



Universidad Austral de Chile  
Facultad de Ciencias de la Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Naval

Correlación entre métodos analíticos  
y numéricos para el cálculo de vigas y  
paneles de estructuras tipo Sandwich

Tesis para optar al grado de  
Licenciado en Ciencias de la  
Ingeniería.

Profesor Patrocinante:  
Sr. Richard Luco Salman.  
Dr. Ingeniero Naval.

Gonzalo Rodrigo López Manriquez  
Valdivia Chile 2002

Esta Tesis ha sido sometida para su aprobación a la comisión de Tesis, como requisito para obtener el Grado de Licenciado en Ciencias de la Ingeniería.

La Tesis aprobada, junto con la nota del examen correspondiente, le permite al alumno obtener el título de Ingeniero Naval, mención Construcción Naval.

**EXAMEN DE TITULO:**

Nota de presentación (ponderada) (1) : .....

Nota de Examen (ponderada) (2) : .....

Nota Final de Titulación (1+2) : .....

**COMISION EXAMINADORA:**

|                               |                |
|-------------------------------|----------------|
| .....<br>Decano               | .....<br>Firma |
| .....<br>Examinador           | .....<br>Firma |
| .....<br>Examinador           | .....<br>Firma |
| .....<br>Examinador           | .....<br>Firma |
| .....<br>Secretario Académico | .....<br>Firma |

**Valdivia, .....**

**NOTA DE PRESENTACION =  $\frac{NC}{NA} \times 0.6 + \text{Nota Tesis} \times 0.2$**

**NOTA FINAL = Nota de Presentación + Nota Examen x 0.2**

**NC: Sumatoria Notas Curriculum, sin Tesis**

**NA: Número de asignaturas cursadas y aprobadas, incluida Práctica Profesional**

## **Agradecimientos**

Dedico este trabajo a mi tata Olegario y a mi abuelita Iliana, quienes durante toda mi vida me han entregado cariño y apoyo de manera constante. A ellos les agradezco todo lo que me han dado y todo lo que soy.

A mi madre, Juana, y mis Hermanos, Gustavo y Nicolás, deseo agradecer toda la ayuda que me han dado, no importando las dificultades.

Al Hogar Luterano, encabezado por Brígida Campos, tengo que agradecer, una parte importante de mi formación como persona, la posibilidad de convertirme en un profesional y el haber conocido a muchas personas que me han demostrado su afecto y por los que siento un profundo aprecio.

Agradezco toda la ayuda que he recibido de parte del profesor, Richard Luco Salman, para finalizar con éxito este trabajo, y también a mis amigos y compañeros, que he tenido la suerte de conocer durante mis años de estudiante.

# ÍNDICE

## RESUMEN

## INTRODUCCIÓN

|                                                                |          |
|----------------------------------------------------------------|----------|
| <b>CAPITULO I: ELEMETOS A CONSIDERAR</b>                       | <b>1</b> |
| 1.1.- DISEÑO DEL SANDWICH                                      | 1        |
| 1.1.1.- Historia                                               | 1        |
| 1.1.2.- Principios generales                                   | 1        |
| 1.1.2.1.- Las pieles                                           | 3        |
| 1.1.2.2.- El núcleo                                            | 3        |
| 1.1.2.3.- Junturas                                             | 4        |
| <b>CAPITULO II: METODOS ANALITICOS</b>                         | <b>5</b> |
| 2.1.- VIGAS Y PUNTALES SANDWICH                                | 5        |
| 2.1.1.- Suposiciones                                           | 5        |
| 2.1.2.- Convención de signos para flexión de vigas             | 5        |
| 2.2.- VIGAS ABIERTAS (LADOS LIBRES)                            | 6        |
| 2.2.1.- Rigidez de flexión                                     | 6        |
| 2.2.2.- Esfuerzos                                              | 7        |
| 2.2.3.- Deflexiones                                            | 11       |
| 2.2.3.1.- Cargas simétricas                                    | 11       |
| 2.2.3.2.- Carga asimétrica                                     | 13       |
| 2.2.4.- Pandeo de puntales sándwich                            | 15       |
| 2.3.- VIGAS CON PIELES EN LOS CUATRO LADOS (VIGAS EN CAJA)     | 18       |
| 2.3.1.- Rigidez de flexión                                     | 18       |
| 2.3.2.- Esfuerzos en vigas con pieles en los cuatro lados      | 19       |
| 2.3.3.- Deflexiones de una viga con pieles en los cuatro lados | 21       |
| 2.3.4.- Pandeo de vigas con pieles en los cuatro lados         | 22       |
| 2.4.- VIGAS CON PROPIEDADES DISTINTAS                          | 22       |
| 2.4.1.- Vigas consideradas estrechas o anchas                  | 22       |

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.4.2.- Vigas con pieles distintas                                                       | 23 |
| 2.4.3.- Vigas en que la contribución del núcleo a la rigidez<br>de flexión no es pequeña | 24 |
| 2.5.- PANELES SÁNDWICH                                                                   | 26 |
| 2.5.1.- Suposiciones                                                                     | 26 |
| 2.5.2.- Convenciones de signos                                                           | 27 |
| 2.6.- FLEXION Y PANDEO DE PANELES SANDWICH                                               | 28 |
| 2.6.1.- Flexión y pandeo de paneles sándwich<br>apoyados en dos lados                    | 28 |
| 2.6.2.- Flexión y pandeo de paneles sándwich<br>apoyados en los cuatro lados             | 28 |
| 2.6.2.1.- Energía de deformación                                                         | 30 |
| 2.6.2.1.1.- Energía de deformación del núcleo, $U_c$                                     | 30 |
| 2.6.2.1.2.- Energía de deformación de las pieles, $U_f$                                  | 30 |
| 2.6.2.2.- Energía potencial de las cargas aplicadas                                      | 31 |
| 2.6.2.3.- Carga de borde, $N_x$                                                          | 37 |
| 2.6.2.4.- Presión uniforme, $g$                                                          | 39 |
| 2.6.3.- Cargas de borde y presión uniforme actuando<br>simultáneamente                   | 44 |
| 2.7.- PANELES CON PROPIEDADES DISTINTAS                                                  | 44 |
| 2.7.1.- Paneles con pieles distintas                                                     | 44 |
| <b>CAPITULO III: METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS</b>                                     | 46 |
| 3.1.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS                                                               | 46 |
| 3.1.1.- Conceptos generales sobre elasticidad                                            | 46 |
| 3.1.1.1.- Hipótesis fundamentales                                                        | 46 |
| 3.1.1.2.- Ecuaciones de la elasticidad                                                   | 46 |
| 3.1.1.2.1.- Ecuaciones de equilibrio                                                     | 46 |
| 3.1.1.2.2.- Ecuaciones de compatibilidad                                                 | 49 |
| 3.1.1.2.3.- Ecuaciones constitutivas o mixtas                                            | 50 |
| 3.1.2.- El método de los elementos finitos                                               | 52 |
| 3.1.2.1.- Planteamiento general del método                                               | 52 |

|                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2.- ELEMENTOS FINITOS PARA COMPUESTOS                                                                    | 64  |
| 3.2.1.- Elementos rectangulares para compuestos delgados                                                   | 65  |
| 3.2.2.- Elemento rectangular para compuestos gruesos                                                       | 67  |
| 3.3.- CONSIDERACIONES EN LA MODELACIÓN DE LAS VIGAS Y PANELES SÁNDWICH                                     | 69  |
| 3.3.1.- Modelación de vigas y paneles sándwich                                                             | 69  |
| 3.3.1.1.- Elementos placa y cascara                                                                        | 70  |
| 3.3.1.2.-Elemento sólido elástico tridimensional o bloque                                                  | 72  |
| 3.3.2.- Aplicando la información del grupo                                                                 | 72  |
| <b>CAPITULO IV : CORRELACION ENTRE AMBOS METODOS</b>                                                       | 74  |
| 4.1.- EJEMPLOS DE VIGAS SÁNDWICH                                                                           | 74  |
| 4.1.1.- Viga con carga concentrada y extremos simplemente apoyados                                         | 74  |
| 4.1.2.- Viga con presión uniforme y extremos empotrados                                                    | 78  |
| 4.1.3.- viga con forma de caja, con carga concentrada y extremos simplemente apoyados                      | 82  |
| 4.1.4.- Viga con carga concentrada, extremos simplemente apoyados y núcleo rígido                          | 86  |
| 4.1.5.- Viga con carga concentrada, extremos simplemente apoyados y pieles de espesores desiguales         | 90  |
| 4.1.6.- Viga con carga concentrada, extremos simplemente apoyados y pieles constituidas por varias láminas | 94  |
| 4.2.- EJEMPLOS DE PANELES SANDWICH                                                                         | 102 |
| 4.2.1.- panel con presión uniforme y bordes simplemente apoyados                                           | 102 |
| 4.2.2.- panel con presión uniforme, bordes simplemente apoyados y pieles con distinto espesor              | 105 |
| 4.2.3.- panel con carga en el borde $N_x$ y bordes simplemente apoyados                                    | 108 |

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2.4.- panel con presión uniforme, bordes simplemente apoyados y dos bordes simplemente apoyados | 111 |
| 4.2.5.- panel con presión uniforme y bordes simplemente apoyados                                  | 114 |
| <b>CONCLUSIONES</b>                                                                               | 118 |
| <b>ANEXO 1</b>                                                                                    | 119 |
| <b>ANEXO 2</b>                                                                                    | 120 |
| <b>BIBLIOGRAFIA</b>                                                                               | 129 |

## **RESUMEN**

Esta tesis busca, principalmente, comparar los resultados de las deflexiones, obtenidos por medio del método de elementos finitos, utilizando el programa Algor 12, y los métodos analíticos, destinados al cálculo de vigas y paneles sándwich.

Aquí, se muestran los elementos principales, los conceptos, suposiciones, involucrados en las vigas y paneles sándwich.

Los resultados obtenidos, muestran bastante similitud, debido a esto la utilización de cualquiera de los métodos es confiable.

## **SUMMARY**

This thesis seeks principally to compare the results of deflections, obtained by means of finite element method, using the program Algor 12, and the analytical method, addressed to calculations of sandwich beam and panels.

Here, the principal elements are shown, concepts, assumptions, involved in the sandwich beam and panels.

The results obtained, shows enough similarity, due to this, use of any of the methods is reliable.



## INTRODUCCION

La demanda en la construcción moderna, tal como bajo costo, mayor rendimiento y una vida más larga, han llevado a la industria a desarrollar materiales estructurales más “avanzados” que satisfacen las necesidades actuales.

Tradicionalmente, materiales estructurales tales como madera, acero y concreto han sido combinados para formar miembros estructurales de mayor rendimiento. Un miembro estructural construido por una combinación de diferentes materiales se considera un miembro de material compuesto. El rendimiento total de un material compuesto es generalmente superior al de cada material constituyente.

Los materiales pueden ser combinados de muchas maneras para fabricar materiales convenientes. El comportamiento estructural de un miembro compuesto no es gobernado solamente por la geometría y tipo de carga, sino también por las propiedades del material.

La estructura de una embarcación, por las condiciones del medio al que se expone, debe cumplir con una adecuada resistencia, además de ser lo suficientemente liviana para no disminuir de manera considerable la capacidad de carga de la embarcación. Por esto, se debe disponer de métodos adecuados para el cálculo de los elementos que constituyen estas estructuras, tales como vigas y paneles, para satisfacer convenientemente las condiciones antes mencionadas.

Actualmente, con el aumento del uso de computador, el método de elementos finitos permite el cálculo de estructuras de manera más rápida. Por otro lado los métodos analíticos también entregan respuestas a estos problemas.

Se presenta en esta tesis una comparación entre los resultados que entrega el método de elementos finitos y los métodos analíticos para el cálculo de deflexiones de vigas y paneles sándwich, además de las condiciones que se deben cumplir tanto para la modelación, como para el cálculo analítico.

## CAPITULO I. ELEMETOS A CONSIDERAR

### 1.1.- DISEÑO DEL SANDWICH

#### 1.1.1.- Historia

El primer uso extenso de los paneles sándwich fue durante la segunda guerra mundial. En la embarcación “Mosquito” el sándwich fue usado, principalmente a raíz de la escasez de otros materiales en Inglaterra durante la guerra. Las caras fueron hechas de chapa y el núcleo de madera de balsa.

Durante la segunda guerra mundial aparecieron los primeros escritos teóricos acerca del sándwich. En los 50 el desarrollo se concentró principalmente en materiales panales. Los panales se usaron principalmente como materiales para núcleo en la industria aeronáutica.

#### 1.1.2 Principios generales

El sándwich está constituido de tres elementos, ver fig. 1.1.

- Dos pieles
- Núcleo
- Junturas

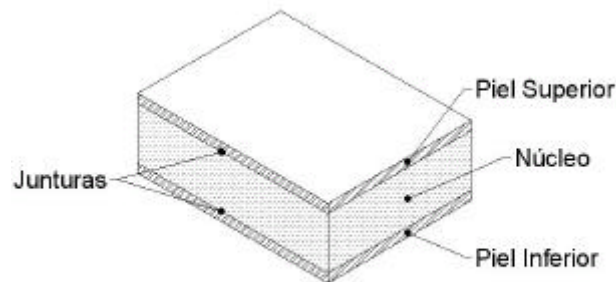


Fig. 1.1 Sándwich

Cada parte tiene su función específica para hacer el trabajo como una unidad. El objetivo es usar el material con un máximo de eficiencia. Las dos caras son ubicadas a una distancia la una de la otra para aumentar el momento de inercia, y de ese modo la rigidez de flexión, respecto del eje neutro de la estructura. Una comparación puede ser hecha con una viga sólida. Una viga sándwich del mismo ancho y peso que una viga sólida tiene una rigidez extraordinariamente mayor a raíz de su

mayor momento de inercia. La fig. 1.2 demuestra, con un ejemplo simple, la diferencia en la rigidez de flexión para una viga sólida comparada con una viga sándwich.

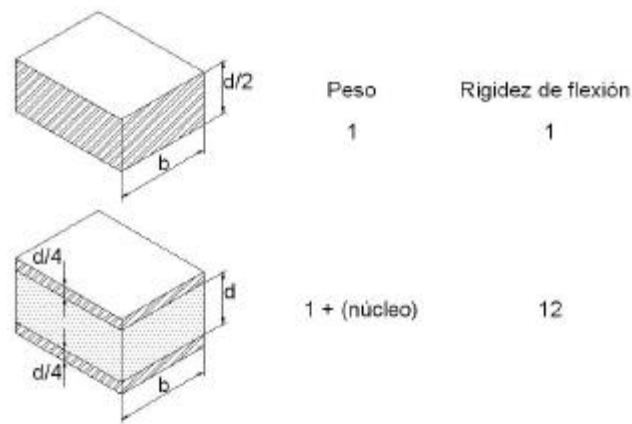


Fig. 1.2 Comparación de rigidez en flexión entre una viga sólida y una viga sándwich.

Una diferencia importante en la comparación de una viga I con una viga sándwich es la posibilidad de cada una de soportar cargas transversales. Para una viga I el alma es bastante rígida para dar validez a la suposición de Navier, ( es decir, los planos de las secciones transversales permanecen planas. En una viga sándwich el material del núcleo no es usualmente rígido en corte y la suposición no es satisfecha. En flexión la deflexión en corte del núcleo no es insignificante en la mayoría de los casos. También hay deflexión en corte en las caras pero esta puede ser ignorada.

El efecto de la rigidez de corte en el núcleo se muestra en la fig. 1.3. El caso superior muestra una viga sándwich ideal que es relativamente rígida en corte. Es evidente como las caras cooperan para resistir el deslizamiento de una sobre la otra.

La caso inferior muestra, como comparación, una viga sándwich que no es muy rígida en corte. Aquí las caras no cooperan y trabajan como placas en flexión, independiente la una de la otra. La rigidez de flexión local para las caras puede ser ignorada en la mayoría de los casos. Por lo tanto, el resultado de un núcleo que es frágil en corte es una pérdida del efecto sándwich.

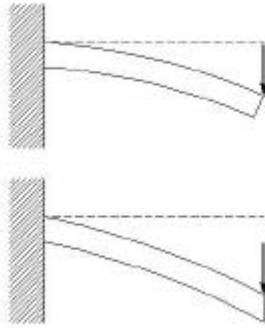


Fig. 1.3 Comparación entre núcleos que son rígidos o frágiles en corte

Cada una de las partes de un sándwich tiene su función particular y será descrita.

#### 1.1.2.1.- Las pieles

Las pieles transmiten los esfuerzos de tracción y de compresión en el sándwich. La rigidez de flexión local es tan pequeña que puede a menudo ser ignorada. Materiales convencionales tales como el acero, acero inoxidable y aluminio son con frecuencia utilizados para materiales de cara. En muchos casos también es adecuado elegir plástico reforzado con fibra de vidrio como materiales de cara. Estos materiales son muy fáciles de aplicar. Los plásticos reforzados pueden dar propiedades que son exigidas en diferentes casos.

Las caras también transmiten presión local. Cuando la presión local es alta, las pieles serán dimensionadas para el esfuerzo de corte relacionado ella.

#### 1.1.2.2.- El núcleo

El núcleo tiene varias funciones importantes. Tiene que ser bastante rígido para mantener constante la distancia entre las caras. También deben ser tan rígidas en corte que las caras no se deslicen una sobre la otra. Si el núcleo es frágil en corte las caras no contribuyen y el sándwich perderá su rigidez. (Ver fig. 1.3).

Esta presentación demuestra que la estructura sándwich es como un todo que da los efectos positivos. Sin embargo, será mencionado que el núcleo tiene que cumplir muy complejas exigencias. La resistencia en diferentes direcciones y la baja densidad no son las únicas propiedades que el núcleo ha de tener. A menudo hay

exigencias especiales para flexión, aislamiento, absorción de humedad, resistencia al envejecimiento, etc.

#### **1.1.2.3.- Junturas**

Para mantener las caras y el núcleo coaccionando las unas con la otra las junturas entre las caras y el núcleo, debe ser capaz de transferir las fuerzas de corte entre las caras y el núcleo. Las junturas deben ser capaces de transmitir los esfuerzos de corte y tracción. Es difícil de especificar las exigencias en las junturas. Una regla simple es que las junturas serán capaces de tomar el mismo esfuerzo de corte que el núcleo.

Cada parte tiene su propiedad específica, y juntas actúan como una unidad. Es importante no romper la cooperación entre las partes. Por ejemplo si se hacen refuerzos ( perfiles, planchas, marcos, etc.) ellos serán hechos de un material con la misma o menor resistencia que el material del núcleo. Si no, la mayoría de los esfuerzos se tomarán en el material de refuerzo, que no es dimensionado para ello. Las fracturas en las uniones a menudo dependen de este hecho, es decir que una combinación de estructuras sándwich y armazón han sido elegida y dimensionadas incorrectamente.

## CAPITULO II. METODOS ANALITICOS

### 2.1. VIGAS Y PUNTALES SANDWICH

#### 2.1.1. Suposiciones

En este capítulo se asumió que las pieles son delgadas y del mismo espesor. Las tensiones de corte y flexión en las pieles son pequeñas, y pueden ser ignoradas. El esfuerzo de corte se asume como constante en todo el espesor del núcleo en cualquier sección dada. Para una viga con pieles en los lados, las tensiones de corte y flexión en las pieles laterales no pueden ser ignoradas.

En este capítulo las vigas se consideran angostas. Las condiciones e instrucciones, para que una viga se considere angosta o ancha se encuentran en 2.4.1.

#### 2.1.2. Convención de signos para flexión de vigas

Las convenciones de signos que se adoptaron para deflexión, pendiente, curvatura, momento flector y fuerza de corte son ilustradas en la fig. 2.1.

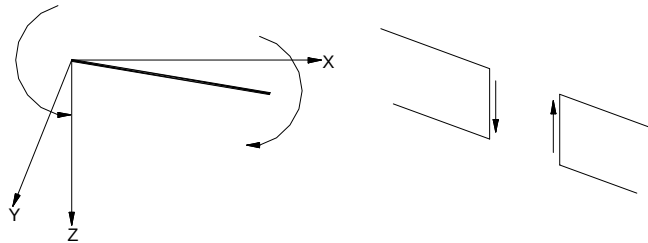


Fig. 2.1. Convenciones de signos. Izquierda, positiva deflexión, pendiente y curvatura; negativo momento flector. Derecha, positivo fuerza de corte, esfuerzo de corte y tensión de corte.

Las cargas y deflexiones ( $w$ ) se miden positivos hacia abajo, en la dirección del eje  $z$ . Como resultado de la elección de la convención de signo es necesario introducir signos negativos en algunas de las relaciones entre carga distribuida ( $q$ ), fuerza de corte ( $Q$ ), momento flector ( $M$ ), pendiente ( $dw/dx$ ) y deflección  $w$ .

Para referencia, el grupo completo de relaciones, con los signos correctos, es dado:

|           |               |       |
|-----------|---------------|-------|
| Deflexión | $w$           |       |
| Pendiente | $+dw/dx = w'$ |       |
| Curvatura | $+w''$        |       |
| - M       | $+Dw''$       | (2.1) |
| -Q        | $+Dw'''$      |       |
| -q        | $+Dw^{(4)}$   |       |

## 2.2. VIGAS ABIERTAS (LADOS LIBRES)

### 2.2.1. Rigidez de flexión

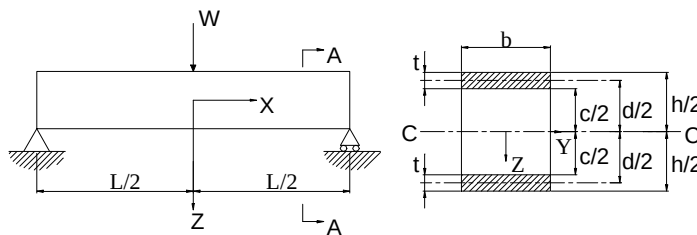
La teoría de esfuerzos en vigas es fácilmente adaptada a las vigas sándwich, con algunas modificaciones. Los efectos causados por las deflexiones de corte en el núcleo debe ser agregadas y ciertos términos pueden ser despreciados, cuando se calcula la rigidez de flexión.

Para usar la teoría común de vigas primero encontraremos una manera simple para calcular la rigidez de flexión de esta, denotada aquí por  $D$ . En una viga corriente,  $D$  será el producto del módulo de elasticidad, ( $E$ ) y el segundo momento de área ( $I$ ). En una viga sándwich  $D$  es la suma de cada rigidez de flexión de las diferentes partes, medidas respecto del eje centroidal de toda la sección :

$$D = E_f \frac{b t^3}{6} + E_f \frac{b t d^2}{2} + E_c \frac{b c^3}{12} \quad (2.2)$$

$E_f$  y  $E_c$  son el módulo de elasticidad de las pieles (índice f) y el núcleo (índice c) respectivamente. Dimensiones de acuerdo a fig.2.1.

Fig. 2.2. Dimensiones de viga sándwich. Sección A-A a la derecha.



El primer término en la ecuación (2.2) es la rigidez de flexión local de las pieles respecto de sus propios ejes centroidales. El segundo término es el primer término para flexión transportado al rededor del eje centroidal de toda la sección

transversal. El tercer término es la rigidez de flexión del núcleo respecto de su propio eje centroidal, que es el mismo de la sección transversal completa.

El primer término viene a ser menos del 1% del segundo cuando:

$$\frac{d}{t} > 5.77 \quad (2.3)$$

Para una razón de  $d/t > 11.55$  la proporción es menor del 0,25% y puesto que hemos asumido que las caras son delgadas el primer término puede ser ignorado por el momento.

El tercer término viene a ser menos del 1% del segundo, (y puede por consiguiente ser ignorado) cuando:

$$\frac{E_f}{E_c} \frac{t d^2}{c^3} > 16.7 \quad (2.4)$$

Con la condición (2.3) la expresión para la rigidez de flexión es:

$$D = E_f \frac{b t d^2}{2} + E_c \frac{b c^3}{12} \quad (2.5)$$

Si la condición (2.4) es satisfecha, esta expresión se reducirá a:

$$D = E_f \frac{b t d^2}{2} \quad (2.6)$$

### 2.2.2. Esfuerzos

Los esfuerzos en una viga sándwich también pueden ser determinados por el uso de la teoría de esfuerzos en vigas, con algunas pocas modificaciones. Debido a las suposiciones( las secciones permanecen planas y perpendiculares al eje centroidal) la tensión en un punto a una distancia  $z$  por debajo del eje centroidal  $cc$  es  $Mz/D$ .

Para obtener el esfuerzo de flexión en cualquier punto la tensión debe ser multiplicada por un módulo de elasticidad apropiado. Por ejemplo, los esfuerzos en las pieles y el núcleo son respectivamente:

$$\sigma_f = \frac{Mz}{D} E_f \left( \frac{c}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} ; -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{c}{2} \right) \quad (2.7a)$$



$$\sigma_c = \frac{Mz}{D} E_c \left( -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2} \right) \quad (2.7b)$$

Los esfuerzos máximos son obtenidos con el máximo valor de  $z$  dentro del intervalo. La relación del máximo esfuerzo en las pieles y el máximo esfuerzo en el núcleo es  $(E_f / E_c) (h/c)$ .

Las suposiciones de la teoría de flexión principal para la expresión común del esfuerzo de corte ( $\tau$ ) en una viga homogénea a la distancia  $z$ , por debajo del centroide de la sección transversal.

$$\tau = \frac{QS}{Ib} \quad (2.8)$$

Aquí  $Q$  es la fuerza de corte en la sección, bajo consideración,  $I$  es segundo momento de área de toda la sección respecto del centroide,  $b$  es el ancho en el nivel  $z_1$  y  $S$  es el primer momento de área de la parte de la sección para la cual  $z > z_1$ . La distribución familiar para tal esfuerzo de corte en una viga  $I$  es ilustrado en la fig. 2.3.

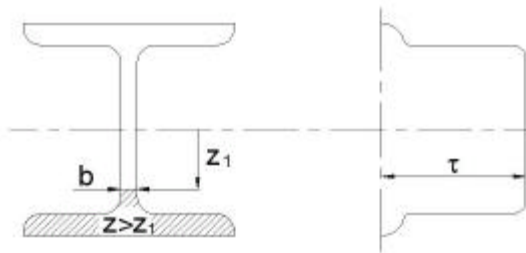


Fig. 2.3. Distribución del esfuerzo de corte en un viga I.

Para una viga sándwich, la ecuación (2.8) debe ser modificada para tomar en consideración el módulo de elasticidad de los diferentes elementos de la sección transversal:

$$\tau = \frac{Q}{Db} \Sigma (SE) \quad (2.9)$$

En esta expresión  $D$  es la rigidez de flexión de toda la sección y  $\Sigma(ES)$  representa la suma de los productos de  $S$  y  $E$  de todas las partes de la sección para las cuales  $z < z_1$ . Por ejemplo, si la ecuación (2.9) se usa para determinar el esfuerzo de corte a un nivel  $z$  en el núcleo del sándwich en la fig.2.1.

$$\Sigma (SE) = E_f \frac{b t d}{2} + \frac{E_c b}{2} \left( \frac{c}{2} - z \right) \left( \frac{c}{2} + z \right)$$

El esfuerzo de corte en el núcleo es por lo tanto

$$\tau = \frac{Q}{D} \left[ E_f \frac{t d}{2} + \frac{E_c}{2} \left( \frac{c^2}{4} - z^2 \right) \right] \quad (2.10)$$

Una expresión análoga puede ser obtenida del esfuerzo de corte en las pieles, y la distribución del esfuerzo de corte completo a través del espesor del sándwich se ilustra en la fig. 2.4 a.

El esfuerzo de corte máximo en el núcleo, se obtiene por la introducción de  $z = 0$  en (2.10).

$$\tau = \frac{Q}{D} \left( E_f \frac{t d}{2} + \frac{E_c}{2} \frac{c^2}{4} \right) \quad (2.11)$$

La relación entre el máximo (en  $z = 0$ ) y el mínimo (en  $z = \pm c/2$ ) esfuerzo de corte en el núcleo es:

$$\left( 1 + \frac{E_c}{E_f} \frac{1}{4} \frac{c^2}{t d} \right)$$

El segundo término viene a ser menos del 1% de la expresión dada.

$$4 \frac{E_f}{E_c} \frac{t}{c} \frac{d}{c} > 100 \quad (2.12)$$

Si la condición (2.12) es satisfecha, el esfuerzo de corte se puede asumir constante sobre el espesor del núcleo.

Porque  $d \sim c$ , las condiciones (2.4) y (2.12) son similares en efecto.

Por lo tanto, se puede concluir que, cuando un núcleo es demasiado frágil para proporcionar una contribución significativa a la rigidez de flexión del sándwich, el esfuerzo de corte se puede asumir constante, sobre el espesor del núcleo. Para un núcleo frágil, es por consiguiente permisible escribir  $E_c = 0$  en las ecuaciones (2.2) y (2.8); el esfuerzo de corte constante en el núcleo esta dado entonces por:

$$\tau = \frac{Q}{D} \frac{E_f t d}{2} \quad (2.13)$$

La forma como el esfuerzo de corte se distribuye a través de la sección se ilustra en la fig. 2.4.b.

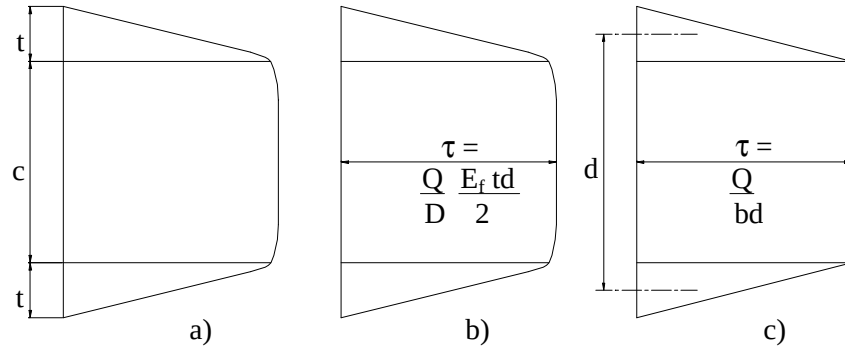


Fig. 2.4. Distribución de esfuerzo de corte de una viga sándwich. (a) Verdadera distribución de esfuerzo de corte. (b) Efecto de núcleo frágil (condiciones (2.4) y (2.12) satisfechas). (c) Efecto de núcleo frágil, ignorando la rigidez de flexión local de las pieles (condiciones (2.3), (2.4) y (2.12) satisfechas)

Si, además, la rigidez de flexión de las pieles respecto de cada uno de sus ejes es pequeña (es decir si la condición (2.3) es satisfecha), entonces el primer término del lado derecho de la ecuación (2.2) puede ser ignorado además del tercero, dejando:

$$D = E_f \frac{b t d^2}{2} \quad (2.14)$$

En este caso la ecuación (2.10), para el esfuerzo de corte en el núcleo se reduce a la forma más simple posible.

$$\tau = \frac{Q}{bd} \quad (2.15)$$

La distribución de esfuerzo de corte correspondiente se ilustra en la fig. 2.4c. La diferencia entre la fig. 2.4b y 2.4c es que en la segunda el esfuerzo principal en cada piel se asume uniforme (porque se ignora el esfuerzo de flexión local). De esto se comprende que el esfuerzo de corte en las pieles varía con la profundidad de una manera lineal, no como una parábola.

A menudo es conveniente invocar el concepto de un núcleo "antiplano" ( $s_x = s_y = \tau_{xy} = 0$ ). Un núcleo antiplano es un núcleo idealizado, en que el módulo de elasticidad en planos paralelos con las pieles es cero, pero el módulo de corte en planos perpendiculares a las pieles es finito. Para esta definición  $E_c = 0$  y el núcleo antiplano no hace una contribución a la rigidez de flexión de la viga. Las condiciones

(2.4) y (2.9) son automáticamente satisfechas y la distribución de corte es similar a aquella mostrada en la fig. 2.4b.

## 2.2.3. Deflexiones

### 2.2.3.1. Cargas simétricas

Las cargas consideradas aquí son simétricas, es decir, la carga es simétrica con respecto a la geometría de la viga y/o un desplazamiento horizontal relativo de las pieles se evita en alguna parte (por ejemplo en un extremo fijado).

En este caso la rigidez de flexión del sándwich y el esfuerzo de corte en el núcleo, son definidos por las ecuaciones (2.14) y (2.15). La distribución del esfuerzo de corte aparece en la fig. 2.4c.

En este primer ejemplo el desplazamiento transversal ( $w_1$ ) de la viga, puede ser calculado por la teoría de flexión, usando la relación (2.1). Por ejemplo, la fig. 2.5b muestra la deformación de flexión de una viga simplemente apoyada con una carga puntual central  $W$ . Los puntos a, b, c, ... se hallan en la línea central de las pieles y la sección transversal aa, bb, cc, ... giran, pero sin embargo permanecen perpendicular al eje longitudinal de la viga deflectada. Es obvio que la piel superior está comprimida en los puntos a, b, c, ..., mientras la piel inferior está cargada a tensión.

El esfuerzo de corte en el núcleo en cualquier sección es  $\tau = Q/bd$  (ecuación (2.15)). Esto está asociado con la tensión de corte  $\gamma = Q/Gbd$ , lo cual semejante a  $\tau$ , es constante a través del espesor del núcleo;  $G$  es el módulo de corte del material del núcleo. Estas tensiones de corte llevan a nuevos tipos de deformaciones ilustradas en la fig. 2.5c.

