiento, cancelando la mecánica aisladora (BOZZO, 1996).



**FIGURA 4.8** Esquema de un aislador FPS junto a su modelo dinámico.

## CAPÍTULO V : MÉTODO UTILIZADO PARA INCORPORAR EL MODELO DE AISLACIÓN SÍSMICA AL PROGRAMA PLANT ORIGINAL

### 5.1. Modelo de aislación utilizado.

Frente a las posibilidades de escoger un modelo matemático para incluir un dispositivo de aislación sísmica dentro del programa de cálculo estructural PLANT a partir de lo enunciado en el Capítulo IV, se ha optado por el modelo de WEN (1976). Dicha elección se debe a que con esta ecuación es posible simular variadas respuestas elastoplásticas como así también bilineales o lineales (BOZZO, 1996; ORDÓÑEZ, 1996; WEN, 1976; WEN, 1980). Otra razón importante es el hecho que éste modelo está incorporado como elemento no lineal en el programa de cálculo estructural SAP-2000® Nonlinear, el cual servirá como punto de comparación con los resultados incluidos dentro de esta tesis (CSI,1997; NAEIM y KELLY, 1999).

El modelo de Wen se compone de una fuerza restauradora que utiliza como variable el desplazamiento, además de una variable adimensional denominada  $z$  (WEN, 1976; WEN, 1980):

$$F_{res}(x, z) = \alpha kx + (1 - \alpha)kz \quad (5.1)$$

El comportamiento de la variable  $z$  está descrito por la siguiente ecuación diferencial (WEN, 1976; WEN, 1980):

$$\dot{z} = A\dot{x} - \beta z|\dot{x}|z|^{n-1} - \gamma \dot{x}|z|^n \quad (5.2)$$

Los parámetros  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $n$  que aparecen en la Ec. 5.2 son números adimensionales que regulan cada una de las características del comportamiento del modelo (ORDÓÑEZ, 1996; WEN, 1976):

- $A$  : Factor de escala general.
- $\alpha$  : Razón de proporción entre la fuerza lineal y la fuerza no lineal.
- $\beta, \gamma$  : Determinan la forma de la curva.
- $n$  : Regula la suavidad de la transición entre la región lineal y no lineal.

