

UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE

Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Escuela de Ingeniería Acústica



Profesor Patrocinante:
Jorge Arenas B.
Instituto de Acústica
Universidad Austral de Chile

Profesor Co-Patrocinante:
Rolando Ríos R.
Instituto de Materiales y Procesos
Termodinámicos
Universidad Austral de Chile

Investigación del método fracción racional Polinómica para la extracción de parámetros modales a través de la técnica de impacto

Tesis presentada como parte de los
requisitos para optar al grado de
Licenciado en Acústica y al Título
Profesional de Ingeniero Acústico.

Cristian Andrés Gutiérrez Acuña

Valdivia Chile 2002

Agradecimientos

Deseo expresar mis agradecimientos al Profesor Dr. Jorge Arenas del Instituto de Acústica de la Universidad Austral y al Profesor Rolando Ríos del Instituto de Materiales y Procesos Termodinámicos de la Universidad Austral por ayudarme en la supervisión y asesoría de esta Tesis.

Agradezco a Mark Richardson de Vibrant Technologies, Dr. Nuno M.Maia del Departamento de Ingeniería Mecánica del Imperial College y al Dr. Scott Doebling de Los Alamos National Laboratory por responder tan amablemente a mis consultas y en especial al Profesor Michael Friswell del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Wales Swansea, que sin su ayuda yo no podría haber concluido mi trabajo.

Quiero agradecer también al Profesor Dr. Pedro Saavedra por facilitarme el uso del laboratorio de vibraciones mecánicas de la Universidad de Concepción, y a Sergio Oyarzún por ayudarme a realizar las mediciones experimentales.

Un muy especial agradecimiento y gratitud a mis padres, Dagoberto Gutiérrez y Gladys Acuña, y a mis hermanos, Verónica, Carlos y Ximena, por todos estos años de apoyo y comprensión. Sin ellos yo no podría haber sido el que soy ahora. Sinceramente gracias.

	Pag.
ÍNDICE	1
RESUMEN	3
SUMMARY	4
INTRODUCCIÓN	5
OBJETIVOS GENERALES y ESPECÍFICOS	6
CAPÍTULO 1: TEORÍA MODAL	
1.1 Supuestos Básicos	7
1.2 Teoría Modal	8
1.3 Función de Transferencia. Dominio de Laplace	12
1.4 Función Respuesta de Frecuencia	18
1.4.1 Formas Alternativas de FRF	22
CAPÍTULO 2: ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL	
2.1 Introducción	25
2.2 Adquisición de Datos	26
2.2.1 Excitación de Impacto	27
2.2.1.1 Martillo de Impacto	27
2.2.1.2 Respuesta de Salida	28
2.2.2 Conversión Análogo-Digital	30
2.2.3 Función Ventana	31
2.2.3.1 Ventana de Decaimiento Exponencial	32
2.2.4 Estimación de la FRF	33
2.2.4.1 Tipos de Errores	35
2.2.5 Función de Coherencia	35
2.3 Calibración	36
CAPÍTULO 3: EXTRACCIÓN PARÁMETROS MODALES	
3.1 Clasificación de Métodos de Identificación	38

3.2	Método Fracción Racional Polinómica	41
3.2.1	Introducción	41
3.2.2	Teoría	41
3.2.3	FRF en Términos de Polinomios Ortogonales	45
3.2.4	Principio de Ortogonalidad	46
3.2.5	Polinomios Ortogonales en Términos de Funciones Positivas	47
3.2.6	Generación de Polinomios Ortogonales. Método de Forsythe	50
3.2.7	Cálculo de los Parámetros Modales	53

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS Y PROCEDIMIENTOS

4.1	Introducción	54
4.2	Descripción programa	54
4.3	Evaluación Teórica del Método	56
4.4	Evaluación Experimental del Método	57
4.4.1	Equipamiento	57
4.4.2	Configuración	58
4.4.3	Procedimientos	59