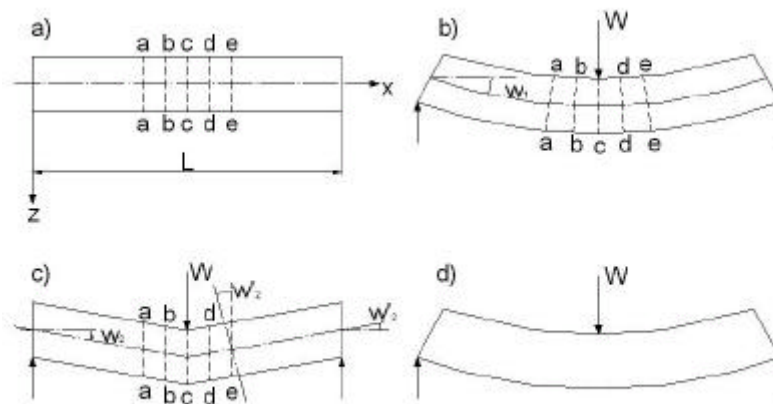
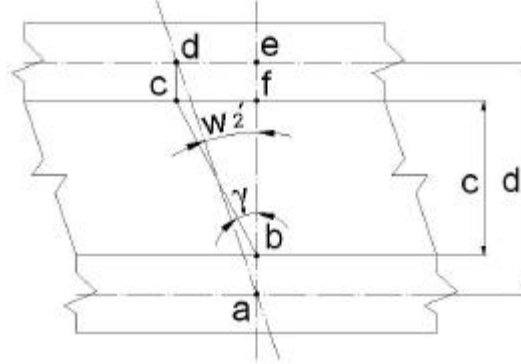


Fig. 2.5. Deflexión de una viga sándwich.

En la línea central de las pieles se hallan los puntos a, b, c, ... . Ellos no se han movido horizontalmente, al contrario de la dirección vertical  $w_2$ , debido a la

deformación de corte. Las pieles y la línea central de la viga se inclinan, y la relación entre la pendiente de la viga,  $dw_2/dx$ , y la deformación de corte del núcleo  $\gamma$  puede ser obtenida de la fig. 2.6. En esta figura, que muestra una deformación de una corta



longitud del sándwich, la distancia  $d$  e es igual a  $d(dw_2/dx)$ . Es también igual a  $c f$ , que a su vez es igual a  $\gamma c$ .

Fig. 2.6. Deformación de corte de una viga.

Por lo tanto,

$$\frac{dw_2}{dx} = \gamma \frac{c}{d} = \frac{Q}{Gbd} \frac{c}{d} = \frac{Q}{AG} \frac{c}{d} \quad (2.16a)$$

Puesto que las pieles se asumen como delgadas,  $c$  es más o menos lo mismo que  $d$ , lo cual implica que  $w_2' = \gamma$  y

$$w_2' = \frac{Q}{AG} = \frac{Q}{V} \quad (2.16b)$$

El producto  $V$  a menudo se aplica a la rigidez de corte del sándwich. (El producto también contiene un factor llamado  $\beta$ , pero a raíz de su forma rectangular, en este caso es 1). El desplazamiento  $w_2$ , asociado con la deformación de corte en el núcleo, se puede obtener por integración de la ecuación (2.16 a) en cualquier problema particular.

Por ejemplo, en la viga simplemente apoyada con una carga puntual central  $W$ , la fuerza transversal  $Q$  en el lado derecho de la viga es  $+W/2$ . La integración de la ecuación (2.16 a) con  $Q = +W/2$  provee el desplazamiento:

$$w_2 = \frac{W}{2V} x + \text{cte} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

La constante desaparece porque  $w_2 = 0$  en  $x = 0$ . El valor máximo de  $w_2$  ocurre en el centro de la viga,  $x = L/2$ , y es igual a:

$$\Delta_2 = \frac{W L}{4V}$$

La deflexión central total  $\Delta$  es por lo tanto el desplazamiento de flexión total  $\Delta_1$  con un desplazamiento  $\Delta_2$  superpuesto:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{W L^3}{48D} + \frac{W L}{4V}$$

En general el desplazamiento de una viga sándwich, cargada simétricamente con un núcleo antiplano y pieles delgadas puede encontrarse por la similar superposición por las deflexiones de corte y flexión  $w_1$  y  $w_2$ . Las deflexiones por flexión se encuentran de la manera usual y las deflexiones de corte, por la integración de la ecuación (2.16 a).

Puede ser conveniente integrar la ecuación (2.16 b) en términos generales con el siguiente resultado:

$$w_2 = \frac{M}{V} + \text{cte} \quad (2.17)$$

Para una viga simplemente apoyada con el origen en un apoyo la constante es siempre cero. Consecuentemente el diagrama de desplazamiento de corte es el mismo que el diagrama de momento flector, con un factor  $1/V$  aplicado a el.

Por ejemplo, una viga simplemente apoyada de envergadura  $L$  con una carga distribuida uniformemente  $q$  tiene una deflexión central de flexión  $\Delta_1$  igual a  $+5qL^4/384D$ . El momento flector en el centro es  $+qL^2/8$  y la deflexión central de corte  $\Delta_2$  es por lo tanto  $+qL^2/8V$ . La deflexión local  $\Delta$  en el centro está dada por:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{5q L^4}{384D} + \frac{q L^2}{8V} \quad (2.18)$$

De la misma forma las expresiones para las deflexiones totales son obtenidas para otros casos.

### 2.2.3.2.- Carga asimétrica

En la sección previa se asumió que durante la deformación de corte todos los puntos en la línea central de las pieles se mueven solamente en la dirección vertical,

como en la fig. 2.5c. En general, es posible para una piel moverse horizontalmente como un todo con respecto a la otra.

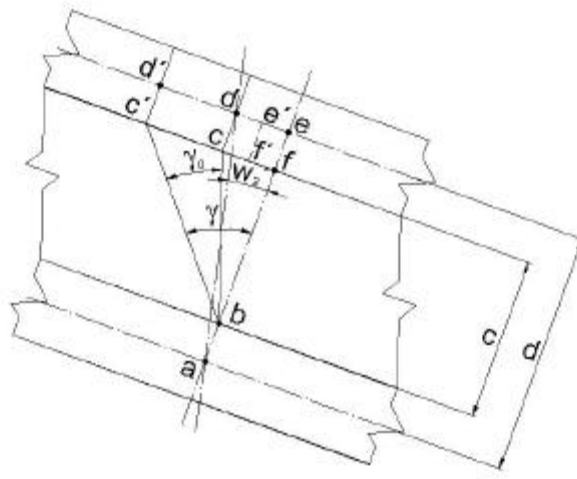


Fig. 2.7. Efecto de  $\gamma_0$  en deformación de corte.

El efecto es ilustrado en la fig. 2.7, que es similar a la fig. 2.6 en que se muestra el eje de la viga en un ángulo  $w_2'$  con la horizontal como resultado de la deformación de corte pura del núcleo. Sin embargo la piel superior ha sido también desplazada a la izquierda, para que los puntos cdef en la fig. 2.6 y 2.7 aparecen ahora en nuevas posiciones en  $c', d', e', f'$ . El ángulo  $cbc'$  es denotado por  $\gamma_0$  y existen las siguientes relaciones:

$$cf = c'f - c'c = (\gamma - \gamma_0) c = de = w_2' d$$

Por lo tanto

$$w_2' = (\gamma - \gamma_0) \frac{c}{d} \quad (2.19a)$$

$$\text{o } w_2' = \frac{Q}{AG} - \gamma_0 \frac{c}{d} \quad (2.19b)$$

$$\text{o } w_2 = \frac{M}{AG} - \gamma_0 \times \frac{c}{d} + \text{cte} \quad (2.19c)$$

Las ecuaciones (2.16 a) y (2.17) son simplemente casos especiales de (2.19 b) y (2.19 c).

Considerar, por ejemplo, una viga simplemente apoyada con un momento  $M_0$  aplicado en un extremo (fig. 2.8). El momento flector en  $x$  es  $-M_0 x/L$ , cuyo valor se puede introducir en la ecuación (2.19 c):

$$w_2 = -\frac{M_0 x}{AGL} - \gamma_0 x \frac{c}{d} + \text{cte}$$

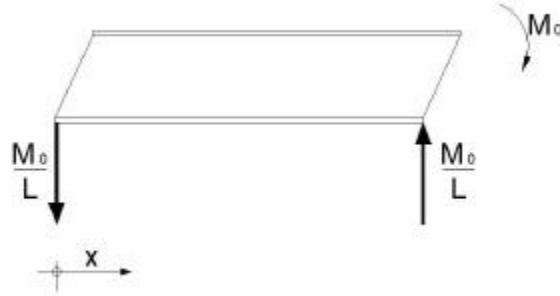


Fig. 2.8.

La condición de borde  $w_2 = 0$  en  $x = 0, L$  muestra que la constante desaparece y  $\gamma_0$  es igual a  $-M_0 d/AGLc$ . La sustitución por  $\gamma_0$  en la ecuación (2.19 c) muestra que el desplazamiento de corte transversal  $w_2$  es cero en todas partes. Sin embargo, todas las secciones a través del núcleo han girado de un lado a otro un ángulo  $\gamma_0$  como en la fig. 2.8. La tensión de corte  $\gamma$  en todos los puntos del núcleo está dada por la ecuación (2.19 a) como

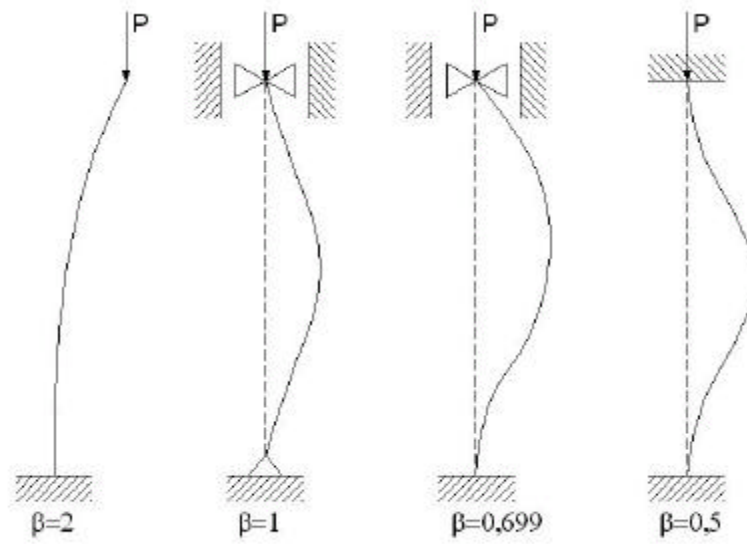
$$\gamma = \frac{d}{c} w_2' + \gamma_0 = \gamma_0 = -\frac{M_0}{AGL} \frac{d}{c}$$

La rotación  $\gamma_0$  es siempre cero cuando la viga está cargada de una manera simétrica, o cuando el desplazamiento horizontal relativo de las pieles es evitado, por ejemplo con un extremo fijo.

#### 2.2.4. Pandeo de puntales sándwich

Los análisis corrientes de vigas y puntales uniformes, han mostrado que aparece inestabilidad cuando la carga axial  $P$  alcanza el valor de la carga de Euler  $P_E$ . La carga de Euler está aquí presentada en cuatro casos diferentes, los casos elementales de Euler.





$$P_E = \frac{\pi^2 D}{(\beta L)^2}$$

Fig. 2.9. La carga de Euler para diferentes casos.

La carga de Euler representa el valor más pequeño para una carga axial  $P$ , a la cual el puntal no regresará a la condición recta después de ser desplazado en dirección lateral.

En el caso de un puntal sándwich, la ocurrencia de deformaciones de corte reducen la rigidez del puntal y la carga de pandeo será más pequeña que la correspondiente carga de Euler.

Será considerado aquí un puntal sándwich de extremos articulados. La rigidez de flexión esta dada por la ecuación (2.5). Cuando el empuje axial  $P$  alcanza el valor crítico  $P_{cr}$ , el desplazamiento consiste de dos desplazamientos superpuestos:  $w_1$  (desplazamiento de flexión) y  $w_2$  (desplazamiento asociado con la deformación de corte del núcleo). El puntal doblado se muestra en la fig. 2.10. En una sección  $x$  el momento flector  $M$  es, remitido a la ecuación (2.1):

$$M = P(w_1 + w_2) = -D_1 w_1'' \quad (2.20)$$

Fig. 2.10. Puntal doblado con extremos articulados.

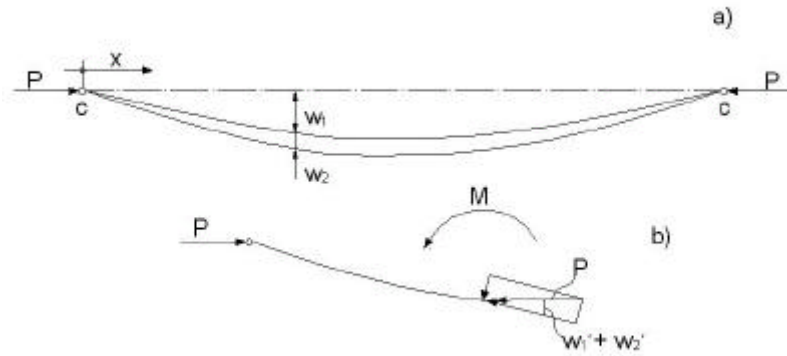


Fig. 2.10. Puntal doblado con extremos articulados.

La fig. 2.10 muestra que  $P$  tiene una componente  $P(w_1' + w_2')$  actuando perpendicular al eje del puntal. Esto representa la fuerza transversal. Correspondiente a la ecuación (2.16 a) la fuerza de corte se refiere a  $w_2$  por:

$$w_2 = \frac{P (w_1' + w_2')}{V} \quad (2.21)$$

El término  $w_2'$  puede ser eliminado de las ecuaciones (2.20) (diferenciado otra vez) y (2.21) para entregar una ecuación diferencial para  $w_1$ .

$$w_2''' + \alpha^2 w_1' = 0 \quad (2.22 \text{ a})$$

Donde

$$\alpha^2 = \frac{P}{D_1 [1 - (P / V)]} \quad (2.22 \text{ b})$$

(2.22 a) tiene una solución de la forma:

$$w_1 = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \quad (2.23)$$

Para diferenciación (2.23) e introducción en el término del lado derecho de (2.21), la deflexión total  $w_1 + w_2$  se obtendrá de:

$$\begin{aligned}
 w_1 + w_2 &= -\frac{D_1}{P} [-C_1 \alpha^2 \sin \alpha x - C_2 \alpha^2 \cos \alpha x] \\
 &= + \frac{C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x}{1 + (P / V)} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Las condiciones de borde proporciona que  $C_2 = 0$  y si  $(w_1 + w_2) = 0$  para  $x = 0$  y  $x = L$ . Esto da:

$$\alpha L = n (\pi) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

La ecuación (2.22 b) ahora da:

$$P = \frac{P_E}{1 + P_E / V} \quad \text{Donde: } P_E = \frac{\pi^2 D_1}{L^2} \quad (2.26)$$

Donde  $P$  representa la carga crítica  $P_{cr}$  del puntal sándwich. La expresión está a menudo dada en esta igual forma:

$$\frac{1}{P_{cr}} = \frac{1}{P_E} + \frac{1}{V} \quad (2.27)$$

En que es fácil ver ( $V = AG$ ):

- Cuando  $G$  es finito,  $P_{cr}$  es menor que la carga de Euler
- Cuando  $G$  es infinito,  $P_{cr}$  es igual a la carga de Euler
- Cuando  $G$  es pequeño,  $P_{cr}$  se aproxima al valor de  $AG$ .

Estas fórmulas se pueden usar para todas los casos en la fig. (2.9) con la apropiada carga de Euler introducida.

## 2.3. VIGAS CON PIELES EN LOS CUATRO LADOS (VIGAS EN CAJA)

### 2.3.1. Rigidez de flexión

Para conseguir una viga sándwich realmente resistente, se puede elegir una sección en caja. Con pieles en los cuatro lados, la rigidez de corte será mayor, y la deflexión de corte será menor, aunque sin ser insignificante.

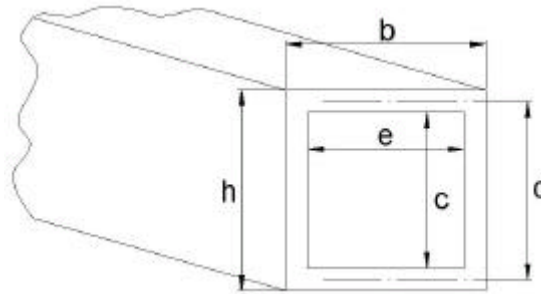


Fig. 2.11. Viga con forma de caja

La expresión para la rigidez de flexión en este caso es:

$$D = E_f \frac{(bh^3 - ec^3)}{12} + E_c \frac{ec^3}{12} \quad (2.28)$$

Esta es la rigidez de flexión, para flexión respecto del eje centroidal de la sección transversal. Los términos, son la rigidez de flexión de la caja y el núcleo respectivamente. Si el segundo término viene a ser menor del 1% del primero puede ser ignorado. Esto quiere decir si:

$$\frac{E_f}{E_c} \left( \frac{bh^3}{ec^3} - 1 \right) > 100 \quad (2.29)$$

El segundo término no es de importancia. Prácticamente esto es el caso usual.

### 2.3.2.- Esfuerzos en vigas con pieles en los cuatro lados

Los esfuerzos en este caso, serán calculados de la misma forma que antes. No obstante, primero la distribución de momento flector entre pieles y núcleo se encontrará fuera. Para evaluar una expresión, para la distribución del momento flector, una corta sección de viga puede ser estudiada.

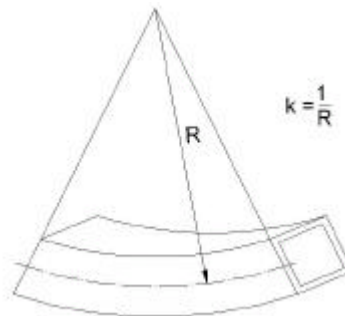


Fig. 2.12.

La curvatura es la misma para el núcleo y la piel a lo largo de toda la viga. Debido a la teoría de esfuerzo en vigas, la curvatura ( $k$ ) está dada por la expresión:

$$k = \frac{M}{D} \quad (2.30)$$

Por lo tanto

$$M_f = k E_f I_f$$

$$M_c = k E_c I_c$$

Es fácil ver que  $M_c$ , viene a ser menos del 1% de  $M_f$  cuando la condición (2.29) es satisfecha. En casos prácticos la relación será aún más pequeña, el hecho es que conduce a la suposición que el momento flector se toma solamente en el material de la piel. El esfuerzo normal en el núcleo es entonces aproximadamente cero y en las pieles los esfuerzos se calculan por:

$$\sigma_f = \frac{M z}{D} \cdot E_f \quad (2.31)$$

Los valores máximos para  $\sigma_f$ , en la parte superior e inferior, se obtienen con los máximos valores de  $z$ .

Los esfuerzos de corte dependen de las fuerzas transversales. Ellos son, de la misma forma como el momento flector, se toma tanto en el núcleo como en las pieles. Un estudio de una sección de viga con forma de caja delgada, muestra que la capacidad del núcleo para aceptar fuerzas de corte puede ser ignorada.

La deformación de corte  $\gamma$  es la misma para la piel y el núcleo, y está dada por:

$$\gamma_i = \frac{Q_i}{V_i} \quad (2.32)$$

Donde  $V$  contiene un factor de forma  $\beta$  (ver 2.35), relacionado para cada parte de la viga. Para el núcleo,  $\beta$  se asume como 1, y para las pieles está dado por:

$$\beta = \frac{A_f}{A_{web}} \quad (2.33)$$

Donde  $A_{web}$  es el área de la sección transversal de los lados. Esto da

$$Q_f = V_f \gamma$$

$$Q_c = V_c \gamma$$

Donde la fuerza de corte total es:

$$Q = Q_f + Q_c$$

Que implica que  $Q_c$  viene a ser menos del 1% de  $Q_f$  si

$$\frac{V_c}{V_f} < \frac{1}{100} \quad (2.34)$$

La condición debe ser satisfecha en la mayoría de los casos, y así  $Q_c$  puede ser ignorado. Por consiguiente tenemos expresiones para los diferentes esfuerzos de corte en las pieles. (ver fig. 2.13)

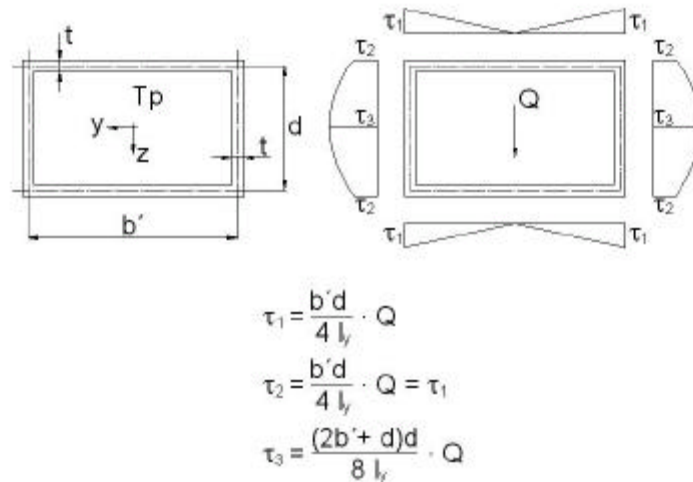


Fig. 2.13. Distribución de esfuerzo de corte en una "caja".

### 2.3.3.- Deflexiones de una viga con pieles en los cuatro lados

También en este tipo de viga las deflexiones consisten de dos partes, deflexión por flexión y deflexión de corte. En algunos casos la deflexión de corte puede ser despreciada, pero el siguiente ejemplo muestra que este no es siempre el caso.

Ejemplo:

Una viga simplemente apoyada con pieles en los cuatro lados es cargada por una carga concentrada en el punto medio de la viga. El material de las pieles es plástico reforzado con fibra y el núcleo es de Divinycell H 60. La deflexión está dada por la expresión (2.18). el primer término es la deflexión por flexión. la rigidez de flexión es dada por (2.28) y con una longitud  $L = 1$  m la deflexión por flexión BD viene a ser de  $3,1 \times 10^{-6} P$ . La deflexión causada por la deformación de corte es dada por el segundo término. Aquí la rigidez de corte AG se denota por  $V$ . Para calcular  $V$  tenemos que considerar la rigidez de corte tanto del núcleo como de las pieles laterales. Una vez hecho esto, la deflexión de corte SD viene a ser de  $1,94 \times 10^{-7} P$ .

La relación SD/BD es 0,064, lo que quiere decir que la deflexión de corte es de alrededor de 6% de la deflexión por flexión y no será ignorada.

Con una viga muy larga y esbelta la deflexión de corte puede ser ignorada, pero en otros casos debe ser considerada.

La rigidez de corte fue calculada:

$$V = V_c + V_f = \frac{G_c A_c}{\beta_c} + \frac{G_f A_f}{\beta_f} \quad (2.35)$$

Donde  $\beta$  es un factor mencionado antes por (2.33). Para el núcleo  $\beta_c$  se asume como 1, pero para las pieles  $\beta_f$  está dado por (2.33). Debido a la ecuación (2.34) el primer término en (2.35) puede ser ignorada, dejando:

$$V = V_f = \frac{G_f A_f}{\beta_f} \quad (2.36)$$

#### 2.3.4.- Pandeo de vigas con pieles en los cuatro lados

En el caso de puntales sándwich con pieles en los cuatro lados ("puntales con forma de caja"), los cálculos serán hechos de la misma manera que para un puntal sándwich corriente. Las fórmulas (2.26) y (2.27) pueden ser usadas, pero con  $D$  calculado de acuerdo a (2.28) y la rigidez de corte AG, denotada aquí  $V$ , de acuerdo a (2.36). Puesto que la rigidez de corte está muy incrementada comparada con un puntal corriente, la carga crítica es mayor, usualmente cercana a la carga de Euler.

### 2.4.- VIGAS CON PROPIEDADES DISTINTAS

#### 2.4.1.- Vigas consideradas estrechas o anchas

Una viga se considera estrecha cuando el ancho  $b$  es menos que la profundidad del núcleo  $c$ . Entonces las expansiones y contracciones laterales de las

pieles en la dirección y, asociado con el esfuerzo de membrana en la dirección x, puede tomar lugar fácilmente sin causar grandes tensiones de corte en el núcleo en el plano yz. Los esfuerzos en las pieles son por lo tanto principalmente en una dirección, y la relación entre esfuerzo y tensión es igual a E. Esto se asumió en el análisis de vigas en este capítulo.

El mismo argumento no se aplica a los esfuerzos de flexión local en las pieles. Cada piel es una placa delgada en flexión y la relación de esfuerzo a tensión es exactamente  $E/(1 - \nu^2)$ . Sin embargo, estos esfuerzos y tensiones son de importancia secundaria y parece razonable adoptar E por todo para evitar complicaciones.

Una viga se considera ancha cuando el ancho  $b \gg$  al espesor del núcleo  $c$ . Entonces las expansiones y contracciones laterales de las pieles en la dirección y son restringidas por la incapacidad del núcleo para experimentar indefinidamente grandes deformaciones de corte en el plano yz. En este caso es más razonable asumir que las tensiones en la dirección y son cero. La relación de esfuerzo a tensión en la dirección x es por lo tanto  $E/(1 - \nu^2)$  tanto para los esfuerzos de membrana como para los esfuerzos de flexión local. Este valor fue usado en lugar de E en todas las ecuaciones de este capítulo cuando una viga se considera ancha. Notar que si una viga ancha puede curvarse fácilmente en el plano yz, por ejemplo si se permite despegar su apoyo, entonces E será usado en preferencia de  $E/(1 - \nu^2)$ .

#### 2.4.2.- Vigas con pieles distintas

Si las pieles no son del mismo material o de espesores desiguales el resultado de 2.2.1 y 2.2.2 tiene que ser modificado. Las ecuaciones principales de vigas están sin alterar a condición de que la rigidez de flexión se escriba como sigue:

$$D = \frac{bd^2 E_1 E_2 t_1 t_2}{E_1 t_1 + E_2 t_2} + \frac{b}{12} \cdot (E_1 t_1^3 + E_2 t_2^3) \quad (2.37)$$

Donde los subíndices 1 y 2 se aplican a las pieles superior e inferior respectivamente. Se asume aquí, que la condición (2.4) es satisfecha y la contribución del núcleo a la rigidez de flexión es insignificante. Si las rigideces de flexión local para las pieles son insignificantes, es decir si la condición (2.3) es satisfecha para cada una de las pieles, el segundo término en (2.37) puede también ser ignorado. Entonces (como se asumió en el capítulo 2) la rigidez de flexión será escrita como sigue:



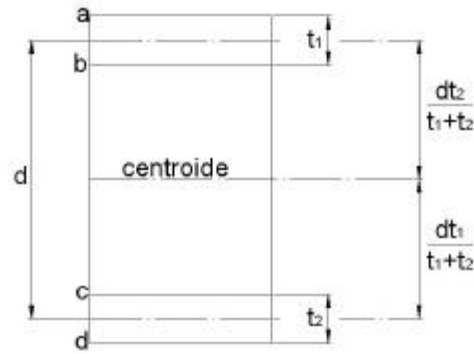


Fig. 2.14. Dimensiones de sándwich con caras de espesor desigual.

$$D = \frac{bd^2 E_1 E_2 t_1 t_2}{E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.38)$$

Es útil notar que la ecuación (2.15) para el esfuerzo de corte del núcleo está sin alteraciones,  $d$  representa habitualmente, la distancia entre los centroides de las pieles superior e inferior.

#### 2.4.3.- Vigas en que la contribución del núcleo a la rigidez de flexión no es pequeña

Cuando  $E_c$  no es pequeño, es decir, cuando la condición (2.12) no es satisfecha, se deben realizar algunas modificaciones para usar las expresiones de este capítulo. Por ejemplo, la expresión (2.2) debe ser usada completamente para la rigidez de flexión  $D$ . Puesto que la condición (2.12) no es satisfecha, el esfuerzo de corte  $\tau$  y la tensión de corte  $\gamma$  no serán consideradas constantes para todo el espesor del núcleo. Lo que significa que la ecuación (2.10) es válida pero no así (2.13).

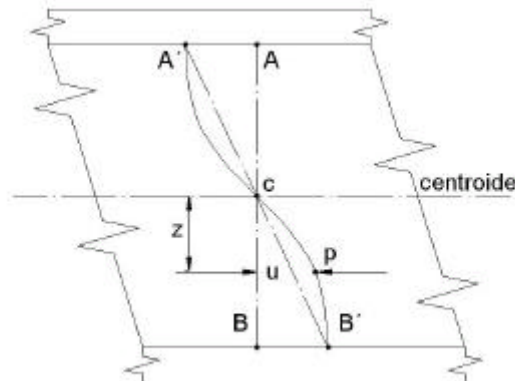


Fig. 2.15. Deformación de corte de sándwich con núcleo rígido

En la fig. 2.15 se muestra una longitud corta de una viga sándwich experimentando deformación de corte del núcleo. La sección ACB a deformado en la curva A'CB'. El punto típico p se ha movido una distancia u a la derecha. En p la tensión es  $\gamma = du/dz$  que da el esfuerzo  $\tau$ :

$$\tau = G \frac{du}{dz} \quad (2.39)$$

La ecuación (2.10) y (2.39) pueden ser combinadas e integradas para dar una expresión para u.

$$u = \frac{Q}{GD} \left[ \frac{E_f}{2} t dz + \frac{E_c}{2} \left( \frac{c^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \right] \quad (2.40)$$

Por ejemplo los desplazamientos AA' y BB' son obtenidos de escribir  $z = \pm c/2$ .

$$BB' = \frac{Q}{GD} \left( \frac{E_f}{4} t dc + \frac{E_c c^3}{24} \right) \quad (2.41)$$

El esfuerzo de corte máximo se obtiene escribiendo  $z = 0$  en la ecuación (2.10).

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{D} \left( \frac{E_f t d}{2} + \frac{E_c c^2}{8} \right) \quad (2.42)$$

Suponer ahora que el núcleo se sustituye por un verdadero núcleo antiplano ( $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ) con un módulo de corte  $G'$ , diferente de  $G^x$ , pero manteniendo el D anterior. El valor de  $G'$  se elige para que la sección ACB se deforme hasta la línea recta A'C B'. Como el núcleo es antiplano,  $E_c$  desaparece y el desplazamiento horizontal queda:

$$BB' = \frac{Q}{G'D} \left( \frac{E_f t dc}{4} \right) \quad (2.43)$$

Puesto que  $G'$  ha sido elegido para que las ecuaciones (2.39) y (2.41) den los mismos resultados para BB', el núcleo antiplano ( $G'$ ) es exactamente equivalente al núcleo real, permitiéndonos usar los análisis del capítulo 2. Estos análisis dan

solamente con los desplazamientos del borde del núcleo AA', BB' y no dependen de la forma de la sección deformada A'CB'. Por lo tanto el núcleo antiplano equivalente tiene un módulo de corte como sigue:

$$G' = \frac{G}{1 + \frac{E_c}{6 E_f} \cdot \frac{c^2}{t(c+t)}} \quad (2.44)$$

El procedimiento es ahora usar el análisis del capítulo 2, sólo que:

- D será escrito como en la ecuación (2.2)
- G es sustituido por G'.

Este procedimiento entrega las correctas deflexiones y esfuerzos en las pieles. Para obtener el esfuerzo de corte en el núcleo será usada la ecuación (2.10) ((o (2.40)).

## 2.5. PANELES SANDWICH

### 2.5.1 Suposiciones

Las pieles se asumen delgadas y de igual espesor.

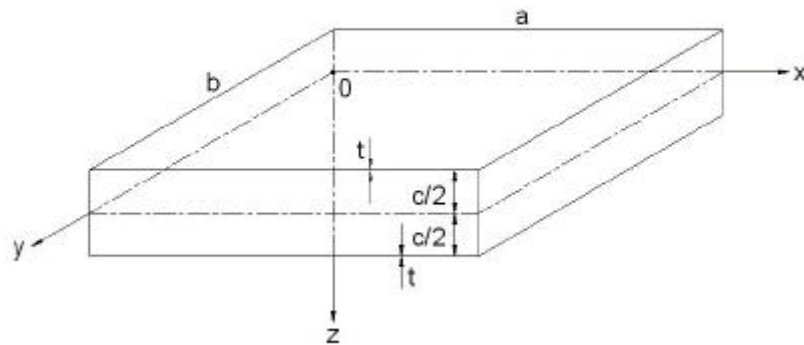


Fig. 2.16. Dimensiones de un panel sándwich con pieles iguales.

Porque las pieles son delgadas comparadas con el núcleo, se asume que  $c \approx d$  y que la rigidez de flexión local de las pieles es insignificante. Esto quiere decir que el esfuerzo normal, es constante a lo largo de las pieles. Se asume que no hay

esfuerzos de valor considerable en la dirección  $z$ . Las pieles y el núcleo son isotrópicos. Las pieles se asumen como rígidas en corte, en los planos  $yz$  y  $zx$ .