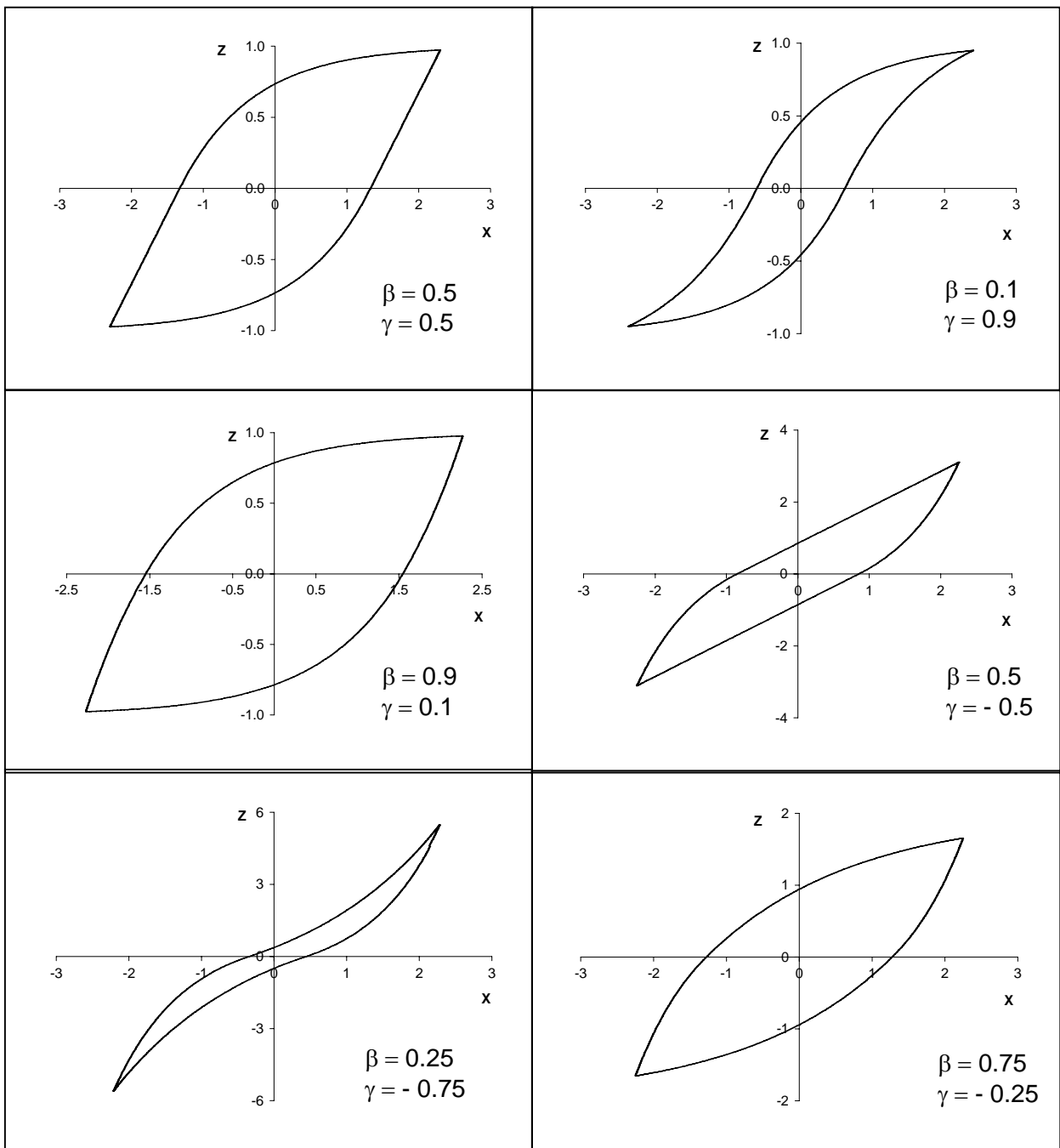
La influencia que tienen los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  en la variable  $z$  se puede visualizar al trazar la gráfica de dicha variable versus el desplazamiento, con una sollicitación externa de tipo periódica (sinusoidal a través del tiempo). Dicha sollicitación debe afectar a un oscilador de un



grado de libertad en el cual se incluyen las fuerzas de inercia, de amortiguación (viscoelástica) y la restauradora representada por el modelo de Wen:

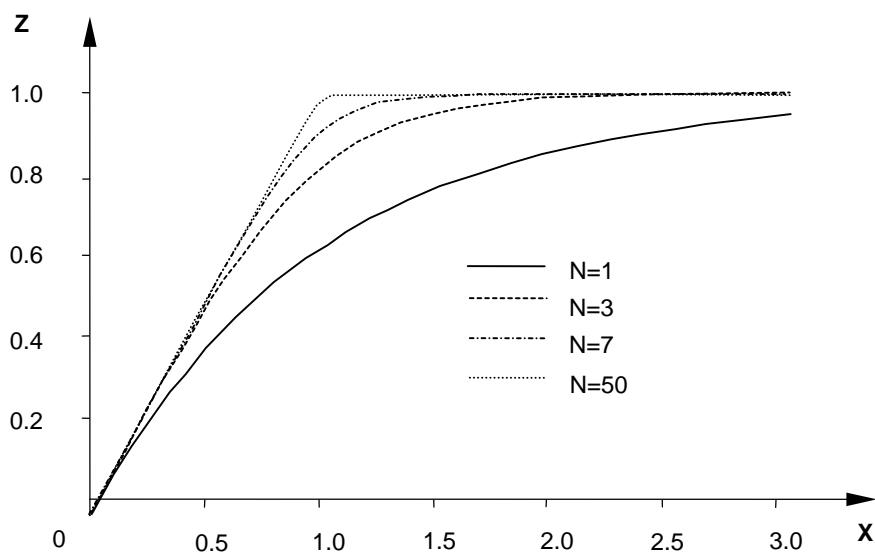
$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + F_{res}(x, z) = P(t) \\ F_{res}(x, z) = \alpha kx + (1 - \alpha)kz \\ \dot{z} = A\dot{x} - \beta z|\dot{x}|z^{n-1} - \gamma \dot{x}|z|^n \end{cases} \quad (5.3)$$