CAPÍTULO 5: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1	Caso Teórico	61
5.1.1	Modos Cercanamente Espaciados	61
5.2.2	Modos Fuertemente Acoplados	69
5.2.3	Discusión Resultados Teóricos	77
5.2	Caso Experimental	79
5.2.1	Discusión Resultados Experimentales	83
5.3	Conclusiones	85

ANEXO A	87
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88
CÓDIGOS FUENTES PROGRAMA	90

El comprender el comportamiento dinámico de una estructura, es parte esencial de un diseño de ingeniería. Debido al fenómeno de resonancia (asociado a una frecuencia natural y una forma modal), una estructura puede presentar problemas vibratorios y daños estructurales. Por lo tanto, es necesario el identificar estas frecuencias naturales y conocer como estas pueden afectar la respuesta de una estructura debido a una fuerza excitadora. El procedimiento que ayuda a describir las propiedades dinámicas de una estructura es conocido como Análisis Modal.

El presente trabajo, introduce a la Teoría Modal para un sistema forzado con amortiguamiento viscoso, las técnicas de adquisición de datos para Análisis Modal Experimental y el método Fracción Racional Polinómica (RFP) implementado en un programa computacional para Matlab, que identifica los parámetros modales de una estructura (frecuencias naturales, amortiguamientos y formas modales). Para explorar las capacidades de identificación del método RFP, se realizaron Funciones Respuestas de Frecuencias (FRFs) simuladas con modos cercanos y modos acoplados. Ambas FRF fueron generadas sin ruido para demostrar la exactitud del método y con ruido a modo de representar un modelo cercano a una medición experimental. Para ambos casos se obtuvieron resultados bastantes buenos si era sobre estimado el número de modos presentes en el rango de frecuencias escogido alrededor de los modos de interés. El método se aplicó además a mediciones experimentales realizadas con la técnica de impacto. Los resultados obtenidos presentaron errores debidos principalmente a errores en los procedimientos de adquisición.

Understanding the dynamic behavior of structures is very important for the engineering design. Due to resonance phenomenon (natural frequency and mode shape) a structure can present structural damages. Therefore it is necessary to identify these frequencies and know how they might affect the response when a force excites the structure. The procedure that describe the dynamic properties of a structure is known as Modal Analysis.

The present work introduces the modal theory to a forced system with viscous damping, the data acquisition technique to experimental modal analysis and the Rational Fraction Polinomial (RFP) method which was implemented in a computational program for Matlab, to identify the modal parameters of a structure (natural frequencies, damping and mode shape). This method can also be used for identifying poles, zeros and resonances of electro-mechanical-acoustic systems.

To explore the identification capabilities of the RFP method, Frequencies Response Function (FRF) were simulated with close spaced modes and acoplated modes. Both FRF were generated without noise to demonstrate the accuracy of the method and then with noise to represent a model closer to an experimental measurement. For both cases very good results were obtained if the number of modes present in the range of frequencies chosen around the modes of interest is overestimated.

The method was also applied to experimental measurements made with the impact method. The results obtained presented errors because of bias in the acquisition procedure.

El problema vibratorio es generalmente asociado con el fenómeno de resonancia. Una resonancia ocurre cuando las fuerzas dinámicas de un proceso excitan las frecuencias naturales o modos de vibración de la estructura. Debido a éste fenómeno, la vibración mecánica de los componentes de una estructura puede causar en algunas ocasiones daños estructurales. De esta forma, entender el fenómeno vibratorio es parte esencial del diseño de cualquier estructura.

En nuestros días es de gran uso el Método de Elementos Finitos (FEM) para el estudio de las características vibratorias de estructuras complejas. Sin embargo, para poder comprobar sus estimaciones y validar el modelo analítico, es necesario establecer un modelo experimental del sistema ejecutando una prueba vibratoria y el subsecuente análisis de la información medida. Este proceso, incluyendo la adquisición de datos y el posterior análisis es conocido como *Análisis Modal Experimental*.