Para la rigidez de flexión del panel, el núcleo se asume considerablemente menos rígido que las pieles. Por consiguiente  $E_c \approx 0$  en el plano  $xy$ , que conduce al hecho de que ellos no contribuyen a la rigidez de flexión. El esfuerzo de corte del núcleo se asume como constante a lo largo de su espesor.

Además, las deflexiones se asumen como pequeñas. Por lo tanto, la teoría común de flexión es válida y no hay tensión en el plano medio.

### 2.5.2. Convenciones de signos

La convención de signos que será usada para placas se muestra en la fig. 2.17:

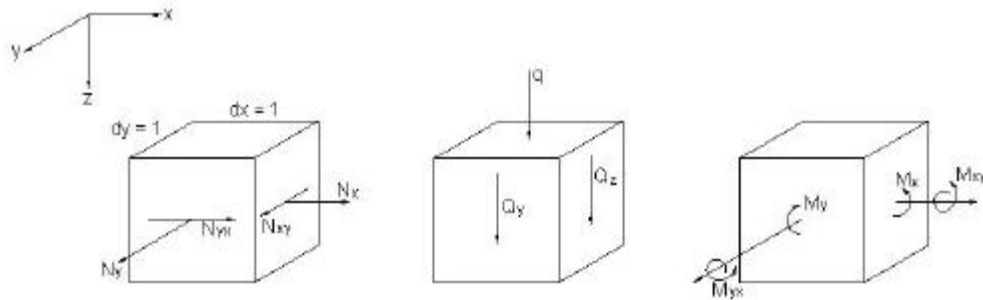


Fig. 2.17. Convenciones de signos para placas.

La figura muestra direcciones positivas del momento de flexión y torsión ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_{yx}$ ), fuerzas de corte ( $Q_x$ ,  $Q_y$ ) y fuerzas de membrana ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_{yx}$ ).

## 2.6 FLEXION Y PANDEO DE PANELES SANDWICH

### 2.6.1 Flexión y pandeo de paneles sándwich apoyados en dos lados

Para paneles sándwich apoyados en dos lados opuestos, las teorías y las fórmulas son las mismas que para vigas sándwich corrientes, a condición de que la carga sea una presión uniforme. Sin embargo, debe señalarse que el panel se considera como una viga ancha, debido a 2.4.1. Por lo tanto, en el análisis E será reemplazado por  $E/(1 - \nu^2)$ . Las suposiciones son hechas similarmente. La condición usada en el punto 2.2 para ignorar términos, cuando se calcula la rigidez de flexión son las mismas.

De esto se deduce que en el caso de un panel sándwich apoyado únicamente en dos lados se recomienda usar el punto 2.2 y la teoría de vigas abiertas con E reemplazado por  $E/(1 - \nu^2)$ .

### 2.6.2 Flexión y pandeo de paneles sándwich apoyados en los cuatro lados

Para la obtención de fórmulas útiles, los métodos de la energía son aplicados a paneles sándwich apoyados en los cuatro bordes.

El método apunta a encontrar expresiones para la energía potencial total en el material, como una función de los desplazamientos asumidos. La energía consiste de dos partes principales: la energía de deformación U, a raíz de la deformación en el núcleo y las pieles del material deformado, y la energía potencial H, a raíz del movimiento de las cargas, cuando se deforma el panel.

El método se basa también, en el hecho que la energía total (U + H) debe tener un valor mínimo cuando la placa deflectada está en equilibrio. Por lo tanto la energía total (U + H), debe ser minimizada con respecto a la deflexión debido a la flexión y corte para encontrar la carga crítica, los esfuerzos y deflexiones.

En la fig. 2.18 se muestra una parte de un panel deflectado.

La línea central AG y la normal AE han girado ambas un ángulo  $\partial w / \partial x$ . A causa de la deformación de corte la línea AF ha girado un pequeño ángulo  $\lambda \partial w / \partial x$ , donde  $\lambda$  puede tomar cualquier valor entre +1 y 0. De esto se obtiene la tensión de corte en la sección (el ángulo EAF),  $\lambda = 1$  quiere decir que el panel es rígido en corte y  $\lambda = 0$  que no hay rigidez de corte en el panel.

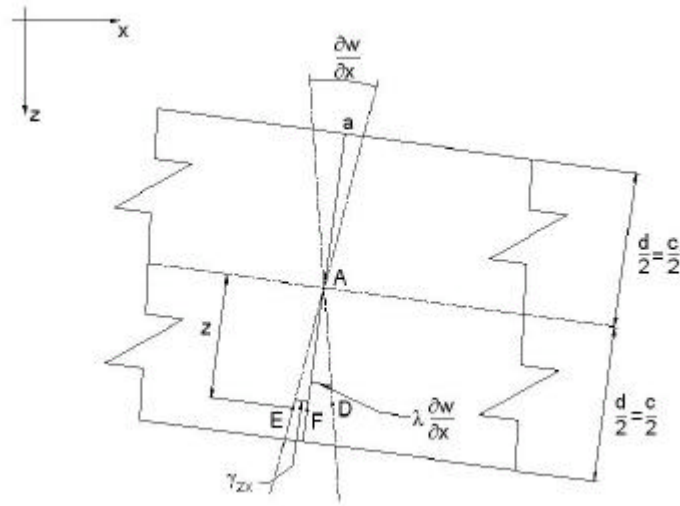


Fig. 2.18. Sección a través del panel sándwich deflectado en el plano xz

$$\gamma_{zx} = (1 - \lambda) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.45)$$

Puesto que las deformaciones se asumen como pequeñas el desplazamiento de F en la dirección x es:

$$u = -z \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.46)$$

De la misma manera

$$\gamma_{yz} = (1 - \mu) \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.47)$$

$$v = -z \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.48)$$

Donde  $\mu$  es el término correspondiente a  $\lambda$  y  $v$  es el desplazamiento en la dirección y.

Las deformaciones en las direcciones x e y están dadas por los desplazamientos:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.49)$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.50)$$

La deformación de corte en el plano xy es:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.51)$$

Se debe agregar que  $\lambda$  y  $\mu$  son tratados como seres independientes de  $x$  e  $y$  durante la diferenciación.

### 2.6.2.1.- Energía de deformación

La energía de deformación de un sólido isotrópico está dado por la integración de la energía de deformación sobre el volumen:

$$U = \frac{E}{2g} \int_V (e_x^2 + e_y^2 + 2\nu e_x e_y) dV + \frac{G}{2} \int_V (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) dV \quad (2.52)$$

Donde  $g = 1 - \nu^2$

Esta expresión se usará para el núcleo y las pieles respectivamente.

#### 2.6.2.1.1.- Energía de deformación del núcleo, $U_c$

De acuerdo a las suposiciones, la energía de deformación de los términos que contienen  $e_x$ ,  $e_y$  y  $\gamma_{xy}$  debe ser cero. Esto deja solamente las tensiones de corte  $\gamma_{zx}$  y  $\gamma_{yz}$  de (3.1) y (3.3) para ser introducidas en (3.8).

$$U_c = \frac{G_c}{2} \int_V \left[ (1 - \mu)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + (1 - \lambda)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dV = \frac{G_c d}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ (1 - \mu)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + (1 - \lambda)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dy dx \quad (2.53)$$

Donde  $dV = dx dy dz$ .

#### 2.6.2.1.2.- Energía de deformación de las pieles, $U_f$

De acuerdo a las suposiciones  $\gamma_{yz}$  y  $\gamma_{zx}$  son cero. Esto deja los términos  $e_x$ ,  $e_y$  y  $\gamma_{xy}$  para ser introducidos en (3.8). Para la piel inferior  $z$  es  $+d/2$  y la energía de deformación aquí es:

$$U_{inferior} = \frac{E}{2g} \int_V \left[ \frac{d^2}{4} \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{d^2}{4} \mu^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \frac{d^2}{4} \lambda \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dV +$$

$$+ \frac{G_f}{2} \int_V \frac{d^2}{4} (\lambda + \mu)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dV \quad (2.54)$$

La energía de deformación total de ambas pieles,  $U_f$ , se obtiene por integración sobre el espesor  $t$  y duplicando. Conviene también escribir  $G = E / \{2(1 + \nu)\}$

$$U_f = \frac{E d^2 t}{4g} \int_0^a \int_0^b \left[ \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \mu^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu_f \lambda \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \frac{1 - \nu_f}{2} \right) (\lambda + \mu)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dy dx \quad (2.55)$$

### 2.6.2.2.- Energía potencial de las cargas aplicadas

Cuando en una viga de longitud  $L$  se da una deformación  $w$ , los extremos de la viga se aproximan el uno al otro por una cantidad  $\delta$ .

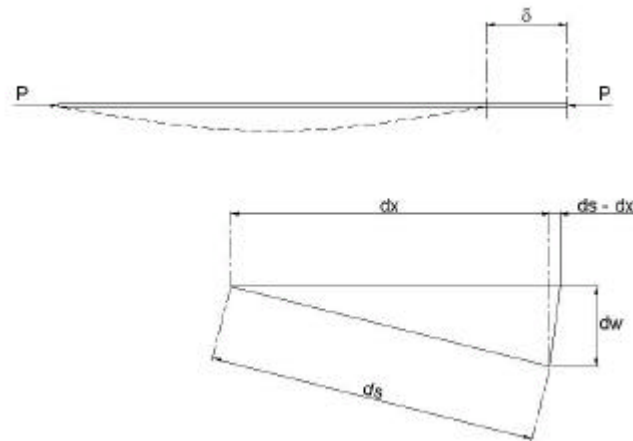


Fig. 2.19. viga deformada y elemento deformado de longitud  $ds$

$ds$  en la fig. 2.19 se puede escribir:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dw^2} = dx \sqrt{1 + (dw/dx)^2}$$

Y entonces se desarrolla en una serie. Produce el desarrollo serial:

$$dx \sqrt{1 + (dw/dx)^2} = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 + \dots \right]$$

Para un elemento viga con una longitud  $ds$  los extremos se aproximan el uno al otro por una cantidad  $ds - dx$ . La ecuación anterior da:



$$ds - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

La aproximación total  $\delta$  debe ser obtenida por la integración sobre la longitud de la viga.

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

Considerar ahora una franja estrecha de la placa de la fig. (2.16) paralela con el eje  $x$  y de ancho  $dy$ . De la misma manera los extremos de esta franja se aproximan el uno al otro cuando la placa se dobla por una cantidad:

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

Sí una fuerza compresiva  $N_x$  se aplica en el borde ( $x = 0$  y  $x = a$ ) en el plano de la placa, entonces la fuerza en la franja  $N_x dy$  y el cambio en la energía potencial cuando la placa se dobla es:

$$- \frac{N_x dy}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

La disminución total de la energía potencial por la fuerza  $N_x$ , se obtiene por la integración desde  $y = 0$  a  $y = b$ .

$$V_1 = - \frac{N_x}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

Si la placa soporta también una presión transversal uniforme  $q$  en la dirección  $z$ , la disminución en la energía potencial  $V_2$  para la carga es:

$$V_2 = - \int_0^a \int_0^b wq dx dy$$

El desplazamiento  $w$  para una placa rectangular simplemente apoyada puede ser expresado por la suma de las funciones trigonométricas:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.56)$$

Donde  $a_{mn}$  es la amplitud de la función (m,n) de deformación. Esta expresión satisface las condiciones de borde de una placa simplemente apoyada.

La energía total del sistema, (U +V), se obtiene por la adición de las expresiones para U y V respectivamente y sustituyendo w por la serie (2.56). Considerar por ejemplo el primer término de  $U_c$ .

$$U_{c1} = \frac{Gd}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ (1 - \mu) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dy dx \quad (2.57)$$

Sustituyendo w de acuerdo a (2.56) se obtiene:

$$U_{c1} = \frac{Gd}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \mu) a_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dy dx \quad (2.58)$$

Cuando la serie es cuadrada, las integrales de los términos del producto vectorial desaparecen, a causa de las propiedades ortogonales de las funciones elegidas para w. Solamente los términos cuadrados están a la izquierda.

$$U_{c1} = \frac{Gd}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \mu)^2 a_{mn}^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} \right] dy dx \quad (2.59)$$

Las series pueden ser integradas término por término. La siguiente integral es igual a (ab/4) para todos los valores de m y n.

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} dy dx = \frac{ab}{4} \quad (2.60)$$

Aquí

$$U_{c1} = \frac{Gd}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \mu_{mn})^2 a_{mn}^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{ab}{4} \quad (2.61)$$

Todos los términos de la energía serán tratados de la misma manera. En este proceso es útil tener el conocimiento acerca de las siguientes relaciones.

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dy dx = \sum \sum a_{mn}^2 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \frac{a b}{4}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dy dx = \sum \sum a_{mn}^2 \frac{n^4 \pi^4}{a^4} \frac{a b}{4}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy dx = \sum \sum a_{mn}^2 \frac{m^2 n^2 \pi^2}{a^2 b^2} \frac{a b}{4}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dy dx = \sum \sum a_{mn}^2 \frac{m^{2n} 2\pi^2}{a^2 b^2} \frac{a b}{4}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy dx = \sum \sum a_{mn}^2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \frac{a b}{4}$$

$$\int_0^a \int_0^b w dy dx = \sum \sum \frac{4a_{mn}}{\pi^2} \frac{a b}{mn} \quad (m,n \text{ ambos diferentes})$$

$$= 0 \quad (\text{de lo contrario})$$

Por la sustitución, estos valores en las expresiones anteriores para  $U_c$ ,  $U_f$ ,  $V_1$  y  $V_2$  las siguientes expresiones son obtenidas para los términos de la energía.

$$(U_c)_{mn} = GA_1 \left( (1 - \lambda)^2 \frac{m^2}{a^2} + (1 - \mu)^2 \frac{n^2}{b^2} \right) a_{mn}^2 \quad (2.62a)$$

$$(U_f)_{mn} = EA_2 \left( \lambda^2 \frac{m^4}{a^4} + \mu^2 \frac{n^4}{b^4} + 2\lambda\mu \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{1 - \nu}{2} (\lambda - \mu)^2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right) a_{mn}^2 \quad (2.62b)$$

$$(V_1)_{mn} = \frac{N_x}{2} \pi^2 a_{mn}^2 \frac{ab}{4} \frac{m^2}{a^2} \quad (2.62c)$$

$$(V_2)_{mn} = -4q \frac{a_{mn}}{\pi^2} \frac{ab}{mn} \quad (2.62d)$$

Donde:

$$A_1 = \frac{d}{8} \pi^2 ab \quad y \quad A_2 = \frac{td^2}{16g} \pi^4 ab$$

Por sencillez, solamente los modos (m,n) se mostraron arriba y no hay sufijos en  $\lambda$  y  $\mu$ . Hay diferentes valores para cada modo m, n.

Evidentemente (U + V) es una función de  $a_{mn}$ ,  $\lambda$  y  $\mu$ . Si la placa está en equilibrio, (U + V) ha sido estacionario con respecto a cada una de estas variables. De esto se deduce que para cada modo las siguientes condiciones deben ser satisfechas.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (U + V) = \frac{\partial}{\partial \mu} (U + V) = \frac{\partial}{\partial a_{mn}} (U + V) = 0 \quad (2.63)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para determinar los valores de  $a_{mn}$ ,  $\lambda$  y  $\mu$ . Puesto que el valor (m, n) de  $a_{mn}$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  aparecen solamente en el modo (m, n), (U + V) en la ecuación (2.63) puede ser reemplazada por  $(U + V)_{mn}$  solamente.

Es fácil ver las conexiones y comprender la línea de las ecuaciones si la energía total está escrita de la forma:

$$(U + V)_{mn} = B_{xx} \lambda^2 + B_{yy} \mu^2 + 2B_{xy} \lambda \mu + 2B_x \lambda + 2B_y \mu + B_0 \quad (2.64)$$

Donde:

$$B_{xx} = \left[ GA_1 \frac{m^2}{a^2} + EA_2 \left( \frac{m^4}{a^4} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right) \right] a_{mn}^2 \quad (2.65a)$$

$$B_{yy} = \left[ GA_1 \frac{n^2}{b^2} + EA_2 \left( \frac{n^4}{b^4} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right) \right] a_{mn}^2 \quad (2.65b)$$

$$B_{xy} = EA_2 \left( \frac{1 + \nu}{2} \right) \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} a_{mn}^2 \quad (2.65c)$$

$$B_x = -GA_1 \frac{m^2}{a^2} a_{mn}^2 \quad B_y = -GA_1 \frac{n^2}{b^2} a_{mn}^2 \quad (2.65d,e)$$

$$B_0 = -GA \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) a_{mn}^2 + (V_1 + V_2)_{mn} \quad (2.65f)$$

La ecuación (2.63) da entonces:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U + V) = \frac{1}{2} \frac{\partial (U + V)}{\partial \lambda} = B_{xx} \lambda + B_{xy} \mu + B_x = 0 \quad (2.66a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (U + V) = \frac{1}{2} \frac{\partial (U + V)}{\partial \mu} = B_{yy} \mu + B_{xy} \lambda + B_y = 0 \quad (2.66b)$$

Si las ecuaciones (2.66) son multiplicadas por  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente y entonces sumado, por lo tanto:

$$B_{xx} \lambda^2 + B_{yy} \mu^2 + 2B_{xy} \lambda \mu + B_x \lambda + B_y \mu = 0 \quad (2.67)$$

(2.67) insertada en (2.64) deja solamente:

$$(U + V)_{mn} = B_x \lambda + B_y \mu + B_0 \quad (2.68)$$

Por la solución de (2.66 a) y (2.66 b) es posible mostrar que en esta problema particular la solución de las ecuaciones (2.66) es tal que  $\mu = \lambda$ .

La sustitución por  $\lambda$  y  $\mu$  en la ecuación (2.66) da el siguiente resultado para  $\lambda$ :

$$\lambda = - \frac{B_x}{B_{xx} + B_{xy}} = + \frac{1}{1 + \rho \Omega} \quad (2.69a)$$

Donde:

$$\Omega = \frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2 \quad (2.69b)$$

$$\rho = \frac{\pi^2}{2g} \frac{E}{G} \frac{td}{b^2} \quad (2.69c)$$

Las variables  $\lambda$ ,  $\Omega$  y  $\rho$  son adimensionales.  $\lambda$  y  $\Omega$  toman diferentes valores para diferentes modos.  $\rho$  es constante y representa el coeficiente de la rigidez de flexión  $Etd^2/2g$  y la rigidez de corte  $Gd$ .

Cuando la expresión para  $\lambda$  es insertada en (2.68) una expresión  $(U + V)$  como función de  $a_{mn}$  es dada.

$$(U + V)_{mn} = \frac{Gd}{8} \pi^2 a_{mn}^2 \frac{a}{b} \frac{\rho \Omega^2}{1 + \rho \Omega} - \frac{N_x}{2} \pi^2 a_{mn}^2 \frac{ab}{4} \frac{m^2}{a^2} - 4q \frac{a_{mn}}{\pi^2} \frac{ab}{mn} \quad (2.70)$$

Por equilibrio (2.70) debe ser estacionario con respecto  $a_{mn}$ .

$$\frac{\partial}{\partial a_{mn}} (U + V)_{mn} = \left( \frac{Gd\pi^2}{4} \frac{a}{b} \frac{\rho\Omega^2}{1 + \rho\Omega^2} - N_x \pi^2 \frac{ab}{4} \frac{m^2}{a^2} \right) a_{mn} - \frac{4q}{\pi^2} \frac{ab}{mn} = 0 \quad (2.71)$$

### 2.6.2.3.- Carga de borde, $N_x$

Supongamos que la presión transversal  $q$  es cero. La carga crítica es entonces el valor de  $N_x$  que causa el pandeo del panel.

Si el panel se pandea en el modo  $(m,n)$ ,  $a_{mn}$  es distinto de cero. La ecuación (2.71) es entonces satisfecha solamente cuando:

$$N_x = \frac{Gd}{m^2} \left( \frac{a}{b} \right)^2 \frac{\rho\Omega^2}{1 + \rho\Omega^2} = P_{xmn} \quad (2.72)$$

$P_{xmn}$  se define como la carga de borde crítica por unidad de longitud que causa pandeo en el modo  $(m,n)$ . Para cualquier  $m$  dado, la menor carga crítica se obtiene para  $n = 1$ . La ecuación (2.72) puede entonces escribirse como sigue:

$$P_{xmn} = \frac{\pi^2 D_2}{b^2} K_1 \quad (2.73)$$

Donde:

$$K_1 = \frac{[(mb/a) + (a/mb)]^2}{1 + \rho [(mb/a)^2 + 1]} \quad (2.74)$$

Y  $D_2$  es la rigidez de flexión del sándwich:

$$D_2 = \frac{E_f t d^2}{2g} = \frac{E_f t d^2}{2(1 - \nu)^2} \quad (2.75)$$

Notar el factor  $g = (1 - \nu^2)$  en la expresión para la rigidez de flexión de la placa. Surge de las condiciones para que una viga sea considerada estrecha o ancha y siempre estará en las expresiones en este capítulo porque los paneles son naturalmente considerados como anchos.

Se observó que si la rigidez de corte es infinita,  $\rho$  desaparece y la ecuación (2.74) es idéntica con el resultado por pandeo de una placa no sometida a deformaciones de corte.

Las figuras 2.20 muestran el valor de  $K_1$  trazadas contra  $a/b$  para  $m = 1, \dots, 4$  y cuatro diferentes valores de  $\rho$  (0, 0.1, 0.2 y 0.4). Ya que solamente el

valor mínimo de  $K_1$  es de interés, solamente las menores envolventes de  $K_1$  para  $m = 1, \dots, 4$  serán usadas. Puesto que las figuras solo muestran cuatro curvas ( $m = 1, \dots, 4$ ) se indicará que cuando  $a/b \gg 1$  la menor envolvente de las curvas llega cerca de una línea recta horizontal. Los diagramas son válidos para  $0 < a/b < -3.5$  y para valores superiores el valor mínimo en el diagrama puede ser usado.

El procedimiento es leer  $K_1$  de la fig. 2.20 y entonces insertar el valor en la ecuación (2.73) para determinar la carga de pandeo. Si el valor de  $p$  es obtenido aquel que no concuerda con los diagramas de la fig. 2.20, el valor para  $K_1$  tendrá que ser calculado con (2.74).

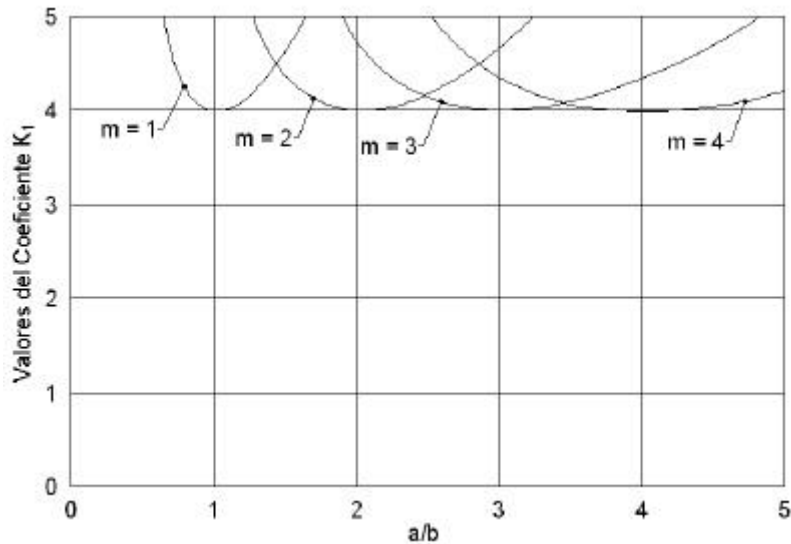


Fig.2.20 a. Coeficiente de pandeo  $K_1$  trazado en relación con  $a/b$  para  $m = 1 \dots 4$  y  $\rho = 0$ . Sándwich simplemente apoyado con caras delgadas.

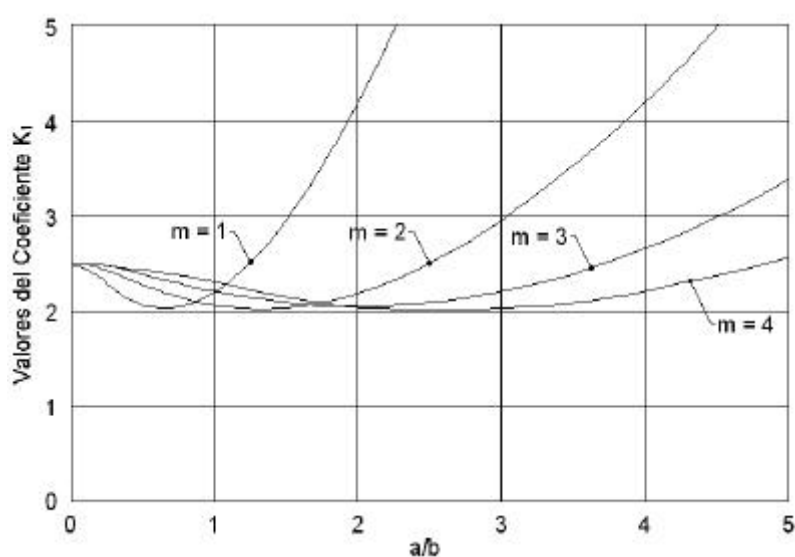


Fig.2.20 b. Coeficiente de pandeo  $K_1$  trazado en relación con  $a/b$  para  $m = 1 \dots 4$  y  $\rho = 0, 1$ . Sándwich simplemente apoyado con caras delgadas.

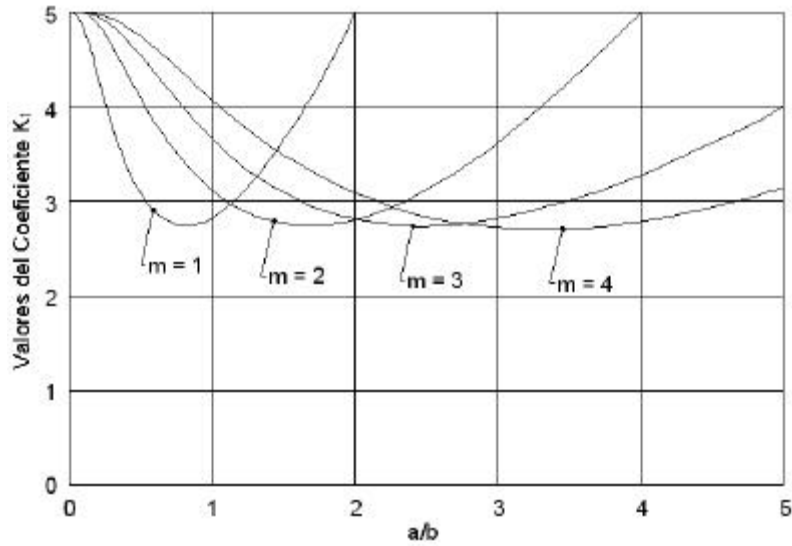


Fig.2.20 c. Coeficiente de pandeo  $K_1$  trazado en relación con  $a/b$  para  $m = 1....4$  y  $\rho = 0,2$ . Sándwich simplemente apoyado con caras delgadas.

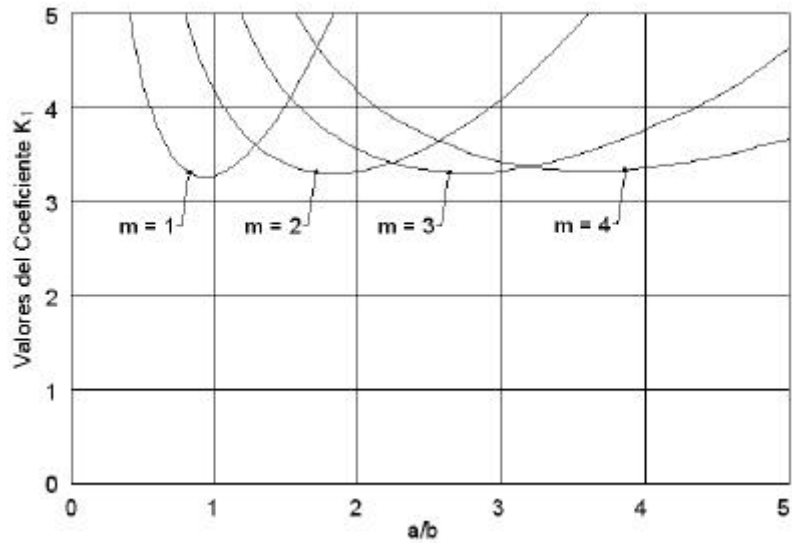


Fig.2.20 d. Coeficiente de pandeo  $K_1$  trazado en relación con  $a/b$  para  $m = 1....4$  y  $\rho = 0,4$ . Sándwich simplemente apoyado con caras delgadas.

#### 2.6.2.4.- Presión uniforme, g

Supongamos ahora que la carga de borde  $N_x$  es cero y que la carga es  $q$ , una presión uniforme.

La sustitución de  $\rho$  de la ecuación (2.69 c) proporciona una expresión para la amplitud de la función de  $(m,n)$ .



$$a_{mn} = \frac{16qb^4}{\pi^6 mn D_2} \frac{1 + \rho\Omega}{\Omega^2}, \text{ si } m, n \text{ son ambos impares} \quad (2.76)$$

$$= 0, \text{ de lo contrario}$$

En este caso además, una rigidez de corte infinita en el núcleo causa que  $\rho$  desaparezca y entonces la ecuación (2.76) corresponda al resultado estándar por flexión de una placa no sometida a deformación de corte.

La ecuación (2.76) puede también ser escrita de la forma:

$$a_{mn} = \frac{16qb^4}{\pi^6 mn D_2 \Omega^2} \frac{16qb^2}{\pi^6 mn G d \Omega}, \text{ si } m, n \text{ son ambos impares} \quad (2.77)$$

$$= 0, \text{ de lo contrario}$$

Los términos del lado derecho representan deformaciones de flexión y corte respectivamente. La proporción de la deformación de corte a la deformación de flexión es.

$$\rho\Omega, \text{ o } \frac{1 - \lambda}{\lambda}, \text{ o } \frac{\pi^2 D_2}{b^2 G d} \Omega$$

Para obtener la deflexión  $w$  el valor  $a_{mn}$  debe ser insertado en la ecuación (2.56). la deflexión máxima  $w_{\max}$  está en el centro del panel,  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ , y se obtiene por suma:

$$w_{\max} = \frac{16qb^4}{\pi^6 D_2} \sum \sum \left[ \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{mn} \frac{1 + \rho\Omega}{\Omega} \right] \quad (2.78)$$

Para uso práctico esta expresión puede ser escrita:

$$w_{\max} = \frac{qb^4}{D_2} (\beta_1 + \rho\beta_2) \quad (2.79)$$

Donde:

$$\beta_1 = \frac{16}{\pi^6} \sum \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{mn\Omega^2}, \quad m, n \text{ impares}$$

$$\beta_2 = \frac{16}{\pi^6} \sum \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{mn\Omega}, \quad m, n \text{ impares}$$

$\beta_1$  y  $\beta_2$  pueden ser leídos de la fig. 2.21 para paneles con variadas proporciones a/b.

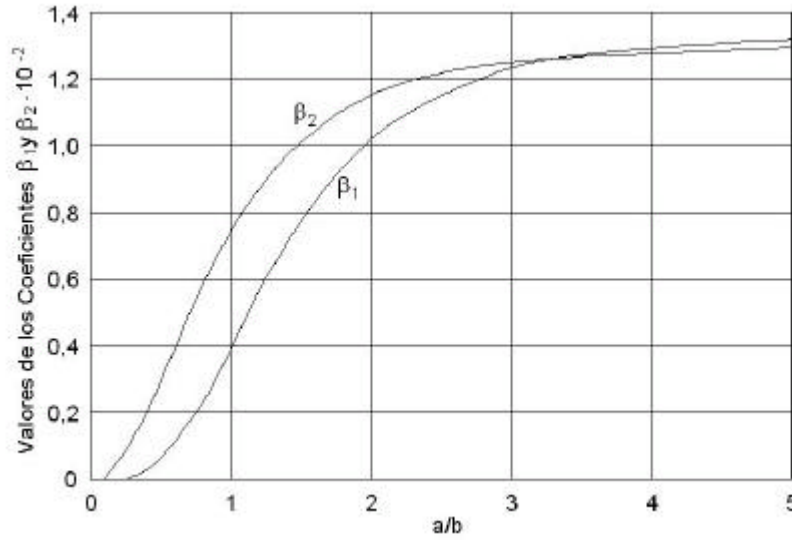


Fig.2.21. Coeficientes  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Sándwich simplemente apoyado con caras delgadas.

Los esfuerzos en las pieles y en el núcleo pueden ser obtenidos también de (2.76). Por ejemplo los esfuerzos normales en las pieles (en dirección x) son iguales a  $(E/g) \cdot (e_x + \nu e_y)$ . Las deformaciones  $e_x$  y  $e_y$  son definidas en (2.49) y (2.50). Por inserción de  $z = \pm d/2$  los esfuerzos en las direcciones x e y son.

$$\sigma_x = \pm \frac{Ed\lambda}{2g} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.80a)$$

$$\sigma_y = \pm \frac{Ed\lambda}{2g} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.80b)$$

El esfuerzo de corte  $\tau_{xy}$  en las pieles es igual a  $[E/(2(1 + \nu))] \gamma_{xy}$  donde la deformación  $\gamma_{xy}$  está dada por (2.51). Para  $z = \pm d/2$  el esfuerzo de corte es:

$$\tau_{xy} = \pm \frac{Ed\lambda}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.81)$$

El esfuerzo de corte  $\tau_{zx}$  en el núcleo es igual a  $G\gamma_{zx}$ . Cuando la deformación  $\gamma_{zx}$  es dada por (2.45)

$$\tau_{zx} = \pm G (1 - \lambda) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.82a)$$

Y asimismo

$$\tau_{yz} = \pm G (1 - \lambda) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.82b)$$

Usualmente los esfuerzos máximos son de interés. Para uso práctico es conveniente escribir la expresiones de la misma forma de la ecuación (2.79).