En la FIGURA 5.1 se presentan ejemplos de  $z$  versus  $x$  con  $P(t) = \text{sen}(\frac{1}{2}\pi t)$ ,  $m = 0.4$ ,  $c = 1$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $A = 1$ ,  $n = 1$  para diferentes valores de  $\beta$  y  $\gamma$  (WEN, 1976).



**FIGURA 5.1** Comportamiento de la variable  $z$  con  $A = 1$ ,  $\alpha = 0.5$  y  $n = 1$  para diferentes valores de  $\beta$  y  $\gamma$ .

Con respecto al parámetro  $n \in [1, +\infty[$ , entre más alto sea el valor utilizado, más dura es la curva de transición, como se observa en la FIGURA 5.2 (ORDÓÑEZ, 1996; WEN, 1976). Dado lo anterior, para eliminar completamente la porción curva, se entiende que  $n \rightarrow +\infty$ , aunque en la práctica se ha observado que es suficiente tomar valores del orden de  $n > 20$  (CSI, 1997).



**FIGURA 5.2 Comportamiento de la variable  $z$  con  $A = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = \gamma = 0.5$ , y distintos valores de  $n$ .**

Si bien el modelo de Wen puede resultar muy versátil a la hora de representar un comportamiento elastoplástico, sus parámetros no tienen una interpretación clara para el campo de la ingeniería estructural. Es por ello que para el cálculo y diseño de aisladores, algunos autores han reescrito la ecuación de la fuerza restauradora, adaptando algunos de los términos de la versión original (BOZZO, 1996; CSI, 1997; ORDÓÑEZ, 1996;):

$$\begin{cases} F_{res}(x, z) = \alpha k_i x + (1 - \alpha) f_y z \\ \delta_y \dot{z} = A \dot{x} - \beta z |\dot{x}| |z|^{n-1} - \gamma \dot{x} |z|^n \end{cases} \quad (5.4)$$

- $k_i$  : Rigidez inicial (previa a la fluencia).
- $\alpha$  : Cuociente entre la rigidez post fluencia ( $k_f$ ) y la rigidez inicial
- $f_y$  : Esfuerzo de fluencia
- $\delta_y$  : Desplazamiento de fluencia

La interpretación de los términos  $k_i$ ,  $\alpha$ ,  $f_y$ ,  $\delta_y$  es la misma que se mencionó en el Párrafo 4.4. Por otra parte, los parámetros  $A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $n$  conservan el significado asignado originalmente por Y. Wen (ORDÓÑEZ, 1996). Esta versión usa  $z$  como variable adimensional, mientras que el término  $\delta_y$  se ha introducido para mantener la concordancia entre las unidades

de la ecuación que representa a  $\ddot{z}$  con las unidades de la ecuación de la fuerza restauradora (BOZZO, 1996; CSI, 1997; ORDÓÑEZ, 1996).

Con respecto a los valores más comunes utilizados para la modelación de aisladores, los autores recomiendan  $A = 1$  (BOZZO, 1996; CSI, 1997; DE LUCA *et al.*, 1994; ORDÓÑEZ, 1996; WEN, 1976; WEN, 1980). En cuanto a los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ , BOZZO (1996) propone  $\beta = 1.4$  y  $\gamma = -0.54$ , mientras que la herramienta para el cálculo de aisladores del programa SAP2000® Nonlinear utiliza  $\beta = \gamma = 0.5$  (CSI, 1997). Como se señaló en el Párrafo 4.4, los valores de  $f_y$  y  $\delta_y$  son convencionales y dependerán del tipo de aislador que se desee modelar (SKINNER *et al.*, 1996). Para la mayoría de los autores el valor más representativo para estimar la curva de transición es  $n = 1$ , aunque en el programa SAP2000® Nonlinear se utiliza una variante bidireccional del modelo, la cual fue propuesta por PARK *et al.* (1986), y que es equivalente a la fórmula de Wen pero con  $n = 2$  (CSI, 1997).