El principal objetivo del análisis modal es obtener un modelo matemático de una estructura determinado por sus parámetros modales (frecuencias naturales, amortiguamientos y formas modales), para todos los modos en un rango de frecuencias de interés, lo cual constituye la descripción de las propiedades dinámicas de una estructura.

OBJETIVOS GENERALES

- Desarrollo y explicación de la teoría modal.
- Proveer una detallada explicación de la teoría del método Fracción Racional Polinómica.
- Implementación de un procedimiento automático del método mediante un programa computacional.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollo e implementación de un programa computacional de fácil ejecución para la visualización analítica y experimental de la Función Respuesta de Frecuencia (FRF).
- Extracción de las frecuencias de naturales, razones de amortiguamiento y constantes modales, a partir de la Función Respuesta de Frecuencia usando el método Fracción Racional Polinómica (RFP), implementado en un programa computacional.
- Explorar las capacidades del método para la identificación de las frecuencias de naturales, razones de amortiguamiento y constantes modales.

1.1 SUPUESTOS BÁSICOS

Para el desarrollo de la teoría modal [4,7-10,18,19] y la teoría de las técnicas de extracción de parámetros modales [4,6,7,21-25], se asumen cuatro supuestos básicos:

1. *La estructura es asumida como lineal.* La respuesta de la estructura es siempre proporcional a la excitación. Este supuesto tiene dos implicaciones:

1.1 *Superposición.* La respuesta de la estructura para cualquier combinación de fuerzas, simultáneamente aplicadas, es la suma de las respuestas individuales para cada una de las fuerzas actuando por sí sola.

1.2 *Homogeneidad.* La medición de la función respuesta de frecuencia de la estructura es independiente del nivel de excitación.

2. *La estructura es invariante en el tiempo.* Los parámetros a ser estimados son constantes. Si el sistema fuera variante en el tiempo, los componentes como la masa, amortiguación y rigidez dependerían de factores que no son medidos o no son incluidos en el modelo. Un ejemplo sería la dependencia de la temperatura.

3. *La estructura obedece el teorema de Maxwell (Reciprocidad).* Una fuerza aplicada a un grado de libertad p causa una respuesta en el grado de libertad q que es la misma respuesta en el grado de libertad p causado por la misma fuerza aplicada en el grado de libertad q .

4. *La estructura se considera con amortiguación viscosa.*

1.2. TEORÍA MODAL

La ecuación general de movimiento para una estructura vibratoria de N grados de libertad con amortiguación viscosa es descrita por un conjunto de N ecuaciones simultáneas lineales diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes. Esta puede ser escrita en forma matricial de la forma

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} , \quad (1.1)$$

donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son matrices de orden $N \times N$ reales simétricas, definidas como matrices de masa, amortiguación y rigidez, respectivamente, $\{f(t)\}$ es el vector de fuerzas aplicadas, $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ y $\{x(t)\}$ representan los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente.

Puesto que la matriz de amortiguación no es proporcional a la matriz de masa y/o a la matriz de rigidez, este tipo de amortiguación puede clasificarse como *no proporcional*. Cuando un sistema contiene amortiguación no proporcional, la formulación ocupada en el problema de valores propios para un sistema no amortiguado no admitirá vectores modales que desacoplen las ecuaciones de movimiento del sistema.

Una técnica usada para resolver este problema, envuelve la reformulación de las originales ecuaciones de movimiento para un sistema de N grados de libertad dentro de un conjunto equivalente de $2N$ ecuaciones diferenciales conocidas como *Ecuaciones Canónicas Hamiltonianas* [7].