Se puede mostrar que los esfuerzos normales en las pieles son máximos en el centro del panel ( $x = a/2$ ,  $y = b/2$ ). El esfuerzo de corte en las pieles es el máximo en una esquina ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ), el esfuerzo de corte del núcleo  $\tau_{zx}$  es máximo en el medio de los lados de longitud  $b$  ( $x = 0$ ,  $y = b/2$ ) y el esfuerzo de corte en el núcleo  $\tau_{yz}$  es máximo en el medio de los lados de longitud  $a$  ( $x = a/2$ ,  $y = 0$ ). Los resultados pueden ser resumidos de la siguiente forma:

$$\sigma_x = \frac{qb^2}{dt} (\beta_3 + \nu_f \beta_4) \quad (2.83a)$$

$$\sigma_y = \frac{qb^2}{dt} (\beta_4 + \nu_f \beta_3) \quad (2.83b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{qb^2}{dt} (1 - \nu_f) \beta_5 \quad (2.83c)$$

$$\tau_{zx} = \frac{qb}{d} \beta_6 \quad (2.83d)$$

$$\tau_{yz} = \frac{qb}{d} \beta_7 \quad (2.83e)$$

Donde:

$$\beta_3 = \sum \sum \frac{16}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega^2} \frac{m}{n} \frac{b^2}{a^2} \quad (2.84a)$$

$$\beta_4 = \sum \sum \frac{16}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega^2} \frac{n}{m} \quad (2.84b)$$

$$\beta_5 = \sum \sum \frac{16}{\pi^4} \frac{b}{a\Omega^2} \quad (2.84c)$$

$$\beta_6 = \sum \sum \frac{16}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\Omega} \frac{b}{a} \quad (2.84d)$$

$$\beta_7 = \sum \sum \frac{16}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m\Omega} \quad (2.84e)$$

La fig. 2.22 muestra  $\beta_3 - \beta_7$  trazado contra  $a/b$ . Todos los esfuerzos son independientes de la rigidez de corte del núcleo y es posible mostrar que los resultados de las ecuaciones (2.83) y (2.84) son los mismos que cuando la deformación de corte del núcleo es despreciada. Los resultados para un panel rectangular simplemente apoyado pueden por lo tanto ser usados también para calcular los esfuerzos de un panel sándwich.

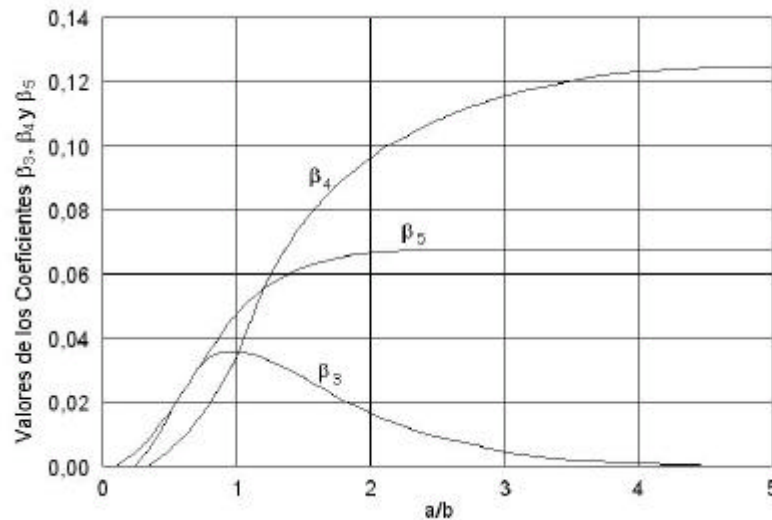


Fig. 2.22 a. Constantes  $\beta_3 - \beta_5$ . Sándwich isotrópico simplemente apoyado.

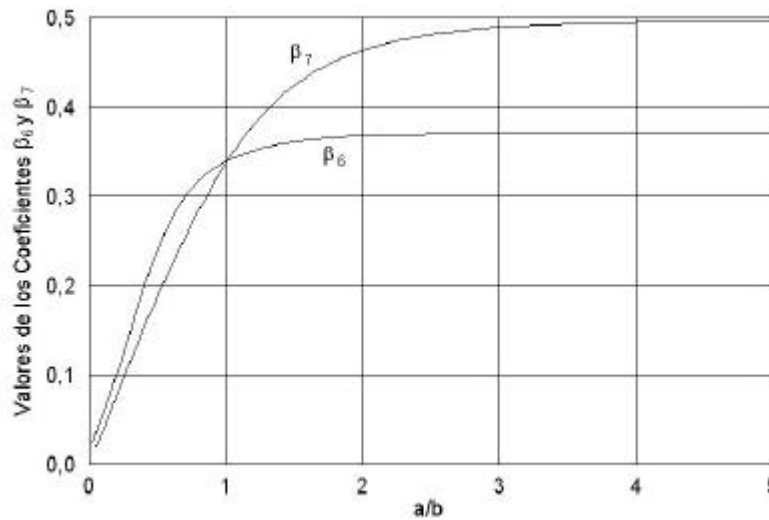


Fig. 2.22 b. Constantes  $\beta_6$  -  $\beta_7$ . Sandwich isotrópico simplemente apoyado con caras delgadas.

### 2.6.3 Cargas de borde y presión uniforme actuando simultáneamente

Cuando la presión transversal uniforme y la carga de borde compresiva  $p$  por unidad de longitud actúan simultáneamente, el valor de  $a_{mn}$  puede ser obtenido otra vez de la ecuación (2.71). La expresión para  $a_{mn}$  es:

$$a_{mn} = \frac{(a_{mn})_0}{1 - P/P_{xmn}} \quad (2.85)$$

Donde  $(a_{mn})_0$  es la amplitud cuando  $P$  es cero, dado por la ecuación (2.76) y  $P_{xmn}$  la carga crítica dada por la ecuación (2.73). Naturalmente la expresión es para la carga crítica  $(m, n)$ .

El efecto práctico de esta disposición de carga es para multiplicar cada término en las series para las funciones  $\beta$  por un factor  $(1 - P/P_{xmn})^{-1}$ . Porque  $P_{xmn}$  depende de la relación  $\rho$ , los esfuerzos en el panel no son ampliamente independientes de la rigidez de corte.

## 2.7. PANELES CON PROPIEDADES DISTINTAS

### 2.7.1. Paneles con pieles distintas.

Cuando los paneles tienen pieles de espesores desiguales o son de diferentes materiales, hay que hacer unas pocas modificaciones. Las ecuaciones de

flexión y pandeo (2.73) y (2.79) están sin alterar a condición de que ambas pieles tengan la misma relación de Poisson  $\nu_f$  y se hacen las siguientes alteraciones:

$$D_2 = \frac{E_1 E_2 t_1 t_2 d^2}{(1 - \nu_f^2) (E_1 t_1 + E_2 t_2)} \quad (2.86)$$

$$\rho = \frac{\pi^2}{b^2 (1 - \nu_f^2)} \cdot \frac{E_1 E_2 t_1 t_2 c}{G (E_1 t_1 + E_2 t_2)} \quad (2.87)$$

## **CAPITULO III. METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

### **3.1.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

Es de interés presentar algunos conceptos teóricos básicos dentro del campo del estudio del comportamiento de las estructuras, siendo la teoría de la elasticidad, el punto de partida para ello. No se pretende profundizar en este tema, sino presentarlo como concepto introductorio al método de los elementos finitos y al tema que trata esta tesis.

#### **3.1.1.- Conceptos generales sobre elasticidad**

En el amplio campo del estudio de los sólidos, la elasticidad nos permitirá obtener y analizar el comportamiento de los sólidos deformables elásticamente, planteándose para ello, una serie de hipótesis fundamentales y relaciones aplicadas a lo que se conoce como sólido elástico.

##### **3.1.1.1.- Hipótesis fundamentales**

El comportamiento del sólido elástico se rige por las siguientes hipótesis:

- ♦ El sólido es isótropo, homogéneo, lineal y continuo.
- ♦ Se cumple el principio de superposición.
- ♦ El sólido es perfectamente elástico, es decir, vuelve a su estado original una vez descargado.
- ♦ Las deformaciones son pequeñas.

##### **3.1.1.2.- Ecuaciones de la elasticidad**

Las ecuaciones de la elasticidad pueden dividirse en tres grupos, siendo dos de ellos deducibles a través de la mecánica racional y el tercero en base a ensayos experimentales, estas ecuaciones deben ser lineales, con el objeto de cumplir con las hipótesis señaladas anteriormente.

##### **3.1.1.2.1.- Ecuaciones de equilibrio**

###### **□ Concepto de tensión**

Se conoce como tensión, en términos genéricos, a la reacción que experimentan las fibras internas del sólido, producto de la aplicación de un sistema de cargas. La tensión puede expresarse en forma vectorial y representa la fuerza por unidad de área aplicada sobre una superficie.

La fig. 3.1, muestra un sólido en cuyo interior se han separado dos porciones de material a través de una superficie  $S$ , si consideramos un diferencial de área  $\Delta S$ , con su respectivo vector normal y denominamos  $\Delta F$  a la resultante de la acción que ejerce el material exterior sobre el interior, se entenderá por vector tensión  $\mathbf{t}$  al vector límite  $\Delta F/\Delta S$ , cuando  $\Delta S$  tiende a cero, de esta forma, la interacción no depende del área, si no del vector normal  $\mathbf{n}$ , es decir, de la orientación de la superficie, por lo que se conocerá el estado tensional de un punto, cuando se conozca para cada orientación su vector  $\mathbf{t}$ , lo anterior indica el carácter tensorial de la tensión, por lo que el estado tensional de un punto puede obtenerse a través de  $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{T}$  es el tensor de tensiones.

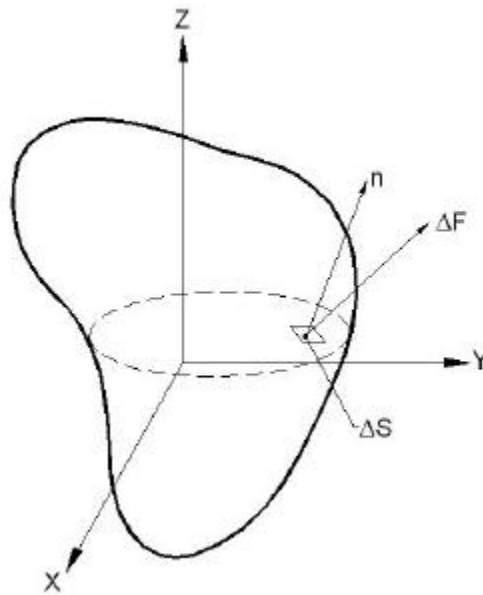


Fig.3.1

El tensor de tensiones queda definido por:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Donde  $\sigma$  es la tensión normal y  $\tau$  la tensión tangencial, como se muestra en la

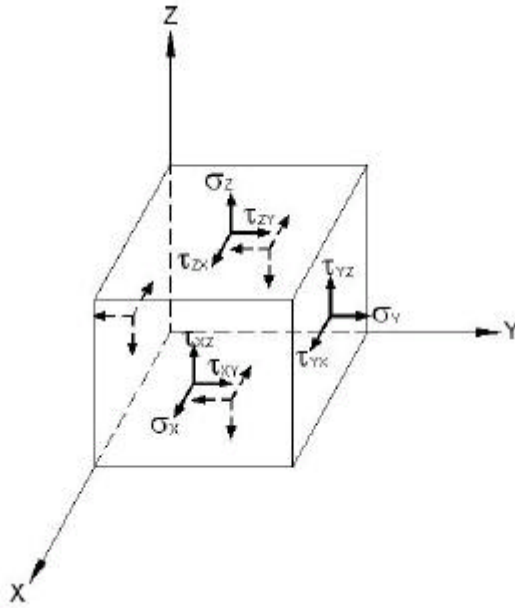


Fig. 3.2.

#### □ Ecuaciones de equilibrio interno

Para obtener el equilibrio de un punto interior del sólido se selecciona un diferencial de volumen, en forma de paralelepípedo elemental cuyas caras son paralelas a los ejes coordenados, obteniéndose las relaciones que se detallan:

$$\partial\sigma_x / \partial X + \partial\tau_{yx} / \partial Y + \partial\tau_{zx} / \partial Z + f_x = 0$$

$$\partial\sigma_y / \partial Y + \partial\tau_{xy} / \partial X + \partial\tau_{zy} / \partial Z + f_y = 0$$

$$\partial\sigma_z / \partial Z + \partial\tau_{xz} / \partial X + \partial\tau_{yz} / \partial Y + f_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Donde  $f$  es la fuerza de volumen

#### □ Ecuaciones de equilibrio en el contorno

Para obtener las ecuaciones de equilibrio en el contorno, se selecciona un diferencial de superficie del sólido en forma de tetraedro elemental, constituido por el plano tangente a la superficie y los tres planos coordenados; de esta manera se obtienen las siguientes relaciones:

$$\sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \chi = P_x$$

$$\tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{zy} \chi = P_y$$

$$\tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \chi = P_z$$

donde P es la fuerza de superficie y  $\alpha, \beta, \chi$ , los cosenos directores de la normal al plano tangente a la superficie del sólido.

### 3.1.1.2.2.- Ecuaciones de compatibilidad

#### □ Concepto de deformación

Se conoce como deformación, en términos genéricos, al acercamiento o separación de las partículas del sólido, debido a los desplazamientos causados por las cargas aplicadas a este.

Se definen dos tipos de deformaciones, una deformación longitudinal, que será el acortamiento o alargamiento unitario que experimenta el sólido y una deformación tangencial, que es la semivariación del ángulo entre dos segmentos al producirse la deformación de este.

Al igual que en el caso de las tensiones, las deformaciones tienen carácter tensorial, quedando definida por:

$$[D] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \epsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Donde  $\epsilon$  es la deformación longitudinal y  $\gamma$  la deformación tangencial.

#### □ Ecuaciones de compatibilidad

Las ecuaciones de compatibilidad representan relaciones entre los movimientos y las deformaciones del sólido y están definidas por las siguientes expresiones:

$$\partial^2 \epsilon_x / \partial Y^2 + \partial^2 \epsilon_y / \partial X^2 = \partial^2 \gamma_{xy} / \partial X \partial Y$$

$$\partial^2 \epsilon_y / \partial Z^2 + \partial^2 \epsilon_z / \partial Y^2 = \partial^2 \gamma_{yz} / \partial Y \partial Z$$

$$\partial^2 \epsilon_z / \partial X^2 + \partial^2 \epsilon_x / \partial Z^2 = \partial^2 \gamma_{zx} / \partial Y \partial Z$$

$$2\partial^2 \epsilon_x / \partial Y \partial Z = \partial(-\partial \gamma_{yz} / \partial X + \partial \gamma_{xz} / \partial Y + \partial \gamma_{xy} / \partial Z) / \partial X$$

$$2\partial^2 \varepsilon_Y / \partial X \partial Z = \partial(\partial \gamma_{YZ} / \partial X - \partial \gamma_{XZ} / \partial Y + \partial \gamma_{XY} / \partial Z) / \partial X$$

$$2\partial^2 \varepsilon_Z / \partial X \partial Y = \partial(\partial \gamma_{YZ} / \partial X + \partial \gamma_{XZ} / \partial Y - \partial \gamma_{XY} / \partial Z) / \partial X$$

### 3.1.1.2.3.- Ecuaciones constitutivas o mixtas

Las ecuaciones enunciadas anteriormente, son obtenidas mediante un desarrollo matemático – físico, pero las ecuaciones mixtas, que relacionan deformaciones con tensiones, se obtienen a través de métodos experimentales, por lo cual sólo dependen de las características del material.

Estas relaciones pueden expresar deformaciones en función de tensiones (Ley de Hooke generalizada) o tensiones en función de deformaciones (Ecuaciones de Lamé).

#### □ Ley de Hooke

$$\{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\}$$

$$\varepsilon_X = 1 / E [\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Y = 1 / E [\sigma_Y - \nu(\sigma_X + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_Z = 1 / E [\sigma_Z - \nu(\sigma_X + \sigma_Y)]$$

$$\gamma_{XY} = \tau_{XY} / G$$

$$\gamma_{XZ} = \tau_{XZ} / G$$

$$\gamma_{YZ} = \tau_{YZ} / G$$

#### □ Ecuaciones de Lamé

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$$\sigma_X = \lambda e + 2 G \varepsilon_X$$

$$\sigma_Y = \lambda e + 2 G \varepsilon_Y$$

$$\sigma_Z = \lambda e + 2 G \varepsilon_Z$$

$$\tau_{XY} = G \gamma_{XY}$$

$$\tau_{XZ} = G \gamma_{XZ}$$

$$\tau_{YZ} = G \gamma_{YZ}$$

donde  $[C]$  es la matriz de elasticidad y  $[D]$  es la matriz de rigidez, definidas por:

$$[C] = 1/E \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$[D] = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

Donde  $A = (1 - 2\nu) / 2$

Las constantes del material están definidas por:

- ♦  $E$  = módulo de elasticidad longitudinal (módulo de Young)
- ♦  $\nu = |\epsilon_{\text{transversal}}| / |\epsilon_{\text{longitudinal}}|$  coeficiente de Poisson
- ♦  $G = E / 2(1 + \nu)$  módulo de elasticidad transversal (módulo de rigidez)
- ♦  $\lambda = E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$  coeficiente de Lamé

Una vez planteadas las ecuaciones de elasticidad, el problema se reduce a obtener los valores de las fuerzas y movimientos en todos los puntos interiores y del contorno del sólido. Existen dos métodos de abordar el problema, uno es eligiendo los movimientos como incógnitas básicas (método de la rigidez) y otro que plantea como incógnitas a las tensiones (método de las fuerzas). Para obtener estos resultados, existen dos planteamientos del problema, uno local, que se aplica a nivel de punto

interior o de contorno y que da como resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales con sus condiciones de borde, planteamiento que es utilizado en el análisis matricial y uno global, a través de expresiones energéticas, utilizado en el método de los elementos finitos, ambas situaciones darán resultados similares y existen numerosos sistemas para su resolución.

### **3.1.2.- El método de los elementos finitos**

La necesidad de obtener respuestas fiables y rápidas a los diferentes problemas que se presentan en ingeniería, a llevado al método de los elementos finitos (MEF), a ser una de las herramientas más utilizadas en la solución de éstos, destacando el área de cálculo de estructuras, en donde su aplicación ha planteado soluciones óptimas a problemas complejos de abordar mediante otras técnicas.

#### **3.1.2.1.- Planteamiento general del método**

El método consiste en discretizar el continuo mediante elementos llamados elementos finitos, que están enlazados entre si a través de nodos ubicados en el contorno de éstos. En cada elemento se asume una función de aproximación que definirá el comportamiento de la variable que se esté estudiando, en el caso de las estructuras serán los desplazamientos, en función de los valores que adquiera esta variable en los nodos, es decir los de los desplazamientos nodales. Una vez obtenidos estos valores se plantean las ecuaciones de compatibilidad de todos los elementos y se resuelven utilizando métodos matriciales. La primera impresión es que el método no varía de lo que se conoce como “análisis matricial de estructuras”, pero como se verá más adelante, la diferencia fundamental está en la obtención de la matriz de rigidez, además de no estar limitado al análisis de estructuras discretas.

El método de los elementos finitos puede plantearse en una serie de etapas, las que se pueden ordenar de la siguiente forma:

- ◆ Modelo matemático
- ◆ Discretización del dominio
- ◆ Funciones de aproximación
- ◆ Ecuaciones de compatibilidad
- ◆ Matriz de rigidez
- ◆ Condiciones de contorno
- ◆ Obtención de desplazamientos y tensiones
- ◆ Presentación de los resultados

Se detallan a continuación cada una de las etapas señaladas:

♦ Modelo matemático

Se debe seleccionar un modelo matemático que describa el comportamiento de la estructura, como por ejemplo la teoría de elasticidad.

En casos muy contados es posible obtener una solución analítica del problema, por lo que es común utilizar técnicas numéricas, con lo que se obtiene una solución aproximada involucrándose por lo tanto, la experiencia de quien realiza los cálculos.

♦ Discretización del dominio

La idea básica de “discretizar” es dividir el continuo en una serie de elementos, cuyos tamaños y orden estarán previamente establecidos, con el objeto de reducir de infinitas a finitas las incógnitas a resolver y que representarán, en este caso, el comportamiento de la estructura. Los elementos en los que se divide el continuo se denominan elementos finitos y están conectados entre si por nodos ubicados generalmente en la frontera de cada uno de ellos, el conjunto de elementos finitos y nodos nos da por resultado una malla, la que representará lo más fielmente posible la geometría del continuo.

En la discretización del continuo se pueden diferenciar dos aspectos importantes, el primero es la tipología del elemento y el segundo la densidad de la malla a utilizar, de estos dos aspectos depende en gran medida la precisión del resultado que se obtenga.

□ Elección del elemento

La tipología del elemento a utilizar dependerá principalmente del problema que se quiera resolver, por lo que es recomendable tener un conocimiento a priori del comportamiento de la estructura y de la respuesta que ofrece cada elemento, esto basado principalmente en la función de aproximación asociada a este y su geometría.

Una clasificación general de los elementos y en función principalmente de su geometría, se puede realizar como se detalla a continuación:

- Elementos monodimensionales: constituidos por barras y vigas, utilizados en diversos tipos de problemas, siendo de gran utilidad en aquellos que se requiera “rigidizar” paneles mediante refuerzos.

- Elementos bidimensionales: constituidos por elementos triangulares (lineales o cuadráticos), rectangulares (lineales, lagrangianos o serendípitos) y cuadriláteros (resultantes de la eliminación del nodo central de la unión de cuatro elementos triangulares).
- Elementos tridimensionales: resultan de la generación de los elementos bidimensionales, pudiendo diferenciarse los axisimétricos, paralelepípedos y hexaedros.

En la actualidad existe una amplia gama de elementos, dependiendo de la herramienta informática que se use, siendo necesario resaltar que para cada problema se deberá utilizar el elemento adecuado introduciendo las variables nodales correspondientes.

Los elementos detallados anteriormente pueden distorsionar su geometría permitiendo una mejor aproximación a la geometría del modelo en estudio, estos se conocen como elementos isoparamétricos y son generados por medio de transformaciones bilineales, teniendo la particularidad que un elemento generatriz bidimensional, no sólo dará como resultado un elemento isoparamétrico bidimensional si no que puede generar uno tridimensional. La utilización de elementos isoparamétricos, soluciona en gran medida el problema de representación geométrica de problemas complejos, especialmente aquellos que poseen zonas con curvaturas pronunciadas y en las que sería necesario un gran número de elementos para representar fielmente su geometría. Existen además los elementos isoparamétricos degenerados, producto del desplazamiento de uno de los nodos de un elemento isoparamétrico triangular o rectangular, utilizando comúnmente en el estudio de fenómenos de mecánica de fractura.

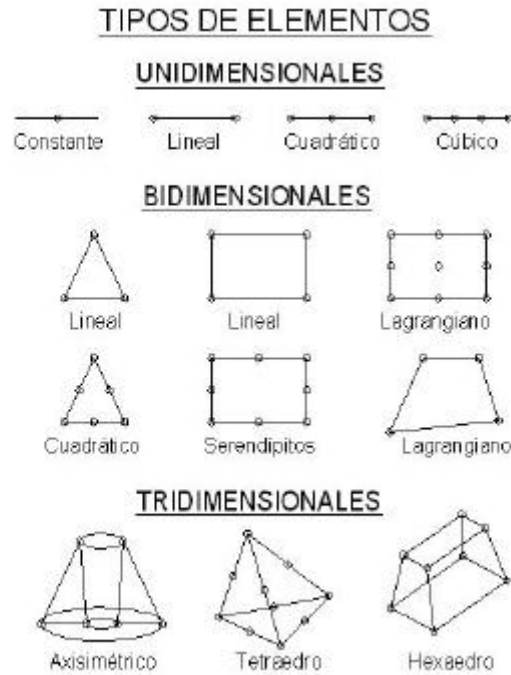


Fig.3.3

#### □ Generación de la malla

El conjunto de elementos finitos, conectados entre si a través de sus nodos, se denomina malla, siendo de gran importancia el orden en el que se distribuyan los elementos y la densidad de ésta.

El orden de los elementos en la malla tiene directa relación con el tiempo que utilice el ordenador para resolver el problema, ya que, una vez obtenidas las matrices de rigidez de los elementos, el orden en el que estén dispuestos en el modelo, definirán el ancho de banda de la matriz global, por consiguiente, un estudio preliminar de la distribución de los elementos en el modelo asegurará un menor esfuerzo informático.

Los programas modernos en los que se utiliza automallado, se realiza en forma automática una optimización de la distribución de los elementos, mejorando el rendimiento del ordenador.

La densidad de malla o tamaño de los elementos tendrá directa relación con el grado de precisión que se requiera, ya que mientras más fina sea la malla, es decir, mientras más pequeños sean los elementos que se utilicen, mayor será el grado de precisión que se obtendrá, como generalmente, un refinamiento de la malla involucra un mayor esfuerzo informático, la técnica utilizada es de refinar en forma progresiva y sólo en las zonas de interés, poniendo cuidado en algunos aspectos como el que la malla inicial esté contenida en la malla que resulte de disminuir el tamaño de los



elementos y que el tamaño de una de las dimensiones del elemento utilizado no sea mucho mayor o menor que las otras.

En numerosos casos la generación de la malla de un modelo implica el utilizar un gran número de elementos, por lo que se debe considerar la posibilidad de aplicar condiciones de simetría, lo que traerá como resultado un ahorro del esfuerzo informático o una mayor exactitud de resultados.

#### ◆ Funciones de aproximación

Las funciones de aproximación o funciones de interpolación, nos permiten aproximar los valores de la variable en estudio (desplazamientos) dentro del elemento a valores en los nodos, para ellos existen dos maneras, una a través de funciones de forma y otra utilizando series polinómicas, siendo estas últimas las más utilizadas por su sencillez de manejo y por que bastará con aumentar el grado del polinomio para aumentar el grado de precisión.

#### □ Series polinómicas

Este método define la función de desplazamientos dentro del elemento mediante un polinomio completo  $M(x,y,z)$ , de grado  $n$  igual al número de grados de libertad de los nodos del elemento, es decir:

$$\Phi(x,y,z) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 z^2 + a_8 xy + a_9 yz + a_{10} xz + \dots + a_m z^n \quad (3.1)$$

que expresado en forma matricial será:

$$\Phi(x,y,z) = M^T A$$

$$M^T = \{1x \ y \ z \ x^2 \ y^2 \ z^2 \ xy \ yz \ zx \dots z^n\}$$

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} \right\}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot (n + 2 - i) \quad (3.2)$$

Donde  $m$  es el número de términos del polinomio.

En un elemento, con un número de términos igual a  $m$ , la función de interpolación en función de los valores nodales queda:

$$\Phi_n = [M_n]A$$

$$\Phi_n = \left\{ \begin{matrix} \Phi(\text{nodo1}) \\ \Phi(\text{nodo2}) \\ \vdots \\ \Phi(\text{nodo } m) \end{matrix} \right\}$$

$$M_n = \begin{bmatrix} M^T(\text{nodo1}) \\ M^T(\text{nodo2}) \\ \vdots \\ M^T(\text{nodo } m) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Si despejamos la matriz  $A$ , obtenemos el valor de los coeficientes del polinomio de interpolación en función de los valores nodales.

$$A = [M_n]^{-1} \times \Phi_n \quad (3.4)$$

$[M_n]$  es matriz cuadrada  $m \times m$ , no singular y característica para cada elemento.

$$\Phi = M^T A = M^T [M_n]^{-1} \times \Phi_n = N \Phi_n \quad (3.5)$$

donde  $N$  es la matriz de forma del elemento.

Este procedimiento de aproximación es muy utilizado, pero presenta algunas desventajas como por ejemplo la necesidad de obtención de la matriz inversa.

#### □ Funciones de forma

Las funciones de forma pueden obtenerse mediante polinomios de interpolación como los desarrollados por Lagrange y Hermite, cumpliendo con definir unívocamente el campo de desplazamientos en el interior del elemento en función de los desplazamientos nodales.

$$\Phi(x,y,z) = [N_i(x,y,z)] \times \{\Phi_n\} = [N] \times \{\Phi_n\} \quad (3.6)$$

donde:

$\Phi(x,y,z)$ : es el campo de desplazamientos en el interior del elemento

$[N]$ : matriz de funciones de forma

$N_i(x,y,z)$ : función de forma asociada a los nodos de cada elemento

$\{\Phi_n\}$ : vector de desplazamientos nodales

Con el objeto de asegurar que la solución que se obtiene mediante la función de aproximación elegida, converja a la solución, debe cumplir con la condición de conformidad, que se refiere a la continuidad de resultados entre elementos, siendo necesario que la función adquiriera el valor cero en todos los nodos menos en el nodo que se esté considerando, en donde adquiere el valor de la unidad, además debe cumplir con la condición de complitud, es decir, asegurar la continuidad de la función dentro del elemento, cumpliendo con las ecuaciones que plantea el modelo matemático. Lo anterior implica que la función debe ser diferenciable hasta el grado más alto de las derivadas que aparezcan en la formulación de la energía potencial del sistema, esto se cumple cuando la suma de las funciones de aproximación asociadas a los nodos, en cualquier punto del elemento, es igual a la unidad.

Estas dos condiciones pueden resumirse como:

$$N_i(x,y,z) = 0 \quad \text{en cualquier nodo } i \neq j$$

$$N_i(x,y,z) = 1 \quad \text{en el nodo } i = j$$

$$\sum_{i=1}^n N_i(x,y,z) = 1$$

Entre los criterios para seleccionar el elemento a utilizar en el modelo, además de lo descrito en lo referido a “discretización del dominio”, es de relevante importancia el considerar el tipo de función de forma que está asociada al elemento, así por ejemplo, habrán elementos Lagrangianos que utilizan polinomios de Lagrange para generar la función de forma; Hermíticos, en donde se utilizan polinomios de Hermite y que son de especial interés cuando se quiere conocer los valores de la función y de su derivada; Serendípitos, en que el interés es que los nodos se encuentren en el contorno del elemento y cuya función de forma se obtiene multiplicando los términos de grado “n” del polinomio elegido en una variable por términos lineales en la otra, con lo cual se obtiene un resultado similar a los polinomios de Lagrange en los contornos.

♦ Ecuaciones de compatibilidad

De la teoría de elasticidad, y aplicando las ecuaciones de Lamé,  
Se tiene que:

$$\sigma = [D] \varepsilon \quad (3.7)$$

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx}\}$$

$$\sigma^T = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx}\}$$

$$[D] = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = (1 - 2\nu) / 2$$

$\lambda$  = coeficiente de Lamé

E = módulo de Young

$\nu$  = coeficiente de Poisson

En el caso de tensión plana tenemos que:

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_{xy}\}$$

$$\sigma^T = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}\}$$

$$[D] = E/(1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

El vector de deformaciones unitarias puede expresarse en función de los desplazamientos nodales de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{matrix} \right\} = [L] \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{matrix} \right\} \quad (3.9)$$

si [L] es el operador:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

y si los desplazamientos están definidos por:

$$\Phi = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

la deformación puede expresarse como:

$$\varepsilon = [L] \cdot \Phi \quad (3.12)$$

sustituyendo (3.5) en (3.12) resulta:

$$\varepsilon = [L] \cdot [N] \cdot \Phi_n \quad (3.13)$$

llamando  $[B]$  en  $[L] \cdot [N]$  obtenemos la expresión:

$$\varepsilon = [B] \cdot \Phi_n \quad (3.14)$$

con lo que se consigue expresar las deformaciones en función de los valores nodales, análogamente, sustituyendo en (3.6) se obtendrán los valores de las tensiones en función de los valores nodales:

$$\sigma = [D] [B] \cdot \Phi_n \quad (3.15)$$

#### ♦ Matriz de rigidez elemental

La matriz de rigidez, que relaciona las cargas nodales equivalentes con los desplazamientos nodales sufridos por el elemento, se puede obtener mediante métodos energéticos, siendo a través del principio de los desplazamientos virtuales o de la energía potencial mínima.