## 5.2. Resolución de la ecuación diferencial asociada al modelo.

El modelo de Wen representa el comportamiento no lineal por medio de la variable  $z$ , la cual está definida mediante la fórmula diferencial en la Ec. 5.3. Como en este problema la derivada de  $z$  a través del tiempo es una función implícita de la velocidad, es necesario resolver la ecuación mediante un método numérico que discretice la solución; esta alternativa tiene la ventaja adicional que posibilita su incorporación al programa computacional de análisis estructural original PLANT. En esta tesis se estudiaron dos opciones: el método de Euler y el método de Runge - Kutta de quinto orden.

### 5.2.1. Solución por medio del método de Euler.

Este método numérico resuelve ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.5)$$

Para ello, predice un valor de  $y_{i+1}$  por medio de la pendiente (es decir, la primera derivada) en el  $i$ -ésimo valor que se extrapola en forma lineal sobre el intervalo de tamaño  $\Delta x$  (CHAPRA *et al.*, 1988):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x \quad (5.6)$$

Como el modelo de Wen también consiste en una ecuación diferencial análoga a la planteada en la Ec. 5.5, es posible postular una solución de similares características:

$$\frac{dz}{dt} = f(\dot{x}, t) = \frac{1}{\delta_y} \left( A\dot{x} - \beta z |\dot{x}| |z|^{n-1} - \gamma \dot{x} |z|^n \right) \quad (5.7)$$

Si se aplica lo planteado en la Ec. 5.6, se tiene para el paso  $i + 1$  - ésimo:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{\Delta t}{\delta_y} \left( A\dot{x}_i - \beta z_i |\dot{x}_i| |z_i|^{n-1} - \gamma \dot{x}_i |z_i|^n \right) \quad (5.8)$$

Por lo tanto, la solución para  $z_i$  se calcula en función de los valores de la velocidad y de la variable  $z$  que se obtuvieron en el paso anterior. Como el problema dinámico de una estructura sometida a vibraciones siempre parte del reposo, entonces para el primer instante de tiempo (donde  $i = 1$ ) se tienen  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ .

### 5.2.2. Solución por medio del método de Runge - Kutta de quinto orden.

La solución por el método de Euler tiene la ventaja de ser muy sencilla desde el punto de vista numérico y computacional, pues se basa en una aplicación directa de la definición de derivada de  $z$ . Sin embargo, al ser implementada dentro de un programa computacional en lenguaje FORTRAN que simulaba un oscilador con un grado de libertad, se pudo ver que los resultados en su mayoría presentaban un alto porcentaje de error frente a los generados por el programa SAP2000® Nonlinear. Según CHAPRA et al. (1988) ello puede deberse a que esta solución es muy susceptible a errores de truncamiento (es decir, debido al tipo de aproximación utilizada). Entonces fue necesario implementar una nueva solución mediante un algoritmo más refinado, como es el caso del método de Runge - Kutta de quinto orden.

Este es otro método de resolución de ecuaciones diferenciales que tienen la forma planteada en la Ec. 5.5. Todos los métodos de Runge - Kutta tienen un esquema general que se puede resumir en la siguiente expresión (CHAPRA et al., 1988):

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (5.9)$$

La expresión  $\phi$  se conoce como función de incremento, la cual puede interpretarse como una pendiente representativa sobre el intervalo de  $x$ . La constante  $h$  corresponde al mismo  $\Delta x$  definido para el método de Euler. En el caso de Runge - Kutta de quinto orden, la función de incremento toma la siguiente forma (CHAPRA et al., 1988):

$$\phi(x_i, y_i, h) = \frac{1}{90} (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (5.10)$$

Los términos  $k_i$  presentes en la Ec. 5.10 corresponden a relaciones de recurrencia definidas de la siguiente manera (CHAPRA et al., 1988):

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_i, y_i) \\
 k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right) \\
 k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right) \\
 k_4 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right) \\
 k_5 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right) \\
 k_6 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h\right)
 \end{aligned} \tag{5.11a - f}$$

Este método es preferible al de Euler, pues genera resultados de mayor exactitud, debido a que el error de acuerdo a serie de Taylor es de quinto orden (CHAPRA et al., 1988).