Para resolver estas $2N$ ecuaciones lineales diferenciales se define un vector complejo $\{y(t)\}$ el cual contiene los vectores de desplazamiento $\{x(t)\}$ y velocidad $\{\dot{x}(t)\}$

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix}_{2N \times 1} . \quad (1.2)$$

Las $2N$ ecuaciones son escritas reescribiendo la ecuación general de movimiento en términos del vector complejo $\{y(t)\}$ y sumando una ecuación identidad. De este modo se obtiene

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \{\dot{y}(t)\} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (1.3)$$

ó simplemente

$$[A]\{\dot{y}(t)\} + [B]\{y(t)\} = \{f'(t)\}. \quad (1.4)$$

Esta formulación es frecuentemente llamada *Representación Espacio-Estado*, donde $[A]$ y $[B]$ son matrices $2N \times 2N$ reales simétricas y $\{f'(t)\}$ es un vector complejo de orden $2N \times 1$.

Se debe considerar primero la solución homogénea de la Ec. (1.4) para determinar los modos naturales del sistema, esto es

$$[A]\{\dot{y}(t)\} + [B]\{y(t)\} = \{0\}. \quad (1.5)$$

Puesto que las matrices $[A]$ y $[B]$ tienen elementos distintos de cero fuera de la diagonal, las $2N$ ecuaciones están acopladas. Este acoplamiento indica que la fuerza aplicada a una masa causará una reacción en todas las otras masas, haciendo el análisis de este modelo muy complicado.

El procedimiento de desacoplamiento consiste en transformar la Ec. (1.5) a coordenadas modales, usando una transformación de coordenadas. Asumiendo que es posible expresar la respuesta del sistema espacio-estado como una superposición de las $2N$ respuestas del sistema, en el cual la coordenada es designada por p_i

$$\{y(t)\} = \sum_{i=1}^{2N} \{\psi_i'\} p_i(t), \quad (1.6)$$

donde $\{\psi'_i\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_i\} \\ s_i \{\psi_i\} \end{Bmatrix}$, en forma matricial

$$\{y(t)\} = [\Psi'] \{p(t)\} , \quad (1.7)$$

donde $[\Psi'] =$ Matriz modal, y $\{p(t)\} =$ Vector coordenada modal.

La matriz modal $[\Psi']$ es una matriz compleja de orden $2N \times 2N$ y es escrita usando cada solución vectorial de los modos normales $\{\psi'_i\}$ como una columna simple.

Sustituyendo la Ec. (1.7) en la Ec. (1.5) y luego de multiplicar la ecuación por la matriz modal transpuesta, se obtiene

$$[\Psi']^T [A] [\Psi'] \{\dot{p}(t)\} + [\Psi']^T [B] [\Psi'] \{p(t)\} = \{0\} . \quad (1.8)$$

Este modelo modal tiene una importante propiedad matemática llamada *ortogonalidad* con respecto a las matrices $[A]$ y $[B]$. El resultado es una matriz con valores cero fuera de la diagonal, es decir

$$\begin{aligned} [\Psi']^T [A] [\Psi'] &= [a_{i\lambda}] \\ [\Psi']^T [B] [\Psi'] &= [b_{i\lambda}] , \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde a_i y b_i son llamadas *modal A* y *modal B*, respectivamente. Estas cantidades tienen las mismas propiedades que la masa modal y rigidez modal para un sistema sin amortiguación.

Puesto que el vector modal $\{\psi'_i\}$ no representa una medición "absoluta" de desplazamiento, la información que contiene es la relación de amplitud de cualquier grado de libertad comparado a todos los

otros grados de libertad. Por lo tanto, se debe normalizar los vectores modales tal que el correspondiente a_i sea igual a 1. Los vectores usados de esta manera son llamados *ortonormalizados* con respecto a la matriz $[A]$, es decir

$$\begin{aligned} [\phi']^T [A][\phi'] &= [I_n] \\ [\phi']^T [B][\phi'] &= [-s_i] \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde $\{\phi'\} = \frac{1}{\sqrt{a_i}} \{\psi_i'\} =$ Vector modal normalizado.

$-s_i = \frac{b_i}{a_i} =$ Solución de la ecuación característica.