Utilizando el principio de energía potencial mínima, el procedimiento será el siguiente:

$$\Gamma_e = \int \int \int_V \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \cdot \{\varepsilon\} \cdot dV \quad (3.16)$$

donde:

$\{\varepsilon\}$  : vector de deformaciones

$[D]$  : matriz elástica

El trabajo de las cargas exteriores queda:

$$W_e = \int \int \int_V \{\Phi_e(x,y,z)\}^T \cdot \{f\} \cdot dV \quad (3.17)$$

donde:

$\{\Phi_e(x,y,z)\}$  : campo de desplazamientos

$\{f\}$  : vector de cargas exteriores

la energía potencial total del elemento será:

$$\Pi_e = \Gamma_e - W_e \quad (3.18)$$

la energía total del sistema será:

$$\Pi = \sum \Pi_e$$

$$\Pi = 1/2 \cdot \Phi_n^T \cdot \left[ \sum \int \int \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \right] \cdot \Phi_n - \Phi_n^T \sum \int \int \int_V \{\Phi_e(x,y,z)\}^T \cdot \{f\} dV \quad (3.19)$$

derivando e igualando a cero (3.19), para obtener la energía potencial mínima, se obtiene la matriz de rigidez elemental:

$$\begin{aligned} \partial \Pi = \partial \Phi_n &= 0 \\ [K_e] &= \sum \int \int \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \end{aligned} \quad (3.20)$$

la integración se extiende dentro del subdominio constituido por los límites del elemento y se resuelve mediante métodos de integración numérica, los coeficientes de la matriz obtenida depende de la geometría y del material del elemento seleccionado.

La matriz de rigidez de la estructura (matriz de rigidez global) de orden MxM, se obtiene mediante el ensamblaje de las matrices elementales, es decir, partiendo de la matriz de rigidez del elemento de orden mxm ampliándola con ceros en los lugares correspondientes a los grados de libertad de los nodos que no pertenecen al elemento, hasta completar el orden MxM, la matriz de rigidez será:

$$[K] = \sum [K_e] \quad (3.21)$$

de esta forma queda:

$$\{f\} = [K] \{\Phi_n\} \quad (3.22)$$

donde:

$\{f\}$ : vector de cargas nodales equivalente

$[K]$ : matriz de rigidez global

el vector de cargas equivalentes aplicadas en los nodos del elemento, queda definido por:

$$\{f_n\} = \{f_v\} + \{f_s\}$$

$$\{f_n\} = \int \int \int_V [N]^T \cdot \{f_v\} \cdot dV + \int \int \int_V [N]^T \cdot \{f_s\} \cdot dS + \sum \{P_i\} d_i \quad (3.23)$$

donde:

$\{f_v\}$ : fuerzas de volumen

$\{f_s\}$ : fuerzas de superficies

$\{P_i\}$ : fuerzas puntuales

el vector de cargas totales de la estructura queda definida por:

$$\{f\} = \sum \{f_n\} \quad (3.24)$$

#### ♦ Condiciones de contorno

Con el objeto de resolver las ecuaciones, que llevan por incógnitas los desplazamientos, se restringen los grados de libertad o desplazamientos en determinadas direcciones de un conjunto de nodos, con lo cual la ecuación (3.22), puede escribirse como:

donde:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{1r}] \\ [K_{r1}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_r \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$\Phi_1$ : vector grados de libertad no restringidos

$\Phi_r$ : vector grados de libertad restringidos

$f_1$ : vector de carga sobre los grados de libertad no restringidos

$f_r$ : vector de carga sobre los grados de libertad restringidos

como el valor de los desplazamientos en los nodos restringidos es nulo,



$$[K_{11}] \cdot \Phi_1 = f_1 \quad (3.26)$$

$$[K_{r1}] \cdot \Phi_1 = f_r$$

se pueden obtener los valores de los desplazamientos en las direcciones no restringidas y las reacciones en las restricciones.

♦ Obtención de los desplazamientos y tensiones

Una vez obtenidos los valores de los desplazamientos nodales, como se indica en las ecuaciones (3.26), las tensiones se obtienen aplicando la expresión (3.15). Estas ecuaciones pueden resolverse por diferentes métodos numéricos, presentando amplias posibilidades de ser implementados en ordenador.

♦ Presentación de resultados

Existen diferentes formas de presentación de resultados, dependiendo del sistema informático que se utilice, pero en general se obtendrán resultados mediante listados, en donde se detallan los valores de desplazamientos, tensiones, etc. en los nodos y mediante representaciones gráficas de la pieza estructural que se esté estudiando, en donde se presentan en base a código de colores y animaciones, las diferentes variables en estudio.

### 3.2.- ELEMENTOS FINITOS PARA COMPUESTOS

Dos tipos de elementos finitos son estudiados para materiales compuestos. En el primer caso, se considera un tipo de lámina delgada y se adoptan las suposiciones de Kirchhoff para planchas, y en el segundo, la lámina es gruesa y se emplean las suposiciones de Reissner-Mindlin.

Se presta una especial atención a la orientación del elemento en el sistema global X – Y – Z, contrario a los materiales isotrópicos donde además de este sistema global, a cada elemento se le asocia con un sistema de coordenadas locales  $\xi - \eta - \zeta$ , en materiales compuestos se definen sistemas coordenados adicionales para cada capa. Por ejemplo, cada capa se caracteriza por su sistema material, el cual es un sistema local que define la orientación de las fibras en el sistema de elementos.

A continuación, se presenta un procedimiento paso a paso para desarrollar la ecuación de rigidez de un elemento compuesto, para elementos isoparamétricos rectangulares. Solo los pasos que requieran cierta clarificación serán discutidos.

### 3.2.1.- Elementos rectangulares para compuestos delgados

La matriz de rigidez para un elemento compuesto isoparamétrico rectangular delgado (figura 3.4), es desarrollada con la ayuda del método de energía potencial total. El elemento está sujeto a cargas transversales y dentro del plano. En los pasos que se presentan a continuación se mostrarán las relaciones algebraicas básicas del método.

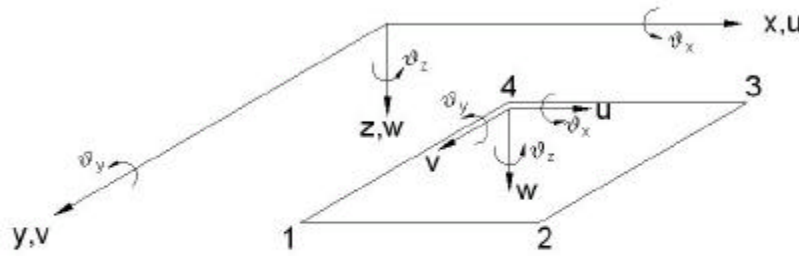


Figura 3.4

#### ♦ Paso 1: Definir el tipo de elemento y sistema coordenado

Seleccionaremos un elemento rectangular de 4 nodos, el cual posee 24 grados de libertad en total, con 6 en cada nodo. La numeración de los nodos y los desplazamientos como también el sistema coordenado se muestra en la figura 3.4.

#### ♦ Paso 2: Seleccionar las funciones de forma

Los desplazamientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , en elemento están expresados en términos de los desplazamientos nodales, esto es  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$  y las funciones de forma  $N_i$ , mediante:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.28)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.28)$$

Debe notarse que las rotaciones  $\theta_x$  y  $\theta_y$ , no son tratadas como variables independientes sino como funciones de la deflexión transversal  $w$ . Siguiendo la

numeración de los nodos en sentido antihorario, mostrados en la figura 3.4, las coordenadas de los nodos son: (-1,-1), (1,-1), (1, 1) y (-1, 1), respectivamente.

♦ **Paso 3: Determinar las relaciones deformación – desplazamiento**

Para un elemento delgado sometido a cargas transversales y dentro del plano, los esfuerzos y deformaciones que producen trabajo son  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$ , para el estado de esfuerzo en el plano deformación, y  $K_x$ ,  $K_y$  y  $K_{xy}$  para flexión.

Las relaciones de esfuerzo – deformación están dadas por:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & k_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & k_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & k_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (3.29)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.26) en las ecuaciones (3.28), podemos expresar las tensiones y curvaturas con respecto a los desplazamientos nodales.

♦ **Paso 4: Definir la relación esfuerzo – deformación**

Se utiliza la relación esfuerzo – deformación (3.30) que relaciona esfuerzos y momentos resultantes con deformaciones y curvaturas. Notar que la integración sobre el espesor de la lámina ha sido ya realizado en la derivación de esta misma ecuación.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}\quad (3.30)$$

**Paso 5: Formular la matriz de rigidez del elemento**

La matriz de rigidez del elemento está dada por:

$$[k]_e = \iint [B]^T [C] [B] dx dy \quad (3.31)$$

Donde la integración es realizada sobre el área del elemento en el sistema  $\xi - \eta$ .

♦ **Paso 6: Calcular las fuerzas nodales equivalentes**

Las fuerzas nodales equivalentes para el elemento compuesto, sometido a la carga aplicada transversalmente  $p_z$  puede ser determinado usando el potencial de carga  $\Omega$ . Igualmente, la carga en el plano debido a fuerzas de tracción pueden ser sustituidas por fuerzas nodales equivalentes. La superposición de las fuerzas nodales equivalentes da el vector de fuerza  $\{f\}_e$  para el elemento compuesto. La relación fuerza - desplazamiento para el elemento puede ser expresado de la forma:

$$\{f\}_e = [K]_e \cdot \{u\}_e \quad (3.32)$$

**3.2.2.- Elemento rectangular para compuestos gruesos**

Para elementos placa delgados, las deformaciones de corte  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  han sido despreciadas, como se justificó por las suposiciones de la teoría de flexión para pequeña deflexión. Sin embargo, para placas compuestas gruesas y los correspondientes elementos placa gruesos los efectos de corte transversal no pueden ser despreciados y se requiere la aplicación de la teoría de deformación de corte de Mindlin para flexión de placas. Las deformaciones de corte fuera del plano  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son incluidos en el vector deformación, ver las ecuaciones (3.33). Las rotaciones  $\theta_x$  y  $\theta_y$  no son iguales a las primeras derivadas de flexión.

La derivación de la matriz de rigidez del elemento placa – grueso requiere exactamente el mismo procedimiento del presentado para elemento rectangular placa – delgado. La única diferencia se halla en las relaciones de deformación – desplazamiento, donde las deformaciones  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  además de los resultados de esfuerzos asociados  $N_{xz}$  y  $N_{yz}$  son incluidos en el análisis. De acuerdo a la teoría de placas de Mindlin, las relaciones de esfuerzo – desplazamiento están dadas por:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Los desplazamientos y rotaciones son expresados en términos de los grados de libertad nodal y funciones de forma como las dadas por:

$$\begin{aligned}
 u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\
 v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\
 w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \\
 \theta_x &= N_1 \theta_{1x} + N_2 \theta_{2x} + N_3 \theta_{3x} + N_4 \theta_{4x} \\
 \theta_y &= N_1 \theta_{1y} + N_2 \theta_{2y} + N_3 \theta_{3y} + N_4 \theta_{4y}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Donde las funciones de forma  $N_i$  están dadas por la ecuación (3.28). La relación esfuerzo – desplazamiento (3.30), con la inclusión de los esfuerzos de corte transversales queda:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ N_{yz} \\ N_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & A_{44} & A_{45} \\ & & & & & & & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

simétrico

Donde las componentes de la rigidez de corte transversal  $A_{44}$ ,  $A_{55}$  y  $A_{45}$  están dadas por:

$$A_{44} = \sum_{k=1}^r Q_{44}^k t_k \tag{3.36a}$$

$$A_{55} = \sum_{k=1}^r Q_{55}^k t_k \tag{3.36b}$$

$$A_{45} = \sum_{k=1}^r Q_{45}^k t_k \tag{3.36c}$$

Finalmente, los términos la rigidez de corte transversal  $Q_{44}$ ,  $Q_{55}$  y  $Q_{45}$  para cada capa de la lámina son calculados de:

$$\begin{aligned}
 Q_{44} &= G_{23} \\
 Q_{55} &= G_{13} \\
 Q_{45} &= \nu_{45} G_{13} = \nu_{54} G_{23}
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

Para materiales isotrópicos, la relación (3.37) es simplificada, ya que  $Q_{44} = G$ ,  $Q_{55} = G$ ,  $Q_{45} = 0$ .

### 3.3.- CONSIDERACIONES EN LA MODELACIÓN DE LAS VIGAS Y PANELES SÁNDWICH

Los resultados obtenidos con un análisis de elementos finitos, no son estrictamente “exactos”. Sin embargo, se puede obtener una correcta solución, si se utiliza un adecuado modelo de elementos finitos.

Se utiliza aquí una combinación de elementos placa, para modelar las pieles del sándwich, y elementos “brick” para el núcleo. Usando una cantidad y dimensiones de elementos lo más adecuadas posibles, para obtener un adecuado nivel de exactitud y para cumplir con las condiciones que impone cada elemento.

#### 3.3.1.- Modelación de vigas y paneles sándwich

El programa que se utiliza para esta tesis, es Algor 12, el que permite realizar varios tipos de análisis y tiene una gran variedad de elementos. Al comenzar se le asigna un nombre al modelo, inmediatamente después se elige un sistema de unidades. Cuando se comienza un nuevo modelo se recomienda que se verifique el sistema de unidades, para adaptarlo al modelo en el que se está trabajando.

En el caso de las vigas sándwich, como el núcleo y las pieles, son de elementos y materiales diferentes, se modelan también en grupos distintos. En el núcleo de los ejemplos se utilizan los tipos de espuma de PVC, cuyas propiedades se muestran en una tabla en el anexo1, mientras que las pieles, en la mayoría de los ejemplos son de aluminio y se incluye un caso donde están constituidas por láminas con distintas propiedades.

Se modela primero el núcleo, en un grupo, formando elementos brick de 8 nodos, buscando siempre que los lados del elemento sean de dimensiones lo más semejantes posibles. Luego se aprovecha esto para crear las pieles, que se modelan con elementos placa, de esta manera los nodos del núcleo coinciden con los de estas, las que se ubican en un grupo distinto al que se ha utilizado para el núcleo, ya que son de materiales diferentes. Luego se aplican las condiciones de borde para cada viga.

En el caso de los paneles sándwich, se modela creando un rectángulo con las dimensiones de este, el que luego se malla adecuadamente para generar los elementos placa compuesto, dentro de un grupo para luego ingresar las propiedades de los materiales de cada capa, y posteriormente aplicar las condiciones de borde y las cargas.

### 3.3.1.1.- Elementos placa y cáscara

El uso de estructura placa y cáscara es amplio. Incluye estructuras arquitectónicas, contenedores, aeroplanos, buques, misiles y partes de máquinas. Las placas son planas, estructuras de superficie plana con espesor que es muy pequeño comparado con sus otras dimensiones.

En la modelación de una placa en elemento finito, lo que modelamos es la superficie media que está en un plano paralelo a las dos superficies de la placa y que divide al espesor en dos mitades iguales.

La modelación de estructura placa se hace usualmente con cualquiera de los dos elementos placa triangular o cuadrilátero. Cada punto nodal de cada tipo de elemento posee cinco grados de libertad en el elemento o sistema local  $xyz$ : tres desplazamientos a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y dos rotaciones respecto de los ejes  $x$  e  $y$ . No se especifica grado de libertad rotacional respecto de la dirección  $z$  normal al elemento placa, ver fig. 3.5. Sin embargo, un valor muy pequeño para la rigidez torsional se asume respecto del eje local  $z$  para eliminar la inestabilidad numérica. Será señalado que los elementos placa y cascara usados en los programas de elementos finitos combinan acciones de flexión y membrana.

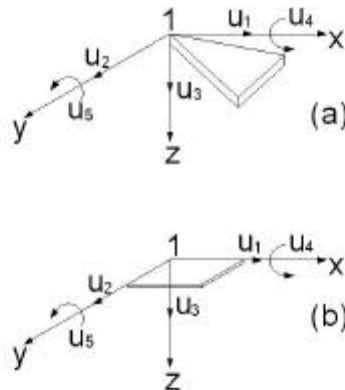


Figura 3.5. Elementos placa y grado de libertad en nodo 1; (a) Triangular; (b) Cuadrilátero.

Los elementos cuadriláteros muestran mayor exactitud que los elementos triangulares, y por consiguiente serán preferidos. El uso de elementos triangulares estará limitado a la parte de la estructura que esta cerca de límites irregulares.

Las cascaras delgadas pueden ser vistas como placas con una superficie curva. En realidad muchos programas de elementos finitos cuentan con un elemento placa para modelar cáscaras y estructuras de superficie curva. Como para las placas delgadas, la superficie media de la estructura cascara se modela con elementos placa.

Dos aspectos se tendrán en mente cuando se modelen cáscaras delgadas con elementos placa:

a) para una buena solución exacta, se recomienda que los elementos placa se aproximen a la superficie de la cáscara en ángulos de entre  $4^{\circ}$  y  $10^{\circ}$  grados, ver fig. 3.6.

b) la falta de un grado de libertad rotacional respecto del eje local z puede causar inestabilidad numérica. Tal caso puede aparecer cuando el elemento placa intersecta en un ángulo menor de  $4^{\circ}$ , ver fig. 3.7. La inestabilidad numérica no puede permitir el procesamiento del modelo y puede ser reportada por el procesador como un mensaje de error. Un remedio para este problema es usar elementos elásticos rotacional con una muy pequeña rigidez respecto al eje paralelo a los lados comunes de los elementos.



Figura 3.6. Modelación de cascaras delgadas con elementos placa.



Figura 3.7. Pequeña rigidez elasticidad rotacional para evitar inestabilidad numérica.



### 3.3.1.2.- Elemento sólido elástico tridimensional o bloque

Placas gruesas, componentes cilíndricos o esféricos gruesos son algunos ejemplos donde elementos sólidos pueden ser usados para realizar un análisis de elementos finitos. En general, las estructuras o componentes estructurales con un espesor comparable a las otras dos dimensiones puede ser modelada con elementos “brick”.

Los elementos sólidos son elementos tridimensionales con tres grados de libertad traslacional por nodo. Ellos pueden ser vistos como elementos membranales que pueden también considerar variaciones de esfuerzo en su espesor, ver fig. 3.8. Los nodos usualmente son introducidos en cualquiera de las intersecciones de los tres planos o a mitad de distancia de las intersecciones de dos planos paralelos. Un elemento Brick de ocho nodos con sus respectivos grados de libertad en un nodo se muestra en la fig. 3.8.

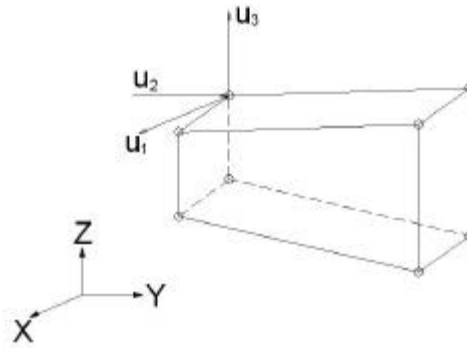


Figura 3.8. Elemento bloque y grado de libertad de un nodo.

La ventaja de usar elementos sólidos o “brick” en lugar de elementos placa o viga para modelar componentes con grandes espesores, es que los elementos sólidos pueden proporcionar información acerca de la variación tridimensional de esfuerzos y deformaciones dentro del elemento. Los elementos placa y viga no pueden proveer tal información y serán usados con precaución, solamente para análisis preliminares de sistemas que presenten dimensiones comparables en sus tres dimensiones.

Para usar múltiples tipos de elementos, materiales, áreas de sección transversal, espesor de elementos placa o áreas de elementos barra dentro del modelo, se necesita dividir este en diferentes grupos.

### 3.3.2.- Aplicando la información del grupo.

Datos del elemento tales como, espesor de elementos placa, son asociados con el grupo e ingresado directamente a través de la ventana “datos del elemento”.

Como se crea el modelo grupo a grupo, se puede ingresar los datos asociados con cada uno, en la ventana de “control de grupo del elemento”. En esta ventana, se siguen la secuencia de pasos que se definen a continuación:

- 1. Definir el tipo de análisis.** Se debe especificar el tipo de análisis antes de aplicar cualquier dato sobre el elemento. Algor permite realizar varios tipos de análisis.
- 2. Definir el tipo de elemento de cada grupo.** Los tipos de elementos necesarios se especifican antes que se aplique el tipo de material, datos del elemento y atributos de superficie. Algor adapta la lista de tipos de elementos disponibles de acuerdo al tipo de análisis que se ha elegido.
- 3. Aplicar un material para cada grupo de elemento.** Algor adapta la lista de materiales disponibles basado en el tipo de elemento. Eligiendo un material, este se puede aplicar o revisar y modificar las propiedades de aquel material. Si se modifican las propiedades del material, se tiene la opción de salvar este, bajo un nuevo nombre.
- 4. Aplicar los datos del elemento.** Datos tales como áreas de sección transversal, espesor del elemento placa y área del elemento barra son asociados con el grupo e ingresando directamente a través de la ventana de “datos del elemento”.

Una vez realizado todos estos pasos, se puede llevar a cabo el análisis, para luego entregar los resultados que serán analizados en el módulo de post - proceso de este programa.

## CAPITULO IV. CORRELACION ENTRE AMBOS METODOS

Aquí se realiza el cálculo de las vigas y paneles sándwich por los métodos de los elementos finitos y analítico, para luego comparar los resultados obtenidos. Para esto

### 4.1.- EJEMPLOS DE VIGAS

#### 4.1.1: Viga con carga concentrada y extremos simplemente apoyados.

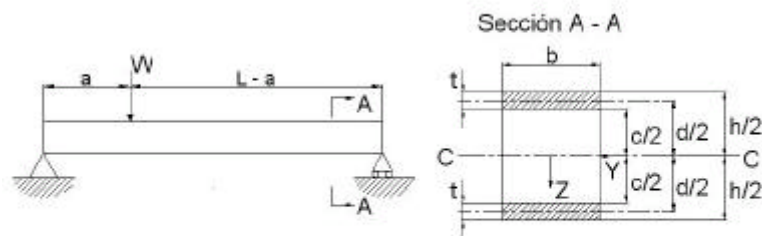


Fig.1.1.- Visualización del problema.

|                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| $L = 0,5 \text{ m}$   | $d = 0,052 \text{ m}$   |
| $b = 0,05 \text{ m}$  | $t_f = 0,002 \text{ m}$ |
| $h = 0,054 \text{ m}$ | $a = 0,25 \text{ m}$    |
| $c = 0,05 \text{ m}$  | $W = 1800 \text{ N}$    |

- Material del núcleo: espuma de PVC con las siguientes características:

$$E_c = 40 \text{ MPa}$$

$$G_c = 18 \text{ MPa}$$

$$\rho = 48 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0,32$$

- Material de las pieles: aluminio (6061 – T6), con las siguientes propiedades:

$$E_f = 68,258 \text{ GPa}$$

$$G_f = 25,51 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2703,8 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0,33$$

➤ **Solución por el M.E.F.:**

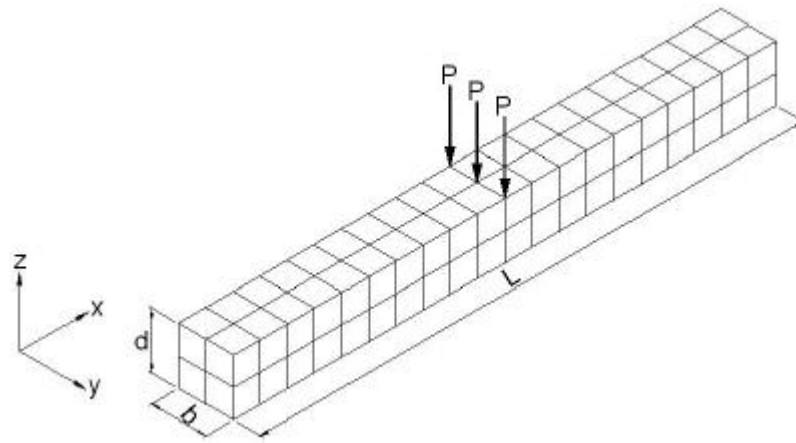


Fig. 1.2.- modelo de la viga para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} b &= 0,05 \text{ m} & P &= 600 \text{ N} \\ d &= 0,052 \text{ m} & t &= 0,002 \text{ m} \\ L &= 0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

El modelo consta de 80 elementos brick, para el núcleo, y 40 elementos placa, para cada una de las pieles. A la piel inferior se le aplican las condiciones de borde, que en este caso es simplemente apoyado para ambos extremos y a la piel superior se le aplica una carga puntual de 600 N en cada uno de los nodos de la sección central de la viga.

Tanto el núcleo, como las pieles, se modelan en grupos distintos, debido a que son de elementos y materiales diferentes. En este caso el núcleo está en grupo 1 (verde), la piel inferior el grupo 2 (rojo) y la piel superior en el grupo 3 (amarillo).

□ **Resultados.**

A continuación se muestra la forma que toma la viga cuando está bajo la acción de la carga central de 1800 N, los esfuerzos que se producen en las pieles y el esfuerzo de corte en el núcleo de esta viga.

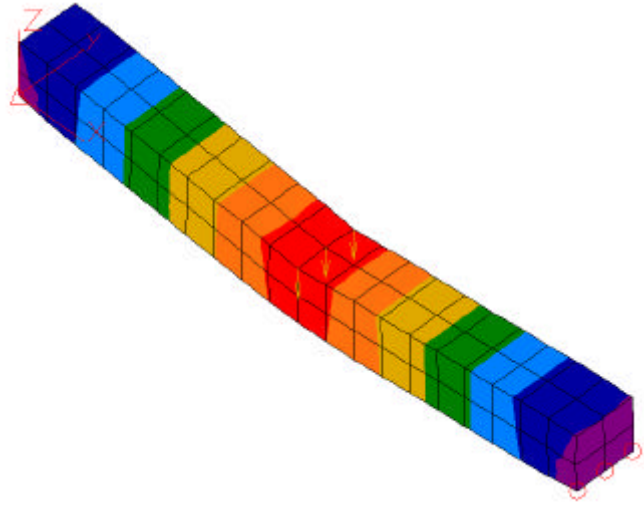


Fig. 1.3.- Viga deformada bajo la acción de una carga central de 1800 N.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por medio del método de los elementos finitos para esta viga.

| Resultado obtenido pro el M.E.F. |             |
|----------------------------------|-------------|
| Carga aplicada (N)               | Flecha (mm) |
| 1800                             | 5,8         |

➤ **Solución analítica:**

Encontrar la deflexión en  $L/2 = 0.25\text{m}$

- 1)  $b \leq c$  por lo tanto, la viga se considera estrecha
- 2) las caras son de igual espesor
- 3) se verifica la condición (2.12):

$$4 \frac{68,258 \cdot 10^9}{40 \cdot 10^6} \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,05} \frac{0,052}{0,05} = 284 > 100$$

Se satisface esta condición, lo que implica que  $E_c$  se considera pequeño.

4) rigidez de flexión:

se verifican las condiciones (2.3) y (2.4):

$$(2.3): \frac{0,052}{0,002} = 26 > 5,77$$

Esto implica que la condición (2.3) es satisfecha

$$(2.4): \frac{68,258 \cdot 10^9}{40 \cdot 10^6} \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,052^2}{0,05^3} = 73,83 > 16,7$$

Por lo tanto (2.4) es satisfecha.

Por consiguiente, se utiliza la expresión (2.6) para la rigidez de flexión D.

$$D = 68,258 \cdot 10^9 \frac{0,05 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,052^2}{2} = 9228,48 \text{ N m}^2$$

5) Rigidez de corte:

$$V = 0,05 \cdot 0,052 \cdot 18 \cdot 10^6 = 46,8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

6) deflexión:

La tabla elemental da:

$$W_1(L/2) = \frac{1800 \cdot 0,5^3}{48 \cdot 9228,48} = 0,0005 \text{ m}$$

$$W_2(L/2) = \frac{1800 \cdot 0,5}{2 \cdot 46,8 \cdot 10^3} = 0,0048 \text{ m}$$

Por lo tanto, la deflexión total es:

$$W = W_1 + W_2 = 0,0053 \text{ m}$$

➤ **Comparación de los resultados obtenidos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos para una viga sometida a una carga de 1800 N en el centro de esta.

| Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|-------------------------------------------------------|-------------|
| Método                                                | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                                | 5,8         |
| Analítica                                             | 5,3         |
| Diferencia                                            | 8,6%        |

#### 4.1.2: Viga con presión uniforme y extremos empotrados.

Encontrar la deflexión en  $L/2 = 0.25\text{m}$

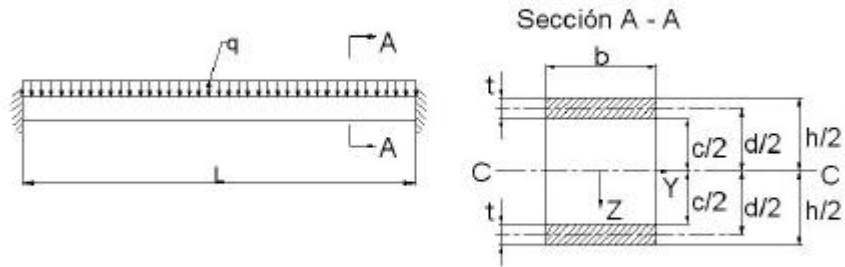


Fig.2.1.- Visualización del problema.

$L = 0,5 \text{ m}$        $d = 0,052 \text{ m}$   
 $b = 0.05 \text{ m}$        $t_f = 2 \text{ mm}$   
 $h = 0,054 \text{ m}$        $q = 10000 \text{ N/m}$   
 $c = 0,05 \text{ m}$

- Material del núcleo: espuma de PVC con las siguientes características:

$E_c = 40 \text{ MPa}$   
 $G_c = 18 \text{ MPa}$   
 $\rho = 48 \text{ Kg/m}^3$   
 $\nu = 0,32$

- Material de las pieles: aluminio (6061 – T6)

$E_f = 68,258 \text{ GPa}$   
 $G_f = 25,51 \text{ GPa}$   
 $\rho = 2703,8 \text{ Kg/m}^3$   
 $\nu = 0,33$

➤ **Solución por el método de los elementos finitos.**

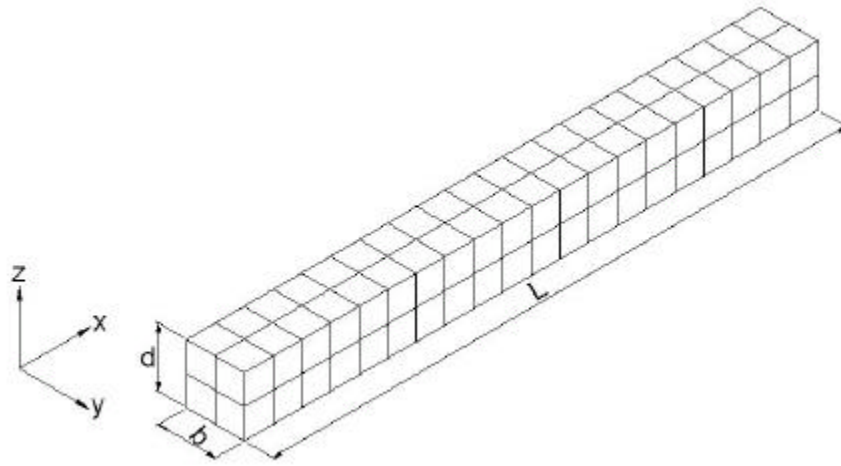


Fig. 2.2.- modelo de la viga para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} b &= 0,05 \text{ m} & P &= 200 \text{ KPa} \\ d &= 0,052 \text{ m} & t &= 0,002 \text{ m} \\ L &= 0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

Este modelo consta de la misma cantidad de elementos brick, para el núcleo, y elementos placa, para las pieles, que en el ejemplo 1. Como se dijo en el ejemplo anterior el núcleo y las pieles, se modelan en grupos distintos. El núcleo está en grupo 1 (verde), la piel inferior el grupo 2 (rojo) y la piel superior en el grupo 3 (amarillo), los que se utilizan para introducir las propiedades de los elementos y de los materiales.

La condición de borde, en este caso empotrado, se aplica en la sección entera de los extremos de la viga. Como la viga está sometida a una carga distribuida de  $q = 10000 \text{ N/m}$ , este valor se multiplica por el largo de la viga, para obtener la fuerza que actúa sobre esta y este valor se divide por el área de la piel superior y así se obtiene la presión de  $P = 200 \text{ Kpa}$ , que se utiliza para el análisis de elementos finitos.

□ **Resultados.**

Lo que se muestra a continuación es la forma que toma esta viga sometida a una presión uniforme de  $200 \text{ Kpa}$ .



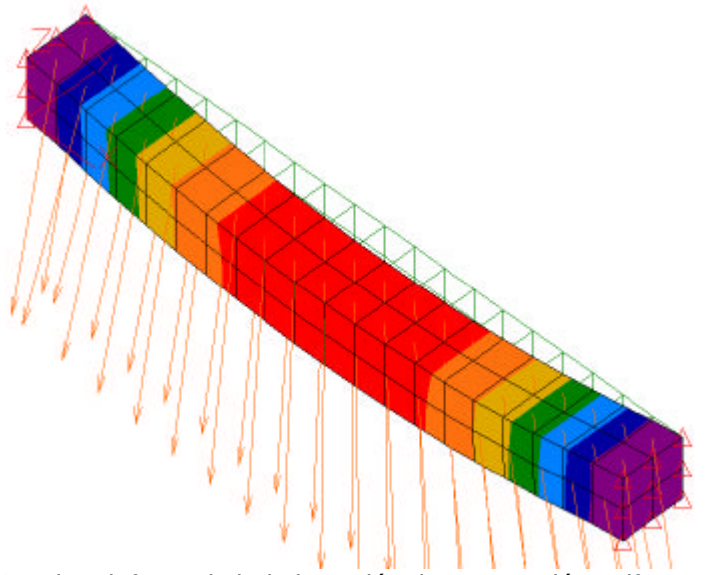


Fig. 2.3.- Viga deformada bajo la acción de una presión uniforme de 200 KPa.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por medio del método de los elementos finitos para esta viga.

| Resultado obtenido pro el M.E.F.   |             |
|------------------------------------|-------------|
| Carga aplicada (N/m <sup>2</sup> ) | Flecha (mm) |
| 200000                             | 6,47        |

➤ **Solución analítica:**

- 1:  $b \leq c$  ;la viga se considera estrecha
- 2: las caras son de igual espesor
- 3: se verifica la condición (2.12):

$$4 \frac{68,258 \cdot 10^9}{40 \cdot 10^6} \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,05} \frac{0,052}{0,05} = 284 > 100$$

$\Rightarrow E_c$  se considera pequeño.