Para aplicar esta solución será necesario redefinir el modelo de Wen de la manera propuesta por ORDÓÑEZ (1996) donde la variable independiente es el desplazamiento, teniendo como punto de partida la expresión de la ecuación de Wen en notación diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\delta_y} \left( A \frac{dx}{dt} - \beta z |z|^{n-1} \left| \frac{dx}{dt} \right| - \gamma |z|^n \frac{dx}{dt} \right) \tag{5.6}$$

Expresando la Ec.(5.6) en forma discretizada:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\delta_y} \left( A \frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta z |z|^{n-1} \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| - \gamma |z|^n \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \tag{5.7}$$

Como  $\Delta t$  es una constante positiva para todos los valores del input (en este caso, aceleración basal), se puede omitir el valor absoluto en el término que multiplica a  $\beta$  en el segundo miembro:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\delta_y} \left( A \frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta z |z|^{n-1} \frac{|\Delta x|}{\Delta t} - \gamma |z|^n \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \tag{5.8}$$

Lo anterior hace posible que se pueda simplificar la ecuación por  $\Delta t$  :

$$\Delta z = \frac{1}{\delta_y} \left( A \Delta x - \beta z |z|^{n-1} |\Delta x| - \gamma |z|^n \Delta x \right) \tag{5.9}$$

La Ec. 5.9 concuerda con lo planteado por ORDÓÑEZ (1996) respecto a expresar  $z$  como función del desplazamiento. Además, es posible arreglar la Ec. 5.9 considerando que  $|\Delta x| = \text{sign}(\Delta x)\Delta x$ , donde  $\text{sign}$  es la función signo, la cual toma el valor 1 si su argumento es un número mayor o igual a cero, y valor -1 si su argumento es un número menor que cero:

$$\Delta z = \frac{1}{\delta_y} \left( A\Delta x - \beta z |z|^{n-1} \text{sign}(\Delta x)\Delta x - \gamma |z|^n \Delta x \right) \quad (5.10)$$

Ahora es posible factorizar  $\Delta x$  en el lado derecho:

$$\Delta z = \frac{1}{\delta_y} \left( A - \beta z |z|^{n-1} \text{sign}(\Delta x) - \gamma |z|^n \right) \Delta x \quad (5.11)$$

Entonces, la Ec. 5.11 puede resolverse mediante Runge - Kutta de quinto orden:

$$z_i = z_{i-1} + \frac{1}{\delta_y} \left( A - \beta z_{i-1} |z_{i-1}|^{n-1} \text{sign}(\Delta x) - \gamma |z_{i-1}|^n \right) \Delta x \quad (5.12)$$

La función de incremento  $\phi$  en este caso será:

$$\phi = \frac{1}{\delta_y} \left( A - \beta z |z|^{n-1} \text{sign}(\Delta x) - \gamma |z|^n \right) \quad (5.13)$$

### 5.3. Adaptación de las soluciones del modelo de Wen al programa PLANT.

Para realizar un análisis elastoplástico, el programa PLANT aplica inicialmente la carga a la estructura, asumiendo que ésta se deforma elásticamente. Tales deformaciones son introducidas en un algoritmo que obtiene las reacciones internas correspondientes por medio de integración de las secciones. Este proceso de integración toma en cuenta el comportamiento del material, de manera que si una parte de la sección alcanza un esfuerzo correspondiente al valor de fluencia, entonces la porción de área implicada cesa de incrementar su capacidad de soporte, es decir, plastifica. Para llevar a cabo esta integración, el programa tiene como punto de partida las propiedades geométricas y constitutivas de las secciones del elemento, como fue señalado en el Párrafo 4.1.