$[I_n] =$ Matriz identidad.

Es sabido que la solución de la ecuación característica es de la forma:

$$s_i = -\omega_i \xi_i \pm \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (1.11)$$

donde $\omega_i =$ Frecuencia natural del sistema, y $\xi_i =$ Razón de amortiguamiento.

Ahora, reemplazando la Ec. (1.7) en la ecuación general de movimiento forzada (Ec. (1.4)) y luego multiplicando ambos lados de la ecuación por la matriz modal transpuesta, se obtiene,

$$[\Psi']^T [A][\Psi'] \{\dot{p}(t)\} + [\Psi']^T [B][\Psi'] \{p(t)\} = [\Psi']^T \{f'(t)\} \quad (1.12)$$

Sustituyendo la Ec. (1.10) en Ec. (1.12), se tiene

$$\{\dot{p}(t)\} - [s_i] \{p(t)\} = \frac{1}{a_i} [\Psi']^T \{f'(t)\} . \quad (1.13)$$

Como estas ecuaciones de movimiento están desacopladas, pueden ser vistas como un conjunto de independientes modelos $2N$ simples grados de libertad, uno para cada modo en el modelo $2N$ múltiples grados de libertad,

$$\dot{p}_i(t) - s_i p_i(t) = \frac{1}{a_i} \{\Psi'_i\}^T \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \{\Gamma_i\} . \quad (2.14)$$

1.3 FUNCION DE TRANSFERENCIA. DOMINIO DE LAPLACE

Transformada de Laplace

Una función de variable real $f(t)$, definida en todo el campo de los números reales, le corresponde una nueva función $F(s)$, llamada transformada de Laplace, definida por la expresión [16]:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s t} f(t) dt , \quad (1.15)$$

donde $s = \sigma + j\omega$ = Variable compleja de Laplace.

Aplicando la transformada de Laplace a la Ec. (1.13), se obtiene

$$\{s P(s) - P(0)\} - [s_i] \{P(s)\} = \frac{1}{a_i} [\Psi']^T \{F'(s)\} . \quad (1.16)$$

si las condiciones iniciales son cero, obtenemos

$$[s - s_i] \{P(s)\} = \frac{1}{a_i} [\Psi']^T \{F'(s)\} . \quad (1.17)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la Ec. (1.6) y reemplazando el resultado en la Ec. (1.17), se puede relacionar el vector fuerza aplicada $\{F(s)\}$ con el vector complejo $\{Y(s)\}$ en el dominio de Laplace en términos de las propiedades modales, esto es

$$\{Y(s)\} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{a_i} \frac{\{\Psi_i'\} \{\Psi_i'\}^T}{(s - s_i)} \{F'(s)\} , \quad (1.18)$$

ó

$$\left\{ \begin{array}{l} \{X(s)\} \\ s \{X(s)\} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \begin{array}{l} \{\Psi_i\} \\ s_i \{\Psi_i\} \end{array} \right\} \frac{1}{a_i (s - s_i)} \{\Psi_i\}^T \{F(s)\} . \quad (1.19)$$

De este modo, se obtiene una expresión para la *Receptancia* (Ec. (1.20))

$$\frac{\{X(s)\}}{\{F(s)\}} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{a_i} \frac{\{\Psi_i\} \{\Psi_i\}^T}{(s - s_i)} = [\mathbf{H}(s)] , \quad (1.20)$$

y *Mobilidad* (Ec. (1.21)) en el dominio de Laplace por medio de una función de transferencia

$$\frac{s \{X(s)\}}{\{F(s)\}} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{s_i}{a_i} \frac{\{\Psi_i\} \{\Psi_i\}^T}{(s - s_i)} = s [\mathbf{H}(s)] . \quad (1.21)$$

donde $[\mathbf{H}(s)] =$ Matriz función de transferencia.