- 4: rigidez de flexión:  
se verifican las condiciones (2.3) y (2.4):  
(2.3):  $\frac{0,052}{0,002} = 26 > 5,77$

Esto implica que la condición (2.3) es satisfecha

$$(2.4): \frac{68,258 \cdot 10^9}{40 \cdot 10^6} \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,052^2}{0,05^3} = 73,83 > 16,7$$

Por lo tanto (2.4) es satisfecha.

Por consiguiente, se utiliza la expresión (2.6) para la rigidez de flexión D.

$$D = 68,258 \cdot 10^9 \frac{0,05 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,052^2}{2} = 9228,48 \text{ N m}^2$$

5: Rigidez de corte:

$$V = 0,05 \cdot 0,052 \cdot 18 \cdot 10^6 = 46,8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

7: deflexión:

La tabla elemental da:

$$W_1(L/2) = \frac{10000 \cdot 0,5^4}{384 \cdot 9228,48} = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$W_2(L/2) = \frac{10000 \cdot 0,5^2}{8 \cdot 46,8 \cdot 10^3} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Por lo tanto, la deflexión total es:

$$W = W_1 + W_2 = 0,006846 \text{ m}$$

#### ➤ Comparación de los resultados obtenidos.

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos y se comparan los resultados.

| Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|-------------------------------------------------------|-------------|
| Método                                                | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                                | 6,47        |
| Analítica                                             | 6,85        |
| Diferencia                                            | 5,6%        |

#### 4.1.3: viga con forma de caja, con carga concentrada y extremos simplemente apoyados.

Esta viga tiene las siguientes características:

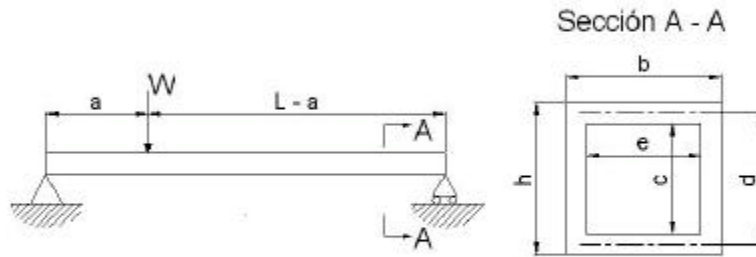


Fig. 3.1.- visualización del problema.

$$\begin{aligned} L &= 0,5 \text{ m} & c &= 0,046 \text{ m} \\ b &= 0,05 \text{ m} & t_f &= 2 \text{ mm} \\ h &= 0,054 \text{ m} & W &= 30 \text{ KN} \\ e &= 0,05 \text{ m} \end{aligned}$$

□ Material del núcleo:

espuma de PVC, Divinycell H45, con las siguientes características:

$$\begin{aligned} E_c &= 40 \text{ MPa} \\ G_c &= 18 \text{ MPa} \\ \rho &= 48 \text{ Kg/m}^3 \\ \nu &= 0,32 \end{aligned}$$

□ Material de las pieles:

Las pieles son de igual espesor y están hechas de aluminio (6061 – T6) con las siguientes propiedades :

$$\begin{aligned} E_f &= 68,258 \text{ Gpa} \\ G_f &= 25,516 \text{ Gpa} \\ \rho &= 2703,8 \text{ Kg/m}^3 \\ \nu &= 0,33 \end{aligned}$$

La carga y los apoyos son los mismos que en el ejemplo 1.

Encontrar la deflexión en  $x = 0,2 \text{ m}$ .

➤ Solución por el M.E.F.:

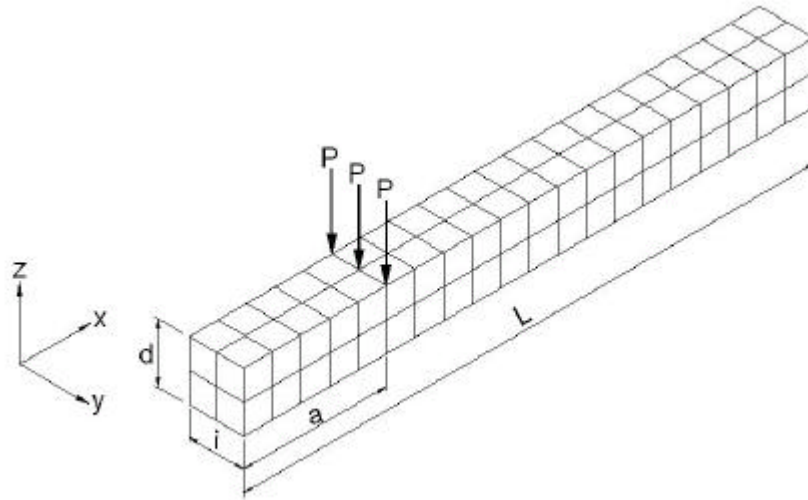


Fig. 3.2.- modelo de la viga para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

|                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| $i = 0,048 \text{ m}$ | $a = 0,125 \text{ m}$ |
| $d = 0,052 \text{ m}$ | $P = 10000 \text{ N}$ |
| $L = 0.5 \text{ m}$   | $t = 0,002 \text{ m}$ |

Este modelo consta también de 80 elementos brick, para el núcleo, y 40 elementos placa, para cada una de las pieles superior, inferior y laterales. Como se dijo en el ejemplo anterior, el núcleo y las pieles, se modelan en grupos distintos. El núcleo está en grupo 1 (verde), las pieles superior e inferior en el grupo 2 (rojo) y la pieles laterales en el grupo 3 (amarillo).

Al grupo 1 se le aplican las propiedades del elemento (brick) y del material que en este caso se trata de espuma de PVC Divinycell H45. En el caso de los grupos de las pieles se define en ellos el tipo de elemento, espesor de las placas, tipo de material, (aluminio (6061 – T6)), atributos de la superficie.

A la piel inferior se le aplican las condiciones de borde, (simplemente apoyado para ambos extremos). La carga de 30000 N se divide en 3, para luego aplicar, a cada nodo de la piel superior en el centro de la viga, una carga puntual de 10000 N.

□ **Resultados.**

Lo que se muestra a continuación es la forma que toma esta viga sometida a una carga concentrada de 30000 N.

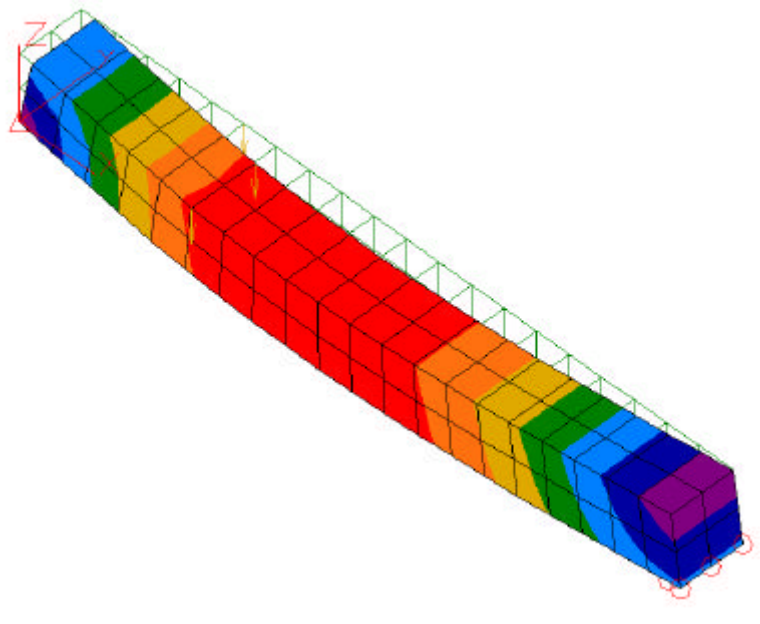


Fig. 3.3.- Viga deformada bajo la acción de una carga de 30000 N aplicada a 0,125 m del apoyo izquierdo de la viga.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por medio del método de los elementos finitos para esta viga.

| Resultado obtenido pro el M.E.F. |             |
|----------------------------------|-------------|
| Carga aplicada (N)               | Flecha (mm) |
| 30000                            | 4,88        |

➤ **Solución analítica:**

- 1)  $b \leq c \Rightarrow$  la viga es considerada estrecha.
- 2) las pieles son de igual espesor
- 3)  $G_f \gg G_c$
- 4) rigidez de flexión.

Se verifica la condición (2.29):

$$\frac{68,258 \cdot 10^9}{40 \cdot 10^6} \left( \frac{0,05 \cdot 0,054^3}{0,046 \cdot 0,05^3} - 1 \right) = 630 > 100$$

Que significa que el segundo término de la expresión (2.28) puede ser ignorado para la rigidez de flexión.

$$D = 68,258 \cdot 10^9 \left( \frac{0,05 \cdot 0,054^3 - 0,046 \cdot 0,05^3}{12} \right) = 12077 \text{ N m}^2$$

5) rigidez de corte.

(2.33) da:

$$\beta_f = \frac{4 \cdot 0,05 \cdot 0,002}{2 \cdot 0,05 \cdot 0,002} = 2$$

$$\text{Entonces (2.35) da: } V_c = \frac{G_c A_c}{\beta_c} = \frac{18 \cdot 10^6 \cdot 0,046 \cdot 0,05}{1} = 41,4 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$V_f = \frac{G_f A_f}{\beta_f} = \frac{25,51 \cdot 10^9 \cdot 0,002 \cdot (2 \cdot 0,054 + 2 \cdot 0,046)}{2} = 5102 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$(2.34): \frac{V_c}{V_f} = \frac{41,4 \cdot 10^3}{5102 \cdot 10^3} = 0,0081 < \frac{1}{100}$$

Por lo tanto la rigidez de corte será:

$$V = V_f = 5102 \cdot 10^3 \text{ N}$$

6) deflexión

La tabla elemental 1 da:

$$w_1(0,2) = \frac{30000 \cdot 0,5 \cdot 0,125 (0,5 - 0,2)}{6 \cdot 12077} \left( 2 \cdot \frac{0,2}{0,5} - \frac{0,125^2}{0,5^2} - \frac{0,2^2}{0,5^2} \right) = 0,004483 \text{ m}$$

$$w_2(0,2) = \frac{30000 \cdot 0,125 (0,5 - 0,2)}{0,5 \cdot 5103200} = 0,000441 \text{ m}$$

La deflexión total w es:

$$w = w_1 + w_2 = 0,0049 \text{ m}$$

➤ **Comparación de los resultados obtenidos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos y se comparan los resultados.

| Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|-------------------------------------------------------|-------------|
| Método                                                | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                                | 4,88        |
| Analítica                                             | 4,9         |
| Diferencia                                            | 1,5%        |

**4.1.4: Viga con carga concentrada, extremos simplemente apoyados y núcleo rígido.**

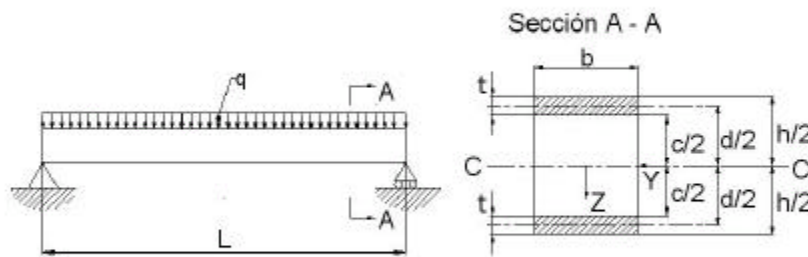


Fig. 4.1.- Visualización del problema.

Encontrar la deflexión en  $L/2 = 0.25\text{m}$

|                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| $L = 0,5 \text{ m}$   | $d = 0,052 \text{ m}$   |
| $b = 0.05 \text{ m}$  | $t_f = 0,002 \text{ m}$ |
| $h = 0,054 \text{ m}$ | $a = 0,125 \text{ m}$   |
| $c = 0,05 \text{ m}$  | $W = 8 \text{ KN.}$     |

- Material del núcleo: espuma de PVC, Divinycell H130, con las siguientes características:

$$E_c = 175 \text{ MPa}$$

$$G_c = 52 \text{ MPa}$$

$$\rho = 130 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0,32$$

- Material de las pieles: aluminio (6061 – T6), con las siguientes propiedades:

$$E_f = 68,258 \text{ GPa}$$

$$G_f = 25,51 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2703,8 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0,33$$

➤ **Solución por el M.E.F.:**

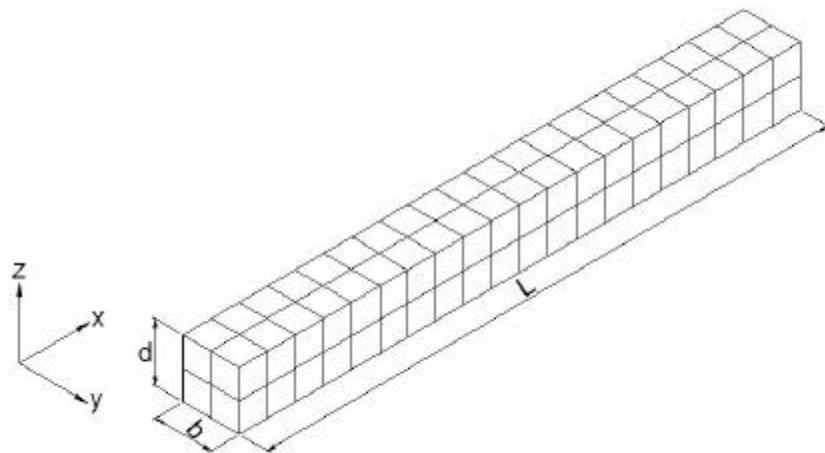


Fig. 4.2.- modelo de la viga para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$b = 0,05 \text{ m} \quad P = 200 \text{ KPa}$$

$$d = 0,052 \text{ m} \quad t = 0,002 \text{ m}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

También este modelo consta de la misma cantidad de elementos brick, para el núcleo, y elementos placa, para las pieles, que en los ejemplos 1 y 2. Como se dijo anteriormente, el núcleo y las pieles, se modelan en grupos distintos. El núcleo está en



grupo 1 (verde), la piel inferior el grupo 2 (rojo) y la piel superior en el grupo 3 (amarillo), los que se utilizan para introducir las propiedades de los elementos y de los materiales.

La condición de borde, (simplemente apoyado), se aplica en los extremos de la piel inferior de la viga. Como la viga está sometida a una carga distribuida de  $q = 10000 \text{ N/m}$ , este valor se multiplica por el largo de la viga, para obtener la fuerza que actúa sobre esta y este valor se divide por el área de la piel superior y así se obtiene la presión de  $P = 200 \text{ Kpa}$ , que se utiliza para el análisis de elementos finitos.

#### □ Resultados.

Lo que se muestra a continuación es la forma que toma esta viga sometida a una presión uniforme de  $200 \text{ Kpa}$ .

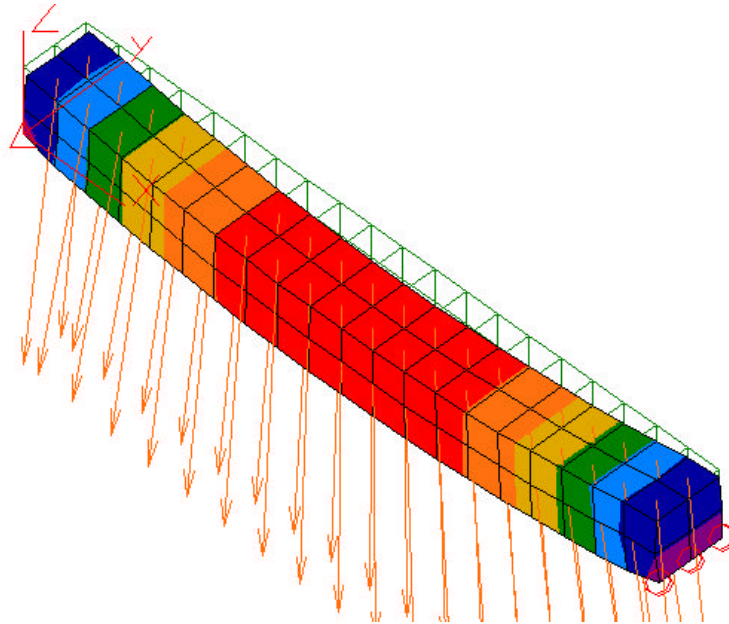


Fig. 4.3.- Viga deformada bajo la acción de una presión uniforme de  $200 \text{ KPa}$ .

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por medio del método de los elementos finitos para esta viga.

| Resultado obtenido pro el M.E.F.  |             |
|-----------------------------------|-------------|
| Carga aplicada ( $\text{N/m}^2$ ) | Flecha (mm) |
| 200000                            | 3,64        |

#### ➤ Solución analítica:

- 1)  $b \leq c$  por lo tanto, la viga se considera estrecha
- 2) las pieles son de igual espesor
- 3) se verifica la condición (2.12):

$$4 \frac{68,258 \cdot 10^9}{175 \cdot 10^6} \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,05} \frac{0,052}{0,05} = 65 < 100$$

Por lo tanto, esta condición no es satisfecha. De esta manera, 2.4.3 implica que G ha sido reemplazado con G' de acuerdo a (2.44).

$$G' = \frac{G}{1 + \frac{E_c}{6 E_f} \cdot \frac{c^2}{t(c+t)}} = \frac{52 \cdot 10^6}{1 + \frac{175 \cdot 10^6}{6 \cdot 68,258 \cdot 10^9} \cdot \frac{0,05^2}{0,002(0,05 + 0,002)}} =$$

$$= 51,47 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

4) 2.4.3. implica que la expresión (2.2) será usada cuando se calcula la rigidez de flexión:

$$D = E_f \frac{b t^3}{6} + E_f \frac{b t d^2}{2} + E_c \frac{b c^3}{12}$$

$$D = 68,258 \cdot 10^9 \frac{0,05 \cdot 0,002^3}{6} +$$

$$+ 68,258 \cdot 10^9 \frac{0,05 \cdot 0,002 \cdot 0,052^2}{6} + 175 \cdot 10^6 \frac{0,05 \cdot 0,05^3}{12} =$$

$$= 9324 \text{ N m}^2$$

5) Rigidez de corte: esta se obtiene de acuerdo a (2.16)

$$V = 0,05 \cdot 0,052 \cdot 51,47 \cdot 10^6 = 133822 \text{ N}$$

6) deflexión:

La tabla elemental da:

$$W_1(L/2) = \frac{5 \cdot 10000 \cdot 0,5^4}{384 \cdot 9324} = 0,00087 \text{ m}$$

$$W_2(L/2) = \frac{10000 \cdot 0,5^2}{8 \cdot 133822} = 0,00233 \text{ m}$$

Por lo tanto, la deflexión total es:

$$W = W_1 + W_2 = 0,0032 \text{ m}$$

➤ **Comparación de los resultados obtenidos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos y se comparan los resultados.

| Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|-------------------------------------------------------|-------------|
| Método                                                | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                                | 3,64        |
| Analítica                                             | 3,2         |
| Diferencia                                            | 12%         |

**4.1.5: Viga con carga concentrada, extremos simplemente apoyados y pieles de espesores desiguales.**

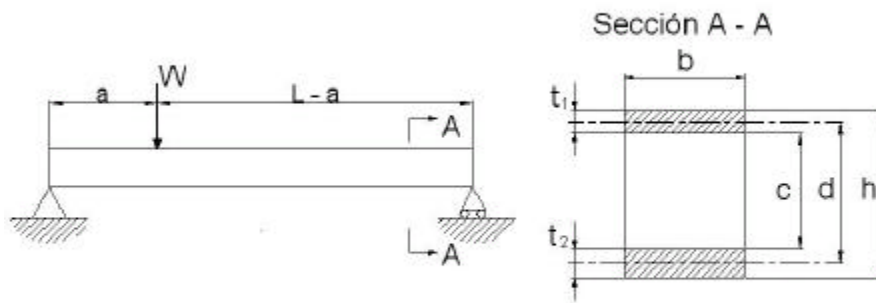


Fig.5.1.- Visualización del problema.

Encontrar la deflexión en  $L/2 = 0.25\text{m}$

$$\begin{aligned}
 L &= 0,5 \text{ m} & d &= 0,053 \text{ m} \\
 b &= 0.05 \text{ m} & t_1 &= 0,002 \text{ m} \\
 h &= 0,056 \text{ m} & t_2 &= 0,004 \text{ m} \\
 c &= 0,05 \text{ m} & a &= 0,25 \text{ m} \\
 & & W &= 1800 \text{ N.}
 \end{aligned}$$

- Material del núcleo: espuma de PVC, Divynycell H45, con las siguientes características:

$$E_c = 40 \text{ MPa}$$

$$G_c = 18 \text{ MPa}$$

$$\rho = 48 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0,32$$

- Material de las pieles: aluminio (6061 – T6), con las siguientes propiedades:

$$E_f = 68,258 \text{ GPa}$$

$$G_f = 25,51 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2703,8 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0,33$$

➤ **solución por M.E.F.:**

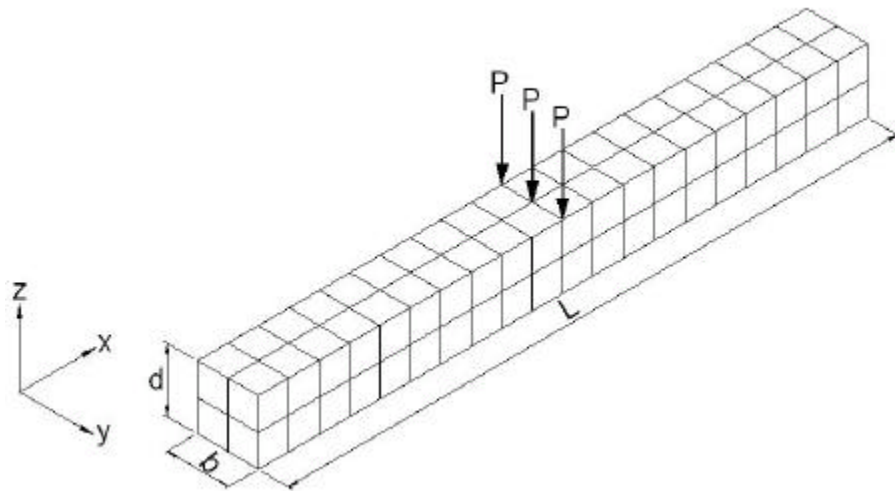


Fig. 5.2.- modelo de la viga para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$b = 0,05 \text{ m} \quad P = 600 \text{ N}$$

$$d = 0,052 \text{ m} \quad t = 0,002 \text{ m}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

El modelo consta de 80 elementos brick, para el núcleo, y 40 elementos placa, para cada una de las pieles. A la piel inferior se le aplican las condiciones de borde, que en este caso es simplemente apoyado para ambos extremos y a la piel superior se le aplica una carga puntual de 600 N en cada uno de los nodos de la sección central de la viga.

Tanto el núcleo, como las pieles, se modelan en grupos distintos, debido a que son de elementos y materiales diferentes. En este caso el núcleo está en grupo 1 (verde), la piel inferior el grupo 2 (rojo) y la piel superior en el grupo 3 (amarillo).

#### □ Resultados.

A continuación se muestra la forma que toma la viga cuando está bajo la acción de la carga central de 1800 N, los esfuerzos que se producen en las pieles y el esfuerzo de corte en el núcleo de esta viga.

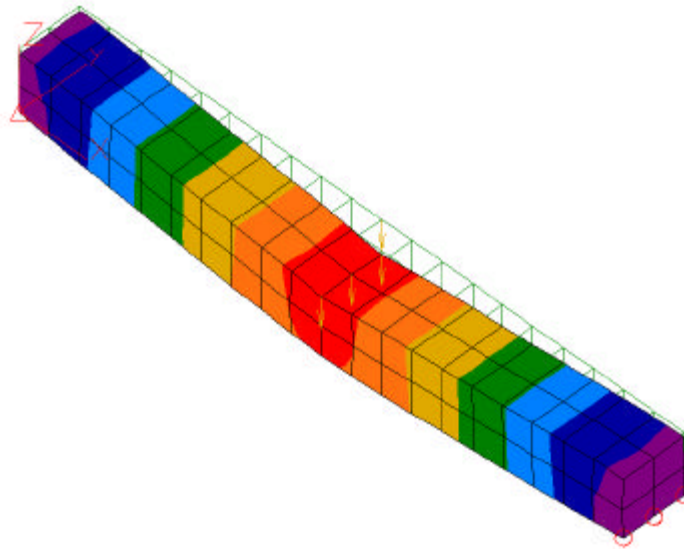


Fig. 5.3.- Viga deformada bajo la acción de una carga central de 1800 N.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por medio del método de los elementos finitos para esta viga.

| Resultado obtenido por el M.E.F. |             |
|----------------------------------|-------------|
| Carga aplicada (N)               | Flecha (mm) |
| 1800                             | 5,4         |

#### ➤ Solución analítica:

- 1)  $b \leq c$  por lo tanto, la viga se considera estrecha
- 2) las pieles son de espesor desigual y por lo tanto la rigidez de flexión será escrita como en (2.37).
- 3) se verifica la condición (2.12), (para la piel más delgada)

$$4 \frac{68,258 \cdot 10^9}{40 \cdot 10^6} \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,05} \frac{0,052}{0,05} = 284 > 100$$

Se satisface esta condición, lo que implica que  $E_c$  se considera pequeño.

4) rigidez de flexión:

La condición (2.3) se verifica para ambas pieles:

a) Piel superior:

$$\frac{0,053}{0,002} = 26,5 > 5,77$$

b) Piel inferior:

$$\frac{0,053}{0,004} = 13,25 > 5,77$$

Esto implica que la condición (2.3) es satisfecha, y se verifica ahora la condición (2.4).

$$\frac{68,258 \cdot 10^9}{40 \cdot 10^6} \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,05^3} \frac{0,053^2}{0,05^3} = 73,7 > 16,7$$

Por lo tanto (2.4) es satisfecha para ambas pieles. Entonces la rigidez de flexión es dada por (2.38):

$$D = \frac{0,05 \cdot 0,053^2 \cdot (68,258 \cdot 10^9)^2 \cdot 0,002 \cdot 0,004}{68,258 \cdot 10^9 (0,002 + 0,004)} = 12782 \text{ N m}^2$$

5) rigidez de corte:

La expresión (2.16) da:

$$V = 0,05 \cdot 0,053 \cdot 18 \cdot 10^6 = 47700 \text{ N}$$

6) deflexión:

la tabla elemental da:

$$w_1 = \frac{1800 \cdot 0,5^3}{48 \cdot 12782} = 0,000367 \text{ m}$$

$$w_2 = \frac{1800 \cdot 0,5}{4 \cdot 47700} = 0,0047 \text{ m}$$

La deflexión total es:

$$w = w_1 + w_2 = 0,000367 + 0,0047 = 0,0051 \text{ m}$$

➤ **Comparación de los resultados obtenidos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos.

| Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|-------------------------------------------------------|-------------|
| Método                                                | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                                | 5,4         |
| Analítica                                             | 5,1         |
| Diferencia                                            | 5,6%        |

**4.1.6: Viga con carga concentrada, extremos simplemente apoyados y pieles constituidas por varias láminas.**

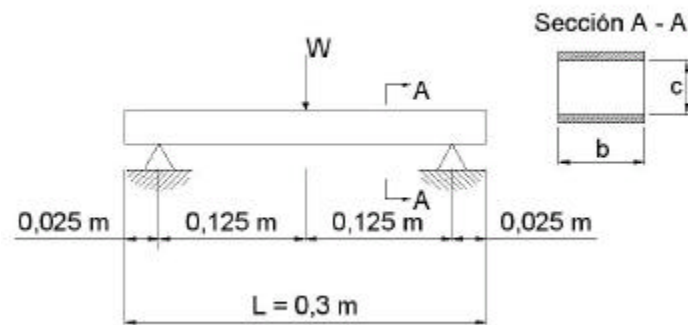


Fig. 6.1.- visualización del problema.

Las dimensiones de esta viga son:

$$L = 0,3 \text{ m}$$

$$b = 0,05 \text{ m}$$

$$c = 0,02 \text{ m}$$

$$W = 400 \text{ N}$$

- Material del núcleo: espuma de PVC, Divinycell H80, con las siguientes características:

$$E_c = 85 \text{ MPa}$$

$$G_c = 31 \text{ MPa}$$

$$\rho = 80 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu = 0,32$$

- Material de las pieles: estas están constituidas por láminas con las siguientes características:

**Piel Superior:** esta piel consta de tres capas con las siguientes características.

| Laminado   | Espesor<br>m       | $E_1$<br>(N/m <sup>2</sup> ) | $E_2$<br>(N/m <sup>2</sup> ) | $\nu_{12}$ | $\nu_{12}$ | $G_{12}$<br>(N/m <sup>2</sup> ) |
|------------|--------------------|------------------------------|------------------------------|------------|------------|---------------------------------|
| Mat 300    | $5 \times 10^{-4}$ | $3,753 \times 10^9$          | $3,753 \times 10^9$          | 0,42       | 6,25E-03   | $2,76 \times 10^9$              |
| Triax 1170 | $1 \times 10^{-3}$ | $13,267 \times 10^9$         | $13,267 \times 10^9$         | 0,25       | 6,25E-03   | $3,6 \times 10^9$               |
| Mat 300    | $5 \times 10^{-4}$ | $3,753 \times 10^9$          | $3,753 \times 10^9$          | 0,42       | 6,25E-03   | $2,76 \times 10^9$              |

**Piel Inferior:** esta piel está constituida por dos capas con las siguientes características

| Laminado  | Espesor<br>m       | $E_1$<br>(N/m <sup>2</sup> ) | $E_2$<br>(N/m <sup>2</sup> ) | $\nu_{12}$ | $\nu_{12}$           | $G_{12}$<br>(N/m <sup>2</sup> ) |
|-----------|--------------------|------------------------------|------------------------------|------------|----------------------|---------------------------------|
| Triax 768 | $8 \times 10^{-4}$ | $13,27 \times 10^9$          | $13,27 \times 10^9$          | 0,13       | $625 \times 10^{-5}$ | $3,6 \times 10^9$               |
| Mat 300   | $5 \times 10^{-4}$ | $4,156 \times 10^9$          | $4,156 \times 10^9$          | 0,32       | $625 \times 10^{-5}$ | $2,76 \times 10^9$              |

Para realizar más fácilmente el cálculo de deflexión de esta viga, se utiliza el método del módulo equivalente para obtener las dimensiones de las secciones transversales de ambas pieles.