Para el caso del aislador sísmico representado por medio del modelo de Wen sucede lo contrario, pues no se conoce la sección, pero sí la ley que rige su comportamiento. Por ello fue necesario trabajar en la parte del programa que equilibra las fuerzas de acción con las de reacción, de manera tal que se incluyeron las reacciones producidas por la variable  $z$  a una barra que funcionara axialmente en forma análoga a un resorte.

Como el programa utiliza como aproximación el resultado elástico, entonces también era necesario buscar una aproximación sencilla a los resultados del modelo de Wen. Para ello se usó la solución por medio del método de Euler como fue planteada en la Ec. 5.8. Con este valor tentativo de  $z$  se calcula la reacción del aislador como primera aproximación para incluirla en la corrección de las fuerzas por medio de la integración. Para la corrección, se utiliza la solución por el método de Runge - Kutta de quinto orden; como ésta es más exacta que la anterior, sirve para mejorarla de la misma manera que la reacción calculada por integración optimiza la obtenida por cálculo elástico. A este resultado se le aplican los algoritmos de convergencia de PLANT para obtener una solución que satisfaga los test de tolerancia, y así continuar con el paso siguiente. El diagrama de flujo que corresponde a esta rutina del programa es el que se presenta en el Anexo 1, con la diferencia de que en las fuerzas de reacción obtenidas matricialmente se deben incluir las correspondientes al modelo de Wen calculado por el método de Euler, y en las fuerzas de reacción obtenidas por integración se deben incluir las del modelo de Wen obtenidas por el método de Runge - Kutta de quinto orden.

## CAPÍTULO VI : PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

Una vez implementadas las subrutinas que representan el modelo de Wen, se calcularán a continuación ejemplos de estructuras típicas con aislación de tipo elastoplástica, sometidas a sollicitaciones de aceleración basal. Paralelamente, las mismas estructuras fueron analizadas con el programa comercial de cálculo estructural SAP2000® Nonlinear. Se incluyen gráficos que comparan los resultados obtenidos con ambos programas.

### 6.1. Aislador solo.

Se calculó el comportamiento de un aislador elástoplástico tipo LRB, representado mediante un oscilador de un grado de libertad compuesto de una barra de comportamiento elástico empotrada en uno de sus extremos; en el otro extremo sólo está permitido el desplazamiento axial. A este elemento se le ha asociado una masa de  $100 \text{ KN}\cdot\text{s}^2/\text{m}$ , una amortiguación viscoelástica de  $100 \text{ KN}\cdot\text{s}/\text{m}$  y las siguientes propiedades para la aplicación del modelo de Wen:

- 1) Rigidez inicial  $k_i$  :  $2000 \text{ KN} / \text{m}$
- 2) Cuociente  $\alpha$  :  $0,1$
- 3) Esfuerzo de fluencia  $f_y$  :  $20 \text{ KN}$
- 4) Factor de escala  $A$  :  $1$
- 5) Parámetro de forma  $\beta$  :  $0,5$
- 6) Parámetro de forma  $\gamma$  :  $0,5$
- 7) Parámetro de transición  $n$  :  $2$

La sollicitación aplicada al aislador consistió en la aceleración basal  $a(t) = 2\text{sen}(3\pi t)$   $\text{m}/\text{s}^2$ , con un paso de tiempo  $\Delta t = 0,01$  seg. La duración de la sollicitación es de 20 segundos (2000 pasos).

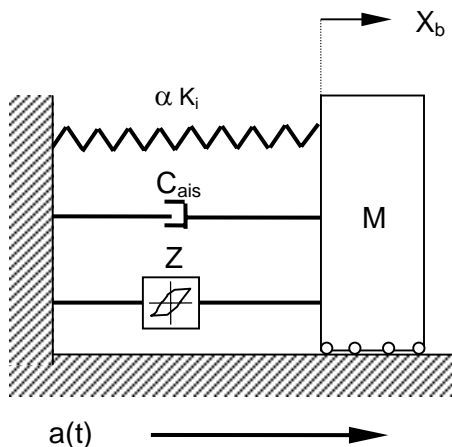


FIGURA 6.1 Aislador LRB.





















































