Puesto que los valores propios y vectores propios ocurren en pares conjugados complejos, la matriz función de transferencia puede reescribirse como

$$[\mathbf{H}(s)] = \frac{\{X(s)\}}{\{F(s)\}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{[R_i]}{(s-s_i)} + \frac{[R_i^*]}{(s-s_i^*)} \right), \quad (1.22)$$

donde $[R_i] = \frac{1}{a_i} \{\psi_i\} \{\psi_i\}^T =$ Matriz residuo, y $[R_i^*] = \frac{1}{a_i^*} \{\psi_i^*\} \{\psi_i^*\}^T =$ Matriz residuo complejo.

Las dos raíces del denominador de la función de transferencia son llamadas *polos* de la función de transferencia y son conjugados complejos uno de otro, esto es

$$\begin{aligned} s_i &= -\sigma_i + \mathbf{j}\omega d_i \\ s_i^* &= -\sigma_i - \mathbf{j}\omega d_i \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde $\sigma_i = \omega_i \xi_i =$ *Factor de amortiguamiento modal*, y $\omega d_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} =$ *Frecuencia modal amortiguada*.

La información dentro del plano de Laplace de cero amplitud para un simple grado de libertad es mostrada en la Fig. 1.1.

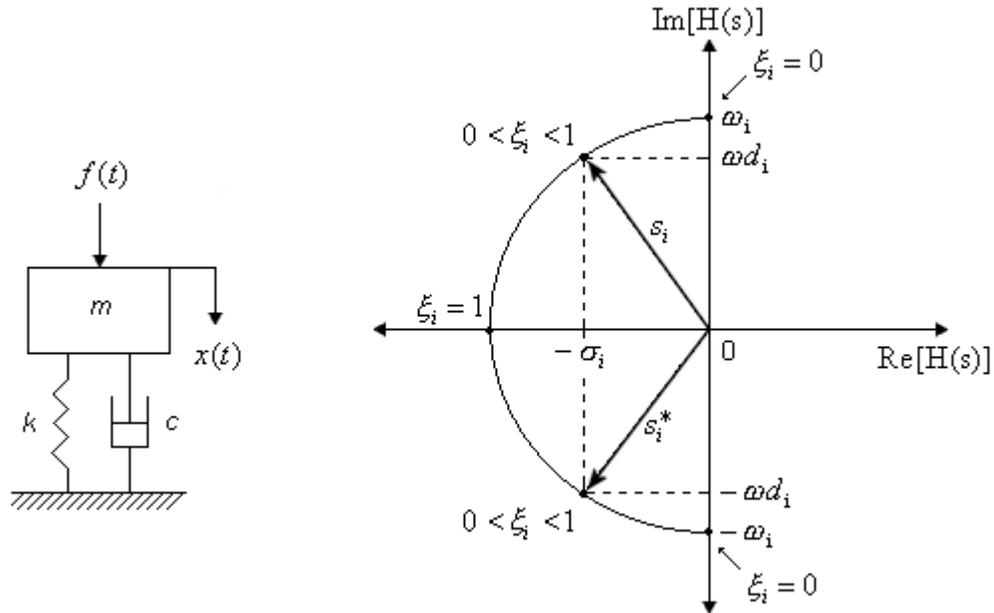


Fig. 1.1: Ilustración de los parámetros de frecuencia y amortiguación asociados con el par de polos conjugados complejos para un sistema de un grado de libertad.

Los polos s_i y s_i^* , son propiedades comunes a todas las funciones de transferencia y son llamados propiedades globales, mientras que los residuos R_i y R_i^* , son específicos a cada función de transferencia y son llamados propiedades específicas.

El significado físico de las dos partes, real e imaginaria, de los polos de la función de transferencia puede ser ilustrado observando la *Función Respuesta de Impulso* (Ec.1.24) para un simple grado de libertad que se muestra en la Fig.1.2. La función respuesta de impulso ó IRF es calculada aplicando la transformada inversa de Fourier a la función respuesta de frecuencia ó FRF (Sección 1.4), y es usada por métodos de extracción de parámetros modales que trabajan en el dominio del tiempo. La obtención de la IRF, como su aplicación, puede ser encontrada en la referencia [9].