### 1. Piel Superior.

|   |        |
|---|--------|
| ① | 0,5 mm |
| ② | 1 mm   |
| ③ | 0,5 mm |

$$E_1 = 3,753 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$E_2 = 13,267 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$E_3 = 3,753 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$R = \frac{E_1}{E_2} = 0,2828$$



Con este valor la piel superior queda como sigue:



La inercia de la figura se calcula de la siguiente manera:

$$I_1 = I_3 = \frac{1}{12} 14 \cdot 0,5^3 = 0,1458 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} 50 \cdot 1^3 = 4,167 \text{ mm}^4$$

$$I = 4,167 + 2 \cdot 0,1458 + 2 \cdot 7 \cdot 0,75^2 = 12,33 \text{ mm}^4$$

Luego, se obtiene una piel que tenga este valor de inercia y que además tenga un ancho de 50 mm.

$$I = \frac{1}{12} 50 \cdot h^3 = 12,33 \text{ mm}^4 \Rightarrow h = 1,436 \text{ mm}$$

De esta manera la piel superior queda como se muestra en la figura:



$$E_{f1} = 13,267 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

## 2. Piel Inferior.



$$E_4 = 13,27 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$E_5 = 4,156 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$R = \frac{E_5}{E_4} = 0,313$$

Con el valor de esta relación la sección de la piel inferior queda como se muestra en la figura:



Se calcula ahora la inercia de esta figura:

$$I_4 = \frac{1}{12} 50 \cdot 0,8^3 = 2,13 \text{ mm}^4$$

$$I_5 = \frac{1}{12} 15,65 \cdot 0,5^3 = 0,163 \text{ mm}^4$$

El centroide de la figura es:

$$\bar{Y} = \frac{40 \cdot 0,4 + 7,825 \cdot 1,05}{40 + 7,825} = 0,5 \text{ mm}$$

$$I = 2,13 + 40 \cdot 0,106^2 + 0,163 + 7,825 \cdot 0,543^2 = 5,06 \text{ mm}^4$$

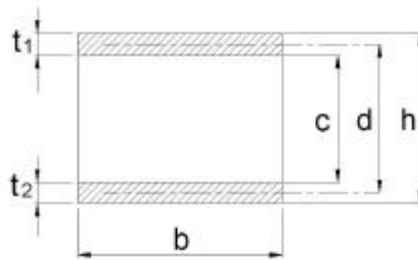
Luego el espesor de la piel es:

$$I = \frac{1}{12} 50 \cdot h^3 = 5,06 \text{ mm}^4 \Rightarrow h = 1,07 \text{ mm}$$



$$E_{f2} = 13,27 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

La sección A – A de la viga, que se utiliza ahora para el cálculo analítico se muestra en la figura:



$$h = 0,022506 \text{ m}$$

$$b = 0.05 \text{ m}$$

$$c = 0,02 \text{ m}$$

$$d = 0,021253 \text{ m}$$

$$t_1 = 0,001436 \text{ m}$$

$$t_2 = 0,00107 \text{ m}$$

➤ Solución por el M.E.F.:

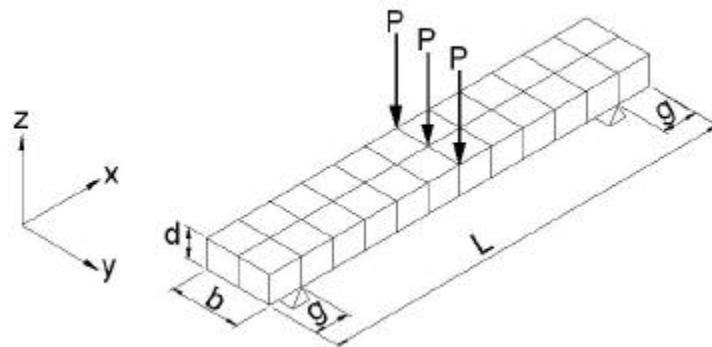


Fig. 6.2.- modelo de la viga para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} b &= 0,05 \text{ m} & P &= 133,3 \text{ N} \\ d &= 0,0215 \text{ m} & g &= 0.025 \text{ m} \\ L &= 0,3 \text{ m} \end{aligned}$$

El número de elementos brick, para el núcleo, en este modelo es de 24, para el núcleo, y de 24 elementos placa, para cada una de las pieles. A la piel inferior se le aplican las condiciones de borde, a 0.025 m desde los extremos de la viga, de simplemente apoyado para ambos extremos. A la piel superior se le aplica una carga puntual de 133,3 N en cada uno de los nodos de la sección central de la viga.

El núcleo y las pieles, se modelan en grupos distintos, debido a que son de elementos y materiales diferentes. Como en los casos anteriores el núcleo está en el grupo 1 (verde), la piel inferior el grupo 2 (rojo) y la piel superior en el grupo 3 (amarillo). En estos grupos se introducen las propiedades de los elementos, de los materiales y los atributos de la superficie.

Luego se ingresan los datos de los multiplicadores de casos de carga, la aceleración de gravedad, etc.

#### □ Resultados.

A continuación se muestra la forma que toma la viga cuando está bajo la acción de la carga central de 400 N, los esfuerzos que se producen en las pieles y el esfuerzo de corte en el núcleo de esta viga.

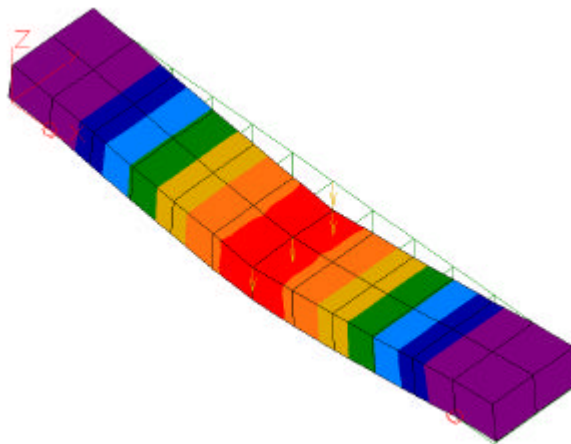


Fig. 6.3.- Viga deformada bajo la acción de una carga central de 400 N.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por medio del método de los elementos finitos para esta viga.

| Resultado obtenido pro el M.E.F. |             |
|----------------------------------|-------------|
| Carga aplicada (N)               | Flecha (mm) |
| 400                              | 1,56        |

➤ **Solución analítica:**

- 1)  $b > c$  por lo tanto, la viga se considera ancha.
- 2) las pieles son de distinto espesor y por lo tanto la rigidez de flexión se escribe como en (2.37)
- 3) se verifica la condición (2.12), (para la piel más delgada):

$$4 \frac{13,5 \cdot 10^9}{94,7 \cdot 10^6} \frac{0,00107}{0,02} \frac{0,021253}{0,02} = 32,4 < 100$$

Por lo tanto, esta condición no es satisfecha. De esta manera, 2.4.3 implica que  $G$  se reemplaza con  $G'$  de acuerdo a (2.44).

$$G' = \frac{31 \cdot 10^6}{1 + \frac{94,7 \cdot 10^6}{6 \cdot 13,5 \cdot 10^9} \cdot \frac{0,02^2}{0,00107 (0,02 + 0,00107)}} = 30,37 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

4) rigidez de flexión.

Se verifica la condición (2.3) para ambas pieles:

Piel superior:

$$\frac{0,021253}{0,001436} = 14,8$$

$$14,8 > 5,77$$

Piel inferior:

$$\frac{0,021253}{0,00107} = 19,85$$

$$19,85 > 5,77$$

Lo que implica que se satisface esta condición.

Se verifica ahora la condición (2.4)

$$\frac{13,5 \cdot 10^9}{94,7 \cdot 10^6} \frac{0,00107 \cdot 0,021253^2}{0,02^3} = 8,61 < 16,7$$

Por lo tanto la rigidez de flexión es dada por (2.37):

$$D = \frac{0,05 \cdot 0,021253^2 \cdot 14,15 \cdot 10^9 \cdot 13,5 \cdot 10^9 \cdot 1,436 \cdot 10^{-3} \cdot 1,07 \cdot 10^{-3}}{14,15 \cdot 10^9 \cdot 1,436 \cdot 10^{-3} + 13,5 \cdot 10^9 \cdot 1,07 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,05}{12} [14,15 \cdot 10^9 \cdot (1,436 \cdot 10^{-3})^3 + 13,5 \cdot 10^9 \cdot (1,07 \cdot 10^{-3})^3]$$

$$D = 191 \text{ N m}^2$$

5) rigidez de corte.

$$(2.16): V = 0,05 \cdot 0,02125 \cdot 30,37 \cdot 10^6 = 32272,68 \text{ N}$$

6) deflexión:

la tabla da:

$$w_1 = \frac{400 \cdot 0,25^3}{48 \cdot 191} = 0,00068 \text{ m}$$

$$w_2 = \frac{400 \cdot 0,125}{2 \cdot 32272,68} = 0,00093 \text{ m}$$

$$w = w_1 + w_2 = 0,0016 \text{ m}$$

➤ **Comparación de los resultados obtenidos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos.

| <b>Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos</b> |                    |
|--------------------------------------------------------------|--------------------|
| <b>Método</b>                                                | <b>Flecha (mm)</b> |
| M.E.F.                                                       | 1,56               |
| Analítica                                                    | 1,6                |
| Diferencia                                                   | 2,5%               |

#### 4.2.- EJEMPLOS DE PANELES SANDWICH

Se realiza a continuación el cálculo por ambos métodos de los paneles sándwich.

##### 4.2.1: panel con presión uniforme y bordes simplemente apoyados

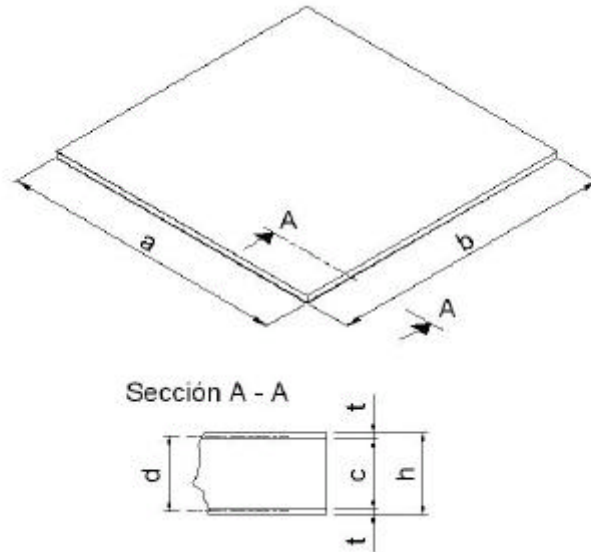


Fig. 1.1.- visualización del problema.

Un panel tiene las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} a &= b = 3 \text{ m} & c &= 60 \text{ mm} \\ h &= 70 \text{ mm} & q &= 10000 \text{ N/m}^2 \\ t &= 5 \text{ mm} \end{aligned}$$

##### □ Material del núcleo

El núcleo tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} E_f &= 175 \text{ Mpa} \\ G_f &= 52 \text{ Mpa} \\ \gamma_f &= 130 \text{ Kg/m}^3 \\ \nu_f &= 0,32 \end{aligned}$$

##### □ Material de las pieles

las pieles tienen igual espesor y están hechas de Aluminio (6061 – T6) con las siguientes características:

$$\begin{aligned} E_f &= 68,258 \text{ Gpa} \\ G_f &= 25,51 \text{ Gpa} \\ \gamma_f &= 2703,8 \text{ Kg/m}^3 \\ \nu_f &= 0,33 \end{aligned}$$

➤ **Solución por el método de elementos finitos.**

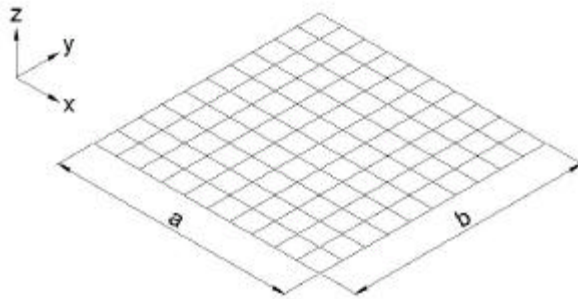


Fig. 1.2.- modelo del panel para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} a &= 3 \text{ m} & q &= 10000 \text{ N/m}^2 \\ b &= 3 \text{ m} & t &= 0,005 \text{ m} \end{aligned}$$

El modelo se encuentra en el grupo 1, (color verde), consta de 100 elementos placa sándwich; elemento que permite definir las características y propiedades de las diferentes láminas que constituyen el sándwich. Al definir los atributos de superficie, se introduce el valor de la presión uniforme de 10000 Pa.

Luego se aplica la condición de borde, (simplemente apoyado), a los cuatro bordes del panel.

□ **Resultados**

A continuación se muestra la forma que toma el panel al deformarse producto de una presión uniforme de 10000 Pa.

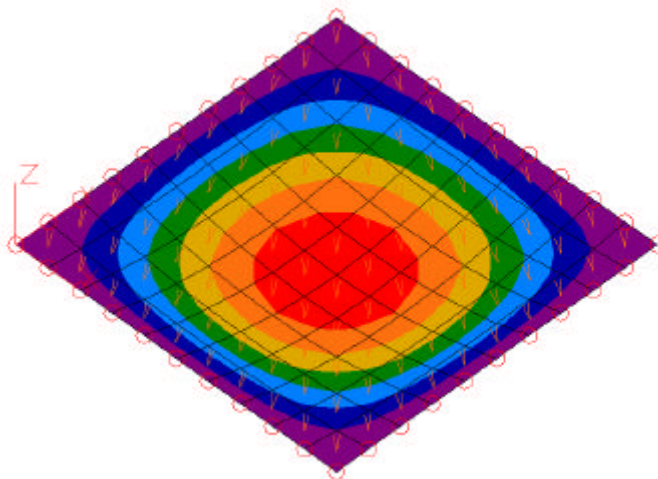


Fig.1.2.- Panel deformado bajo la acción de una presión uniforme de 10000 N/m<sup>2</sup>.



La siguiente tabla reúne los resultados obtenidos por el análisis de elementos finitos.

| Resultados obtenidos del análisis de elementos finitos |                |
|--------------------------------------------------------|----------------|
| Presión uniforme<br>(N/m <sup>2</sup> )                | Flecha<br>(mm) |
| 10000                                                  | 7,78           |

➤ **Solución analítica:**

- 1) Las pieles son de igual espesor.
- 2) La rigidez de flexión se obtiene de (2.75):

$$D_2 = \frac{E_f t d^2}{2(1 - \nu^2)} = \frac{68,258 \cdot 10^9 \cdot 0,005 \cdot 0,065^2}{2(1 - 0,33^2)} = 809084 \text{ N m}^2$$

$\rho$  se obtiene de (2.69c):

$$\rho = \frac{\pi^2}{2g} \cdot \frac{E_f t d}{G_f b^2} = \frac{\pi^2}{2(1 - 0,33^2)} \cdot \frac{68,258 \cdot 10^9}{25,51 \cdot 10^9} \cdot \frac{0,005 \cdot 0,065}{3^2} = 0,000535$$

$\beta_1$  y  $\beta_2$  son dados por la figura 2.21, con  $a/b = 1$ .

$$\beta_1 = 0,42 \cdot 10^{-2} \quad \beta_2 = 0,73 \cdot 10^{-2}$$

Entonces (2.79) da:

$$w_{\max} = \frac{qb^4}{D_2} (\beta_1 + \rho\beta_2) = \frac{10000 \cdot 3^4}{809084} (0,42 \cdot 10^{-2} + 0,535 \cdot 10^{-3} \cdot 0,73 \cdot 10^{-2}) = 0,0042 \text{ m}$$

➤ **Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos.

| Resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|----------------------------------------|-------------|
| Método                                 | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                 | 7,78        |
| analítico                              | 6,1         |
| diferencia                             | 22%         |

**4.2.2: panel con presión uniforme, bordes simplemente apoyados y pieles con distinto espesor.**

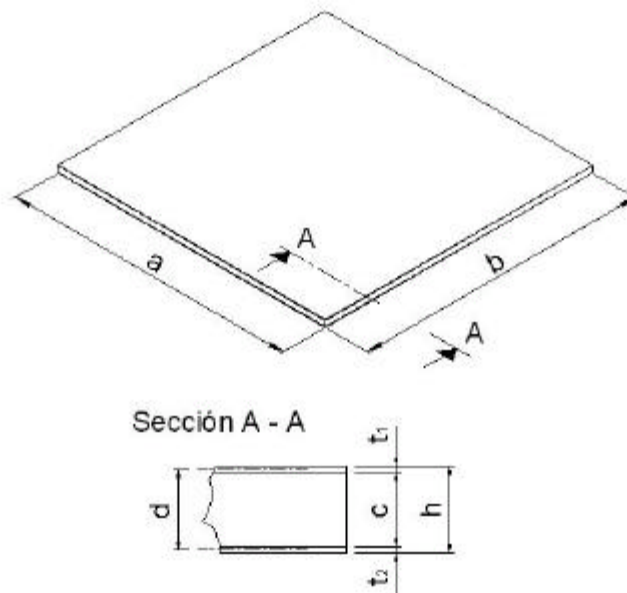


Fig. 1.1.- visualización del problema.

Un panel tiene las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} a &= b = 5 \text{ m} & t_2 &= 10 \text{ mm} \\ h &= 70 \text{ mm} & c &= 60 \text{ mm} \\ t_1 &= 7 \text{ mm} & q &= 7000 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

□ Material del núcleo

El núcleo tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} E_f &= 175 \text{ Mpa} \\ G_f &= 52 \text{ Mpa} \\ \gamma_f &= 130 \text{ Kg/m}^3 \\ \nu_f &= 0,32 \end{aligned}$$

□ Material de las pieles

las pieles tienen igual espesor y están hechas de Aluminio (6061 – T6) con las siguientes características:

$$\begin{aligned} E_f &= 68,258 \text{ Gpa} \\ G_f &= 25,51 \text{ Gpa} \\ \gamma_f &= 2703,8 \text{ Kg/m}^3 \\ \nu_f &= 0,33 \end{aligned}$$

➤ **Solución por el método de elementos finitos.**

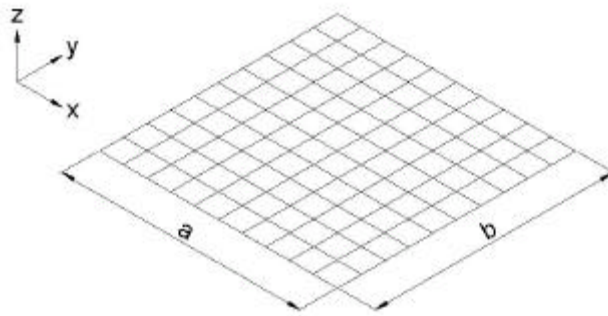


Fig. 2.2.- modelo del panel para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} a &= 5 \text{ m} & t_2 &= 0,01 \text{ m} \\ b &= 5 \text{ m} & q &= 7000 \text{ N/m}^2 \\ t_1 &= 0,007 \text{ m} \end{aligned}$$

Este modelo, al igual que en el ejemplo anterior, se encuentra en el grupo 1, (color verde), consta de 100 elementos placa sándwich; se define luego las características y propiedades de las diferentes láminas que constituyen el sándwich. Se introduce el valor de la presión uniforme de 7000 Pa al definir los atributos de superficie. Se aplica la condición de borde, (simplemente apoyado), a los cuatro bordes del panel.

□ **Resultados**

A continuación se muestra la forma que toma el panel al deformarse producto de una presión uniforme de 7000 Pa.

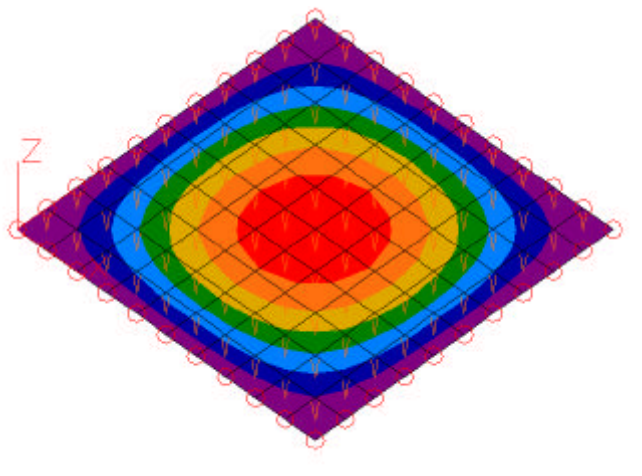


Fig.2.3.- Panel deformado bajo la acción de una presión uniforme de 7000 N/m<sup>2</sup>.

La siguiente tabla reúne los resultados obtenidos por el análisis de elementos finitos.

| Resultados obtenidos del análisis de elementos finitos |                |
|--------------------------------------------------------|----------------|
| Presión uniforme<br>(N/m <sup>2</sup> )                | Flecha<br>(mm) |
| 7000                                                   | 9,5            |

➤ **Solución analítica:**

- 1) Las pieles son de igual espesor.
- 2) La rigidez de flexión se obtiene de (2.86):

$$D_2 = \frac{(68,258 \cdot 10^9)^2 \cdot 0,007 \cdot 0,01 \cdot 0,1085^2}{(1 - 0,33^2) [68,258 \cdot 10^9 (0,007 + 0,01)]} = 3713092 \text{ N m}^2$$

$\rho$  de (2.87)

$$\rho = \frac{\pi^2 (68,258 \cdot 10^9)^2 \cdot 0,007 \cdot 0,01 \cdot 0,1}{5^2 (1 - 0,33^2) 52 \cdot 10^6 [68,258 \cdot 10^9 (0,007 + 0,01)]} = 0,24$$

$\beta_1$  y  $\beta_2$  son dados por la figura 2.21, con  $a/b = 1$ .

$$\beta_1 = 0,42 \cdot 10^{-2} \quad \beta_2 = 0,73 \cdot 10^{-2}$$

Entonces (2.79) da:

$$w_{\max} = \frac{qb^4}{D_2} (\beta_1 + \rho\beta_2) =$$

$$= \frac{10000 \cdot 5^4}{3713092} (0,42 \cdot 10^{-2} + 0,24 \cdot 0,73 \cdot 10^{-2}) = 0,007 \text{ m}$$

➤ **Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos.

| Resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|----------------------------------------|-------------|
| Método                                 | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                 | 9,5         |
| analítico                              | 7           |
| diferencia                             | 26%         |

#### 4.2.3: panel con carga en el borde $N_x$ y bordes simplemente apoyados

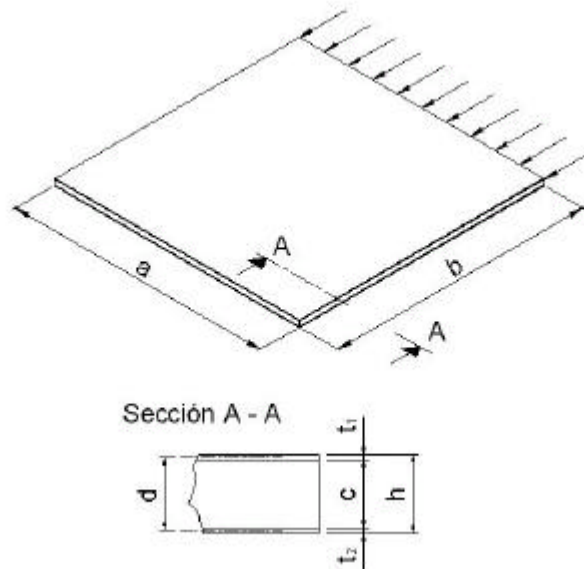


Fig. 3.1.- visualización del problema.

Un panel tiene las siguientes dimensiones:

$$a = b = 3 \text{ m}$$

$$h = 70 \text{ mm}$$

$$t = 5 \text{ mm}$$

$$c = 60 \text{ mm}$$

##### □ Material del núcleo

El núcleo es espuma de PVC, Divinycell H130, con las siguientes propiedades:

$$E_f = 175 \text{ Mpa}$$

$$G_f = 52 \text{ Mpa}$$

$$\gamma_f = 130 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu_f = 0,32$$

##### □ Material de las pieles

las pieles tienen igual espesor y están hechas de Aluminio (6061 – T6) con las siguientes características:

$$E_f = 68,258 \text{ Gpa}$$

$$G_f = 25,51 \text{ Gpa}$$

$$\gamma_f = 2703,8 \text{ Kg/m}^3$$

$$\nu_f = 0,33$$

➤ **Solución por M.E.F.:**

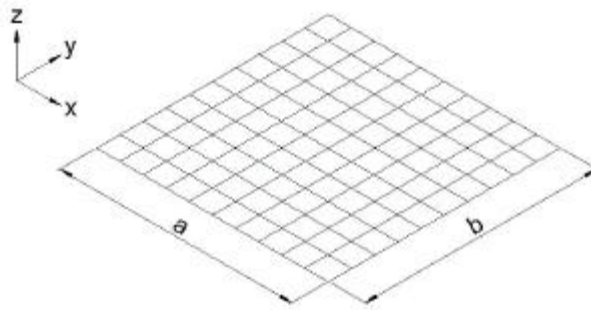


Fig. 3.2.- modelo del panel para realizar el análisis por elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} a &= 3 \text{ m} & t &= 0,005 \text{ m} \\ b &= 3 \text{ m} & c &= 0,06 \text{ m} \end{aligned}$$

El modelo se encuentra en el grupo 1, (color verde), consta de 100 elementos placa sándwich; elemento que permite definir las características y propiedades de las diferentes láminas que constituyen el sándwich.

Se aplica la condición de borde, (simplemente apoyado), a los cuatro bordes del panel y cargas unitarias a cada nodo de un borde del panel para poder realizar el cálculo de la carga de pandeo.

□ **Resultados**

A continuación se muestra la forma que toma el panel al deformarse producto de una carga de pandeo.

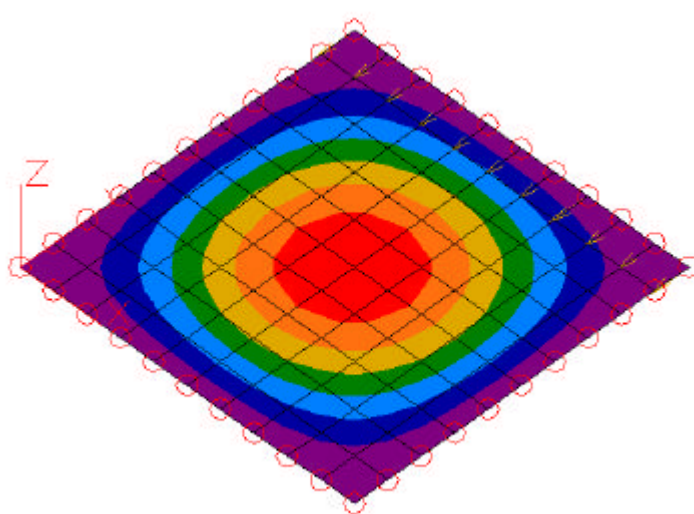


Fig.3.3.- Panel deformado bajo la acción de una carga de pandeo.

El programa entrega como resultado un factor, el que debe ser multiplicado por el número de elementos del borde al que se le aplicó las cargas unitarias del panel. A este valor se divide por el largo del borde y se obtiene así una carga distribuida para compararlo con el resultado analítico

La siguiente tabla reúne los resultados obtenidos por el análisis de elementos finitos.

| Resultados obtenidos del M.E.F. |                      |
|---------------------------------|----------------------|
| Factor                          | Carga de pando (N/m) |
| 836913                          | 2800000              |

➤ **Solución analítica:**

- 1) Las pieles son de igual espesor.
- 2) La rigidez de flexión se obtiene de (2.75):

$$D_2 = \frac{E_f t d^2}{2(1 - \nu^2)} = \frac{68,258 \cdot 10^9 \cdot 0,005 \cdot 0,065^2}{2(1 - 0,33^2)} = 809084 \text{ N m}^2$$

$\rho$  se obtiene de (2.69c):

$$\rho = \frac{\pi^2}{2g} \cdot \frac{E_f}{G_f} \cdot \frac{t d}{b^2} = \frac{\pi^2}{2(1 - 0,33^2)} \cdot \frac{68,258 \cdot 10^9}{25,51 \cdot 10^9} \cdot \frac{0,005 \cdot 0,065}{3^2} = 0,26$$

Entonces  $k_1$  se obtiene de una interpolación entre las figuras 2.20 a y 2.20 b, por lo tanto:

Para  $a/b = 1 \Rightarrow k_1 = 2,96$

La carga crítica dada por (2.73) es entonces:

$$P_{xmn} = \frac{\pi^2 D_2}{b^2} K_1 = \frac{\pi^2 809084}{3^2} \cdot 2,96 = 2,63 \cdot 10^6 \text{ N}$$

➤ **Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos.

| Resultados obtenidos por ambos métodos |                                    |
|----------------------------------------|------------------------------------|
| Método                                 | Carga de pando (N/m <sup>2</sup> ) |
| M.E.F.                                 | 2800000                            |
| analítico                              | 2630000                            |
| diferencia                             | 6%                                 |

**4.2.4: panel con presión uniforme, bordes simplemente apoyados y dos bordes simplemente apoyados.**

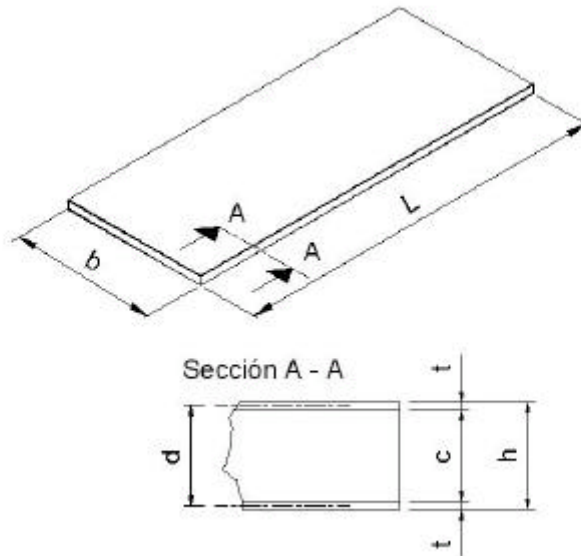


Fig. 4.1.- visualización del problema.

Un panel tiene las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} b &= 1,2 \text{ m} & c &= 60 \text{ mm} \\ L &= 3,6 \text{ m} & d &= 65 \text{ mm} \\ h &= 70 \text{ mm} & q &= 1840 \text{ N/m}^2 \\ t &= 5 \text{ mm} \end{aligned}$$

□ Material del núcleo

El núcleo tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} E_f &= 175 \text{ Mpa} \\ G_f &= 52 \text{ Mpa} \\ \gamma_f &= 130 \text{ Kg/m}^3 \\ \nu_f &= 0,32 \end{aligned}$$

□ Material de las pieles

las pieles tienen igual espesor y están hechas de Aluminio (6061 – T6) con las siguientes características:

$$\begin{aligned} E_f &= 68,258 \text{ Gpa} \\ G_f &= 25,51 \text{ Gpa} \\ \gamma_f &= 2703,8 \text{ Kg/m}^3 \\ \nu_f &= 0,33 \end{aligned}$$



➤ **Solución por el método de elementos finitos.**

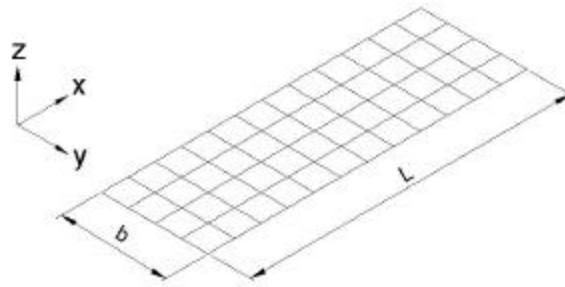


Fig. 4.2.- modelo del panel para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación de la viga se utilizan las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} L &= 3,6 \text{ m} & q &= 1840 \text{ N/m}^2 \\ b &= 1,2 \text{ m} & t &= 0,005 \text{ m} \\ c &= 0,06 \text{ m} \end{aligned}$$

Al igual que el modelo del problema 1, este se encuentra en el grupo 1, (color verde), consta de 48 elementos placa sándwich; elemento que permite definir las características y propiedades de las diferentes láminas que constituyen el sándwich. Al definir los atributos de superficie, se introduce el valor de la presión uniforme de 1840 Pa. Luego se aplica la condición de borde, (simplemente apoyado), a los dos bordes de menor longitud del panel.

□ **Resultados**

A continuación se muestra la forma que toma el panel, apoyado en sus dos bordes de menor longitud, al deformarse producto de una presión uniforme de 1840 Pa.

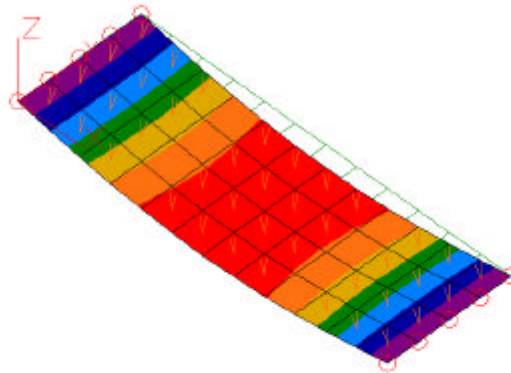


Fig.4.2.- Panel deformado bajo la acción de una presión uniforme de 1840 N/m<sup>2</sup>.

La siguiente tabla reúne los resultados obtenidos por el análisis de elementos finitos.

| Resultados obtenidos del análisis de elementos finitos |                |
|--------------------------------------------------------|----------------|
| Presión uniforme<br>(N/m <sup>2</sup> )                | Flecha<br>(mm) |
| 1840                                                   | 8,02           |

➤ **Solución analítica:**

- 1)  $b \gg c$  por lo tanto, la viga se considera ancha.
- 2) las pieles son de igual espesor.
- 3) se verifica la condición (2.12), (para la piel más delgada):

$$4 \frac{76,6 \cdot 10^9}{195 \cdot 10^6} \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,06} \frac{0,065}{0,06} = 35,46 < 100$$

Por lo tanto, esta condición no es satisfecha. De esta manera, 2.4.3 implica que  $G$  ha de reemplazarse con  $G'$  de acuerdo a (2.44).

$$G' = \frac{52 \cdot 10^6}{1 + \frac{195 \cdot 10^6}{6 \cdot 76,6 \cdot 10^9} \cdot \frac{0,06^2}{0,005(0,06 + 0,005)}} = 51,76 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

- 4) rigidez de flexión.

Se utiliza la expresión (2.2) para calcular  $D$

$$D = 76,6 \cdot 10^9 \frac{1,2 \cdot 0,005^3}{6} + 76,6 \cdot 10^9 \frac{1,2 \cdot 0,005 \cdot 0,065^2}{2} + 195 \cdot 10^6 \frac{1,2 \cdot 0,06^3}{12}$$

$$D = 977032 \text{ Nm}^2$$

- 5) rigidez de corte.

$$(2.16): V = 1,2 \cdot 0,065 \cdot 51,76 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^6 \text{ N}$$

- 6) deflexión:

la tabla da:

$$w_1 (L/2) = \frac{5 \cdot 2208 \cdot 3,6^4}{384 \cdot 977032} = 0,0049 \text{ m}$$

$$w_2 (L/2) = \frac{2208 \cdot 3,6^2}{8 \cdot 4 \cdot 10^6} = 0,00089 \text{ m}$$

La deflexión total es:

$$w = w_1 + w_2 = 0,00579 \text{ m}$$

➤ **Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos.

| Resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|----------------------------------------|-------------|
| Método                                 | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                 | 8,02        |
| analítico                              | 5,8         |
| diferencia                             | 27,7%       |

**4.2.5: panel con presión uniforme y bordes simplemente apoyados**

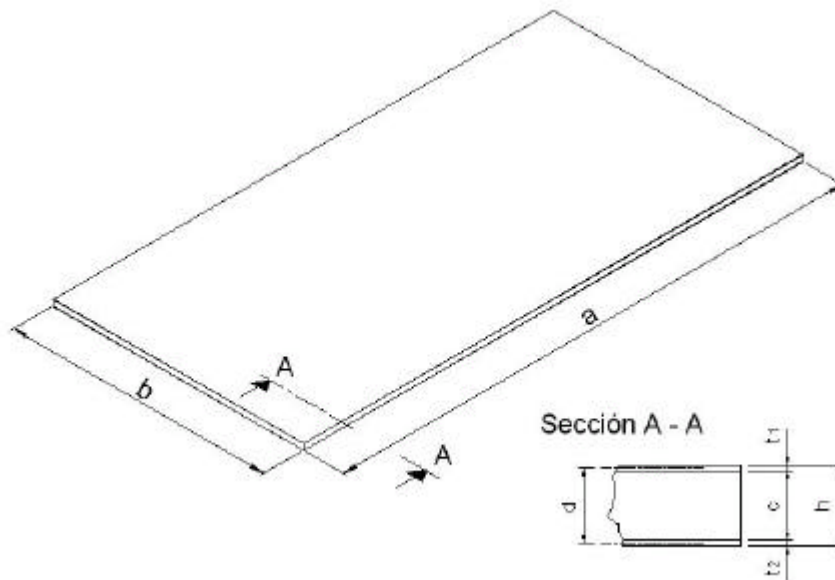


Fig. 1.1.- visualización del problema

El panel tiene las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned}
 a &= 6 \text{ m} & t &= 5 \text{ mm} \\
 b &= 3 \text{ m} & c &= 60 \text{ mm} \\
 h &= 70 \text{ mm} & q &= 10000 \text{ N/m}^2 \\
 d &= 65 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

□ Material del núcleo

El núcleo tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 E_f &= 175 \text{ Mpa} \\
 G_f &= 52 \text{ Mpa} \\
 \gamma_f &= 130 \text{ Kg/m}^3 \\
 \nu_f &= 0,32
 \end{aligned}$$

□ Material de las pieles

las pieles tienen igual espesor y están hechas de Aluminio (6061 – T6) con las siguientes características:

$$\begin{aligned}
 E_f &= 68,258 \text{ Gpa} \\
 G_f &= 25,51 \text{ Gpa} \\
 \gamma_f &= 2703,8 \text{ Kg/m}^3 \\
 \nu_f &= 0,33
 \end{aligned}$$

➤ Solución por el método de elementos finitos.

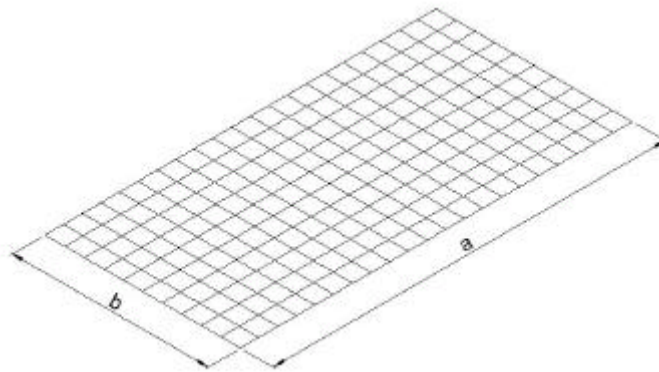


Fig. 5.2.- modelo del panel para realizar el análisis de elementos finitos.

Para la modelación del panel se utilizan las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned}
 a &= 6 \text{ m} & q &= 10000 \text{ N/m}^2 \\
 b &= 3 \text{ m} & t &= 0,005 \text{ m} \\
 c &= 0,06 \text{ m}
 \end{aligned}$$

El modelo se encuentra en el grupo 1, (color verde), consta de 210 elementos placa sándwich; elemento que permite definir las características y propiedades de las diferentes láminas que constituyen el sándwich. Al definir los atributos de superficie, se introduce el valor de la presión uniforme de 10000 Pa.

Luego se aplica la condición de borde, (simplemente apoyado), a los cuatro bordes del panel.

#### □ Resultados

A continuación se muestra la forma que toma el panel al deformarse producto de una presión uniforme de 10000 N/m<sup>2</sup>.

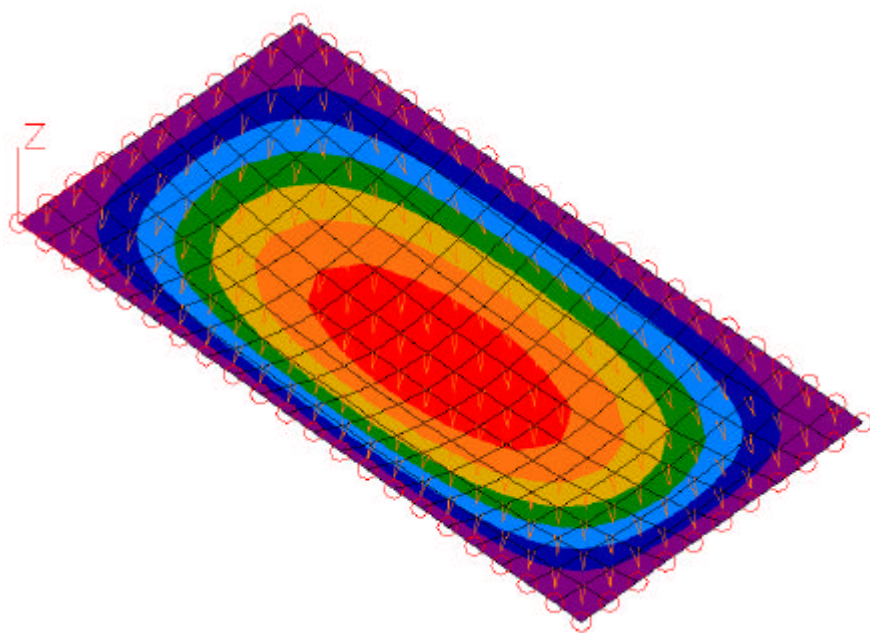


Fig.5.3.- Panel deformado bajo la acción de una presión uniforme de 10000 N/m<sup>2</sup>.

La siguiente tabla reúne los resultados obtenidos por el análisis de elementos finitos.

| Resultados obtenidos del análisis de elementos finitos |                |
|--------------------------------------------------------|----------------|
| Presión uniforme<br>(N/m <sup>2</sup> )                | Flecha<br>(mm) |
| 10000                                                  | 15,57          |

#### ➤ Solución analítica:

- 1) Las pieles son de igual espesor.
- 3) La rigidez de flexión se obtiene de (2.75):

$$D_2 = \frac{E_f t d^2}{2(1 - \nu^2)} = \frac{68,258 \cdot 10^9 \cdot 0,005 \cdot 0,065^2}{2(1 - 0,33^2)} = 809084 \text{ N m}^2$$

$\rho$  se obtiene de (2.69c):

$$\rho = \frac{\pi^2}{2g} \cdot \frac{E_f}{G_f} \cdot \frac{t d}{b^2} = \frac{\pi^2}{2(1 - 0,33^2)} \cdot \frac{68,258 \cdot 10^9}{25,51 \cdot 10^9} \cdot \frac{0,005 \cdot 0,065}{3^2} = 0,26$$

$\beta_1$  y  $\beta_2$  son dados por la figura 2.21, con  $a/b = 1$ .

$$\beta_1 = 1,02 \cdot 10^{-2} \qquad \beta_2 = 1,15 \cdot 10^{-2}$$

Entonces (2.79) da:

$$w_{\max} = \frac{qb^4}{D_2} (\beta_1 + \rho\beta_2) = \frac{10000 \cdot 3^4}{809084} (1,02 \cdot 10^{-2} + 0,26 \cdot 1,15 \cdot 10^{-2}) = 0,0132 \text{ m}$$

➤ **Resumen de los resultados obtenidos por ambos métodos.**

En la siguiente tabla se muestra un resumen de los resultados obtenidos, por medio de ambos métodos.

| Resultados obtenidos por ambos métodos |             |
|----------------------------------------|-------------|
| Método                                 | Flecha (mm) |
| M.E.F.                                 | 15,57       |
| analítico                              | 13,2        |
| diferencia                             | 15%         |

## CONCLUSIONES

Al terminar esta tesis, se puede observar que el método de elementos finitos entrega resultados bastante similares en la mayoría de los casos, a los entregados por los métodos analíticos, en el análisis de vigas.

Cabe mencionar que en la tesis de Roberto Vera Castro titulada “Comparación entre ensayos mecánicos de flexión y estudios numéricos de deformación de probetas de materiales compuestos”, se obtuvo resultados aceptables. Por lo que se puede decir, que como los resultados entregados por el método de los elementos finitos se aproximan a los ensayos mecánicos, los métodos analíticos, pueden ser utilizados para pequeños desplazamientos, es decir dentro de la zona de comportamiento lineal. Además no fue necesario utilizar un módulo de elasticidad, obtenido de un ensayo mecánico, por lo que la única información que se utiliza es la que entrega el fabricante de aquellos materiales. Esto hace que los métodos analíticos se consideren para predecir el comportamiento de una viga compuesta.

El caso de los paneles sándwich, presentan diferencias mayores entre ambos métodos, que las presentadas en los ejemplos de las vigas sándwich. Por esto se aconseja la utilización de métodos analíticos para pequeñas deflexiones.

En general, la utilización de elementos compuestos para la modelación de elementos finitos, permite una mayor facilidad para realizar esta y un ingreso de datos más fácil en la etapa de pre-proceso. El tiempo de análisis menor, debido a que se utiliza una malla menos densa. Además se puede analizar cada una de las capas que componen el sándwich en la etapa de post-proceso.

Tanto el método de los elementos finitos como los métodos analíticos, se pueden utilizar como métodos predictivos, por lo que permiten conocer las deflexiones de las vigas y paneles sándwich en la etapa de diseño, para pequeñas deflexiones, pero que son, aún así, de gran utilidad.

## ANEXO 1

## DIVINYCELL H GRADE

Las propiedades de los tipos de espuma de PVC, que se utilizan en los ejemplos de esta tesis se definen en la tabla que sigue a continuación.

Materiales de núcleos sándwich Divinycell H.

Propiedades físicas promedio.

| Quality                                                 |                    | H30  | H45  | H60  | H80   | H100  | H130  | H160  | H200  | H250  |
|---------------------------------------------------------|--------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>Density</b><br>ASTM D1622                            | Kg/m <sup>3</sup>  | 36   | 48   | 60   | 80    | 100   | 130   | 160   | 200   | 250   |
|                                                         | lb/ft <sup>3</sup> | 2,3  | 3    | 4    | 5     | 6     | 8     | 10    | 12,4  | 15,6  |
| <b>Compressive modulus*</b><br>ASTM D1621               | Mpa<br>+22°C       | 0,3  | 0,6  | 0,8  | 1,2   | 1,7   | 2,5   | 3,4   | 4,4   | 5,8   |
|                                                         | psi<br>+72° C      | 45   | 80   | 115  | 175   | 245   | 360   | 500   | 640   | 840   |
| <b>Compressive modulus*</b><br>ASTM D162<br>procedure B | Mpa<br>+22°C       | 20   | 40   | 60   | 85    | 125   | 175   | 230   | 310   | 400   |
|                                                         | psi<br>+72° C      | 2900 | 5800 | 8700 | 12325 | 18125 | 25375 | 33350 | 44950 | 58000 |
| <b>Tensile strength*</b><br>ASTM D1623                  | Mpa<br>+22°C       | 0,9  | 1,3  | 1,6  | 2,2   | 3,1   | 4,2   | 5,1   | 6,4   | 8,8   |
|                                                         | psi<br>+72° C      | 130  | 190  | 230  | 320   | 450   | 610   | 740   | 930   | 1275  |
| <b>Tensile modulus*</b><br>ASTM D1623                   | Mpa<br>+22°C       | 28   | 42   | 56   | 80    | 105   | 140   | 170   | 230   | 300   |
|                                                         | psi<br>+72° C      | 4060 | 6090 | 8120 | 11600 | 15225 | 20300 | 24650 | 33350 | 43500 |
| <b>Tensile strength**</b><br>ISO 1926                   | Mpa<br>+22°C       | 0,8  | 1,2  | 1,5  | 2     | 2,4   | 3     | 3,9   | 4,8   | 6,4   |
|                                                         | psi<br>+72° C      | 115  | 170  | 215  | 290   | 350   | 430   | 560   | 690   | 920   |
| <b>Shear strength**</b><br>ASTM C273                    | Mpa<br>+22°C       | 0,35 | 0,5  | 0,7  | 1     | 1,4   | 2     | 2,6   | 3,3   | 4,5   |
|                                                         | psi<br>+72° C      | 50   | 70   | 100  | 145   | 200   | 290   | 380   | 480   | 650   |
| <b>Shear modulus**</b><br>ASTM C273                     | Mpa<br>+22°C       | 13   | 18   | 22   | 31    | 40    | 52    | 66    | 85    | 108   |
|                                                         | psi<br>+72° C      | 1885 | 2610 | 3190 | 4495  | 5800  | 7540  | 9570  | 12325 | 15660 |

\* = perpendicular al plano.

\* = paralelo al plano.

Relación de Poisson = 0,32



## ANEXO 2

## TABLAS ELEMENTALES

## 1. Viga con carga concentrada y extremos simplemente apoyados.

$$Q(x)^{0-1} = \frac{Wb}{L} \quad M(x)^{0-1} = \frac{Wbx}{L} \quad M_{\max} = M_1 = \frac{Wab}{L}$$

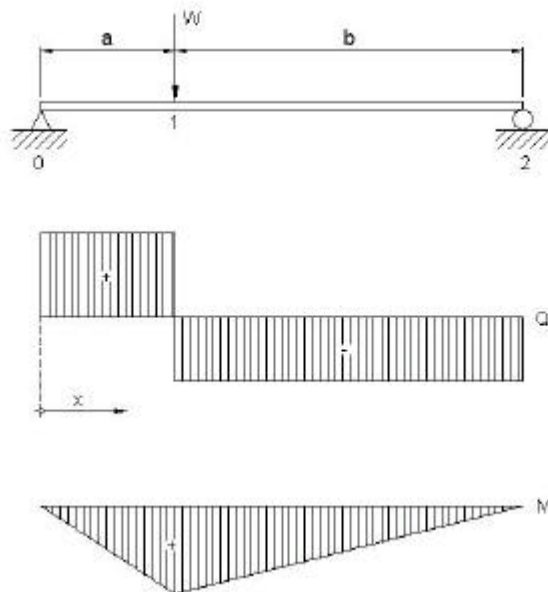
$$Q(x)^{1-2} = -\frac{Wa}{L} \quad M(x)^{1-2} = \frac{Wa(L-x)}{L}$$

$$w_1(x)^{0-1} = \frac{WLbx}{6D} \left( 1 - \frac{b^2}{L^2} - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad w_2(x)^{0-1} = \frac{Wbx}{LV}$$

$$w_1(x)^{1-2} = \frac{WLa(L-x)}{6D} \left( \frac{2x}{L} - \frac{a^2}{L^2} - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad w_2(x)^{1-2} = \frac{Wa(L-x)}{LV}$$

$$w_1(a) = \frac{Wa^2 b^2}{3DL} \quad w_2(a) = \frac{Wba}{LV}$$

$$w_1(L/2) = \frac{Wa}{48D} (3L^2 - 4a^2) \quad w_2(L/2) = \frac{Wa}{2V}$$



2. Viga con presión uniforme y extremos simplemente apoyados.

$$Q(x) = q\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

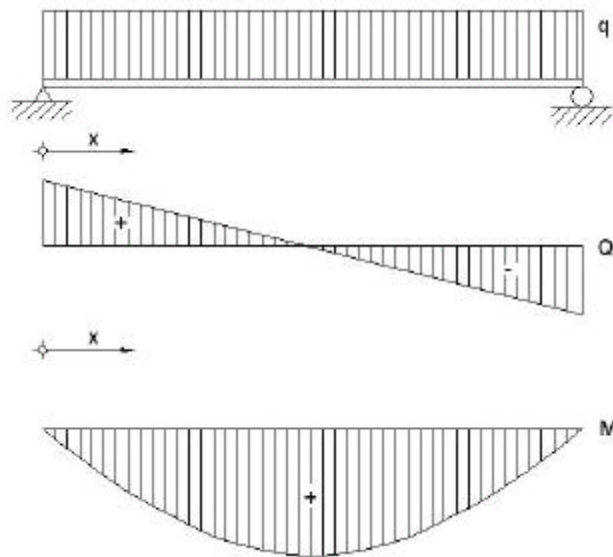
$$M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$M(L/2) = M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$$

$$w_1(x) = \frac{qL^3x}{24D} \left(1 - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right) \quad w_2(x) = \frac{q}{2V}(Lx - x^2)$$

$$w_{1, \max} = \frac{5qL^4}{384D}$$

$$w_{2, \max} = \frac{qL^2}{8V}$$



### 3. Viga con carga triangular y extremos simplemente apoyados.

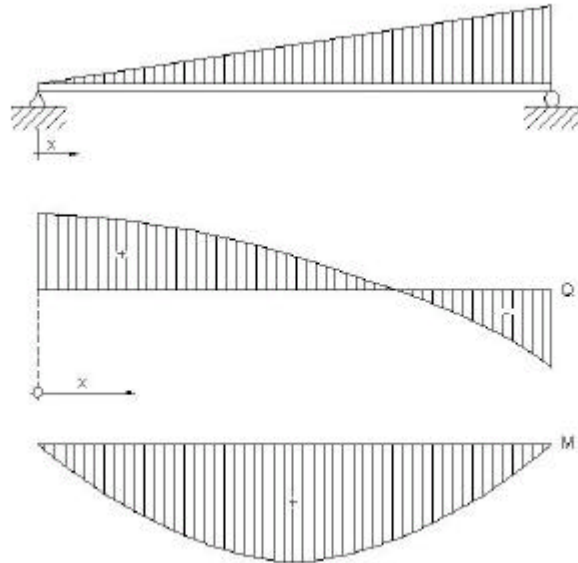
$$Q(x) = \frac{qL}{6} - \frac{qx^2}{2L} \quad M(x) = \frac{qLx}{6} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

$$M(1/2) = \frac{qL^2}{16} \quad M_{\max} = 0,064 \, qL^2, \text{ cuando } x = 0,577 \, L$$

$$w_1(x) = \frac{qL^3}{360D} x \left(7 - 10 \frac{x^2}{L^2} + 3 \frac{x^4}{L^4}\right) \quad w_2(x) = \frac{qLx}{6V} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

$$w_1(1/2) = \frac{5qL^4}{768D} \quad w_{2,\max} \text{ aparece en } x = 0,577 \, L$$

$$w_{1,\max} = 0,00652 \frac{qL^4}{D} \text{ en } x = 0,519 \, L$$



4. Viga con carga concentrada, un extremo simplemente apoyado y un extremo empotrado.

$$Q(x)^{0-1} = \frac{Wb^2}{L^2} \left( 3 - \frac{b}{L} \right)$$

$$M(a) = \frac{Wb^2a}{2L^2} \left( 2 + \frac{a}{L} \right)$$

$$Q(x)^{1-2} = -\frac{Wa}{2L} \left( 3 - \frac{a^2}{L^2} \right)$$

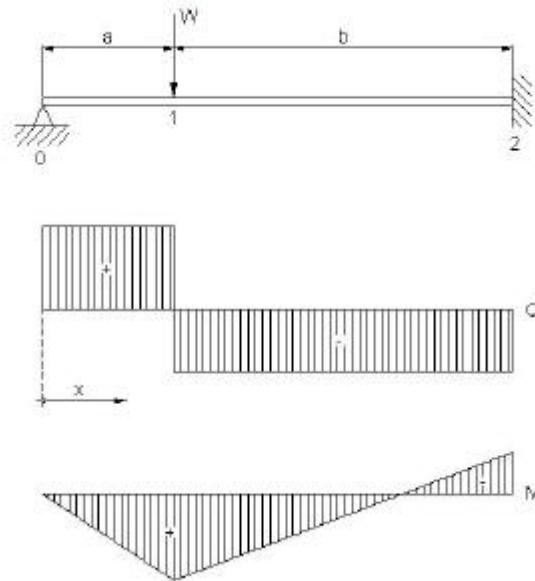
$$M(L) = -\frac{Wa}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{L^2} \right)$$

$$w_1(x)^{0-1} = \frac{Wb^2x}{12D} \left[ 3\frac{a}{L} - \left( 2 + \frac{a}{L} \right) \frac{x^2}{L^2} \right]$$

$$w_2(x)^{0-1} = \frac{Wb^2x}{2L^2V} \left( 3 - \frac{b}{L} \right)$$

$$w_1(x)^{1-2} = \frac{Wa(L-x)^2}{12D} \left[ 3\left( 1 - \frac{a^2}{L^2} \right) - \left( 3 - \frac{a^2}{L^2} \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right]$$

$$w_{2, \max} = w_2(a)$$



5. **Viga con carga concentrada, un extremo simplemente apoyado y un extremo empotrado.**

$$Q(x) = \frac{3qL}{8} - qx$$

$$M(x) = \frac{qLx}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{x}{L} \right)$$

$$+M_{\max} = \frac{9}{128} qL^2 \quad \text{en } x = 0,375 L$$

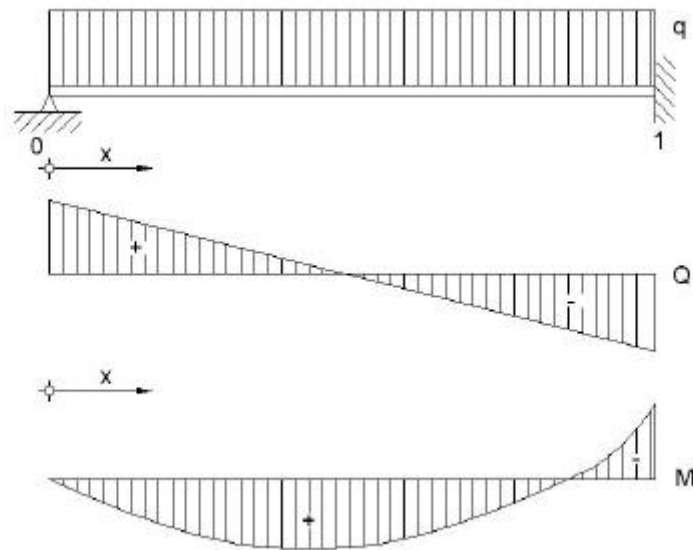
$$-M_{\max} = M(L) = -\frac{qL^2}{8}$$

$$w_1(x) = \frac{qL^3}{48D} \left( 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \right)$$

$$w_2(x) = \frac{3qLx}{8V} - \frac{qx^2}{2V}$$

$$w_{1,\max} = \frac{qL^4}{185D} \quad \text{en } x = 0,42 L$$

$$w_1(L/2) = \frac{qL^4}{192D}$$



6. **Viga con carga triangular, un extremo simplemente apoyado y el otro extremo empotrado.**

$$Q(x) = \frac{qL}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

$$M(x) = \frac{qLx}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{x^2}{3L^2} \right)$$

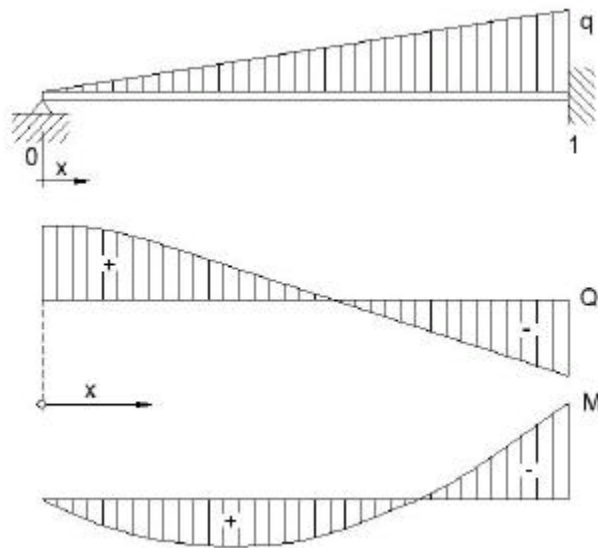
$$+M_{\max} = 0,0298qL^2 \text{ en } x = 0,447 L$$

$$-M_{\max} = M(L) = -\frac{qL^2}{15}$$

$$w_1(x) = \frac{qL^3}{120 D} \left( 1 - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^4}{L^4} \right)$$

$$w_2(x) = \frac{qL}{2V} \left( \frac{x}{5} - \frac{x^3}{3L^2} \right)$$

$$w_{1, \max} \text{ en } x = 0,447 L$$



7. Viga con carga concentrada y extremos empotrados.

$$Q(x)^{0-1} = \frac{Wb^2}{L^2} \left(1 + \frac{2a}{L}\right) \quad M(x)^{0-1} = -\frac{Wab^2}{L^2} + \frac{Wb^2x}{L^2} \left(1 + \frac{2a}{L}\right)$$

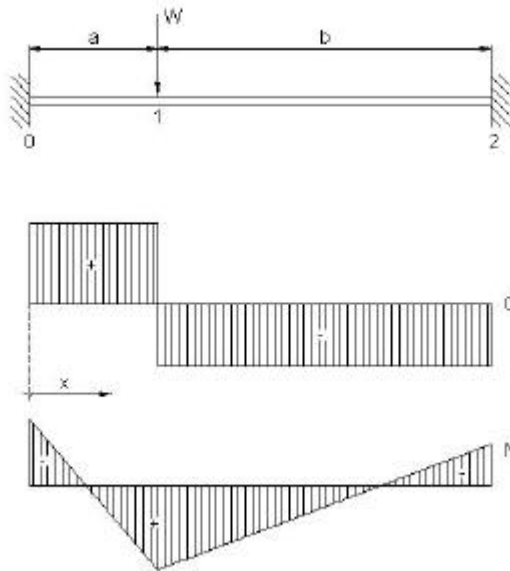
$$Q(x)^{1-2} = -\frac{Wa^2}{2L^2} \left(1 + \frac{2b}{L}\right)$$

$$M(x)^{1-2} = -\frac{Wab^2x}{L^2} + \frac{Wb^2x}{L^2} \left(1 + \frac{2a}{L}\right) - W(x-a)$$

$$w_1(x)^{0-1} = \frac{Wax^2}{6D} \left[ 3 - 6\frac{a}{L} + 3\frac{a^2}{L^2} - \frac{x}{a} \left( 1 - 3\frac{a^2}{L^2} + 2\frac{a^3}{L^3} \right) \right]$$

$$w_1(L/2) = \frac{Wa^2L}{48D} \left( 3 - \frac{4a}{L} \right) \quad \text{cuando } a \leq L/2$$

$$w_2(x)^{0-1} = \frac{Wb^2x}{VL^2} \left( 1 + \frac{2a}{L} \right)$$



## 8. Viga con presión uniforme y extremos empotrados.

$$Q(x) = \frac{qL}{2} - qx$$

$$M(x) = \frac{q}{2} \left( Lx - x^2 - \frac{L^2}{6} \right)$$

$$M(0) = M(L) = -\frac{qL^2}{12}$$

$$M(L/2) = \frac{qL^2}{24}$$

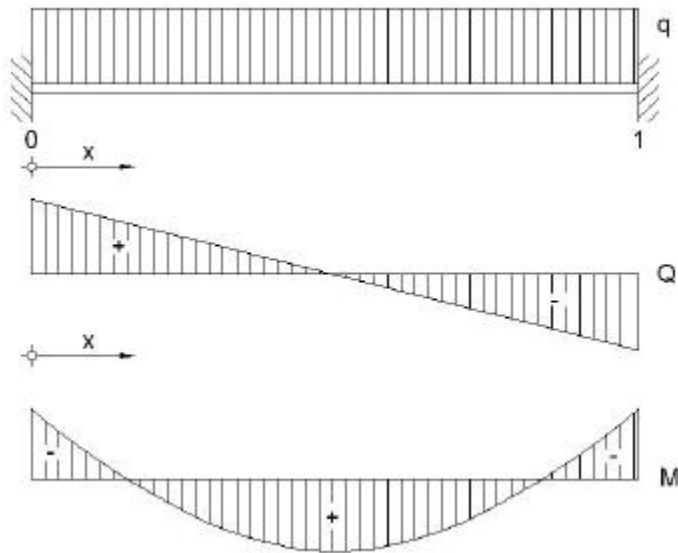
$$M = 0 \text{ en } x = 0,21 L$$

$$w_1(x) = \frac{qL^2 x^2}{24D} \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2$$

$$w_2(x) = \frac{q(Lx - x^2)}{2V}$$

$$w_{1, \max} = w_1(L/2) = \frac{qL^4}{384D}$$

$$w_2(L/2) = \frac{qL^2}{8V}$$





9. Viga con carga triangular y extremos empotrados.

$$Q(x) = \frac{qL}{20} \left( 3 - 10 \frac{x^2}{L^2} \right)$$

$$M(x) = -\frac{qL^2x}{60} \left( -2 + 9 \frac{x}{L} - 10 \frac{x^3}{L^3} \right)$$

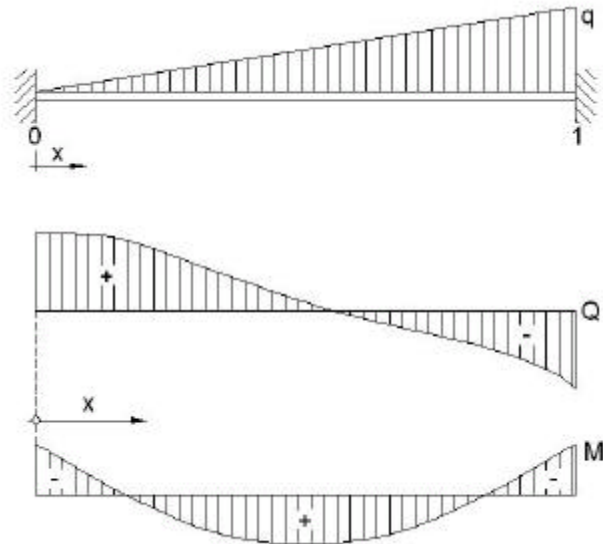
$$+M_{\max} = \frac{qL^2}{46,6} \quad \text{en } x = 0,548 L$$

$$-M_{\max} = M(L) = -\frac{qL^2}{20}$$

$$M = 0 \quad \text{en } x = 0,237 L \text{ y } 0,808 L$$

$$w_1(x) = \frac{qxL^3}{120 D} \left( \frac{2x}{L} - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{x^4}{L^4} \right)$$

$$w_2(x) = \frac{qL}{20V} \left( 3x - \frac{10x^2}{3L^2} \right)$$



**BIBLIOGRAFIA**

- 1) Barscht Oyarzún Felix  
“Análisis Estático Lineal de una Embarcación Multicasco Utilizando el Método de Elementos Finitos”.  
Tesis de grado, Escuela de Ingeniería Naval.  
Universidad Austral de Chile, 2001.
- 2) Bathe Klaus – Jürgen  
“Finite Element Procedures in Engineering Analysis”  
Department of Mechanical Engineering  
Massachusetts Institute of Technology, 1982.
- 3) Clarke L. John  
“Structural Desing of Polymer Composites”  
The European Structural Polimeric Composites Group.
- 4) Divinycell  
Technical Manual  
Sweden, October 1991.
- 5) Feodosiev. V.I.  
“Resistencia de materiales” 1985
- 6) González Díez J.L.  
“Materiales compuestos” Tecnología de los plásticos reforzados.  
Universidad Politécnica de Madrid, 1992.
- 7) Samartín Quiroga Avelino  
“Curso de Elasticidad”  
Librería Editorial Bellisco, Madrid 1990.
- 8) Smith C.S.  
“Desing of Marine Structures in Composite Materials”  
Ed. Elsevier Science publishing Co, 1990.

- 9) Spyrakos Constantine C.  
"Finite Element Modeling in Engineering Practice".  
Ed. ALGOR publishing división, 1994, 1996.
  
- 10)Spyrakos Constantine C.; Raftoyiannis John.  
"Linear and Nonlinear Finite Element Analysis in Engineering Practice".  
Ed. ALGOR publishing división, 1997.
  
- 11)Timoshenko S.  
"Resistencia de materiales"  
Ed. Mir, 1976.
  
- 12)Vera Castro Roberto  
"Comparación entre Ensayos Mecánicos de Flexión y Estudios Numéricos de Deformación de Probetas de Materiales Compuestos".  
Tesis de grado, Escuela de Ingeniería Naval.  
Universidad Austral de Chile, 2001.
  
- 13)Zienkiewicz  
"El Método de los Elementos Finitos"  
Madrid, 1994.