La matriz IRF se expresa por

$$[H(t)] = \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_i t} ([R_i] e^{j\omega d_i t} + [R_i^*] e^{-j\omega d_i t}), \quad (1.24)$$

donde $[H(t)]$ = Matriz función respuesta de impulso.

El coeficiente R_i y R_i^* controla la amplitud de la respuesta de impulso. El factor de amortiguamiento modal σ_i es la parte real de los polos y describe el decaimiento exponencial o extensión de la oscilación. La frecuencia modal amortiguada ωd_i es la parte imaginaria y es la que describe la parte oscilatoria.

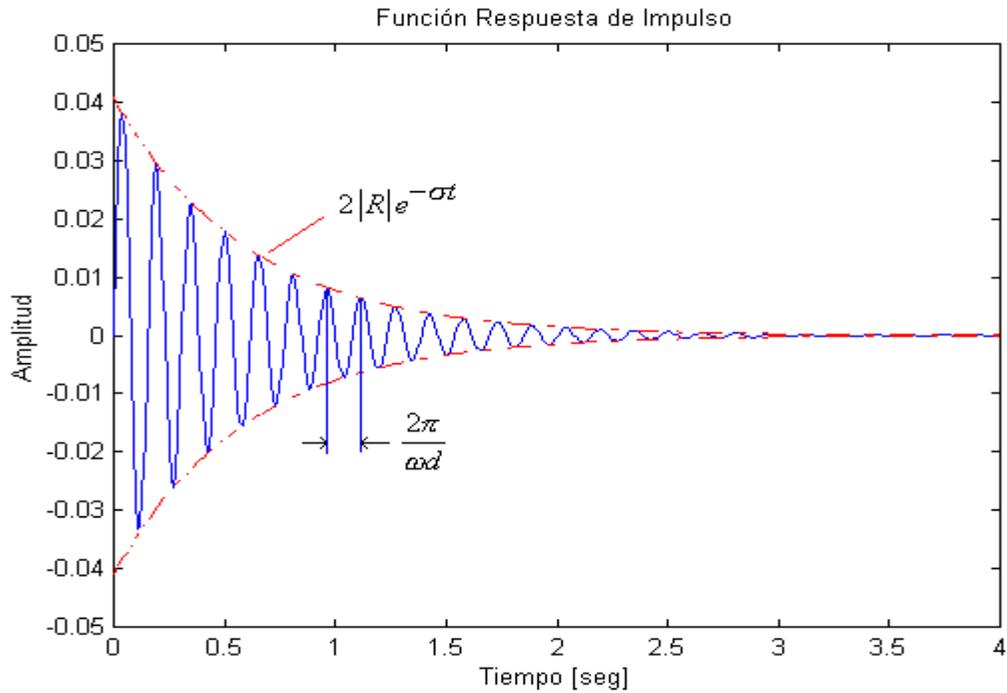


Fig. 1.2: Función respuesta de impulso de un sistema de un grado de libertad en términos del factor de amortiguamiento y la frecuencia modal amortiguada.

La función de transferencia es un valor complejo, por tanto tiene dos partes, Real e Imaginaria ó Magnitud y Fase, esto es

$$\mathbf{H}(s) = \text{Re}\{\mathbf{H}(s)\} + j\text{Im}\{\mathbf{H}(s)\} = |\mathbf{H}(s)| e^{j\angle\mathbf{H}(s)} \quad (1.25)$$

El módulo $|\mathbf{H}(s)|$ describe amplitud y la fase $\angle\mathbf{H}(s)$ expresa el tiempo de respuesta con respecto a la fuerza. La Fig. 1.3 muestran la función de transferencia en el plano complejo de Laplace para un simple grado de libertad.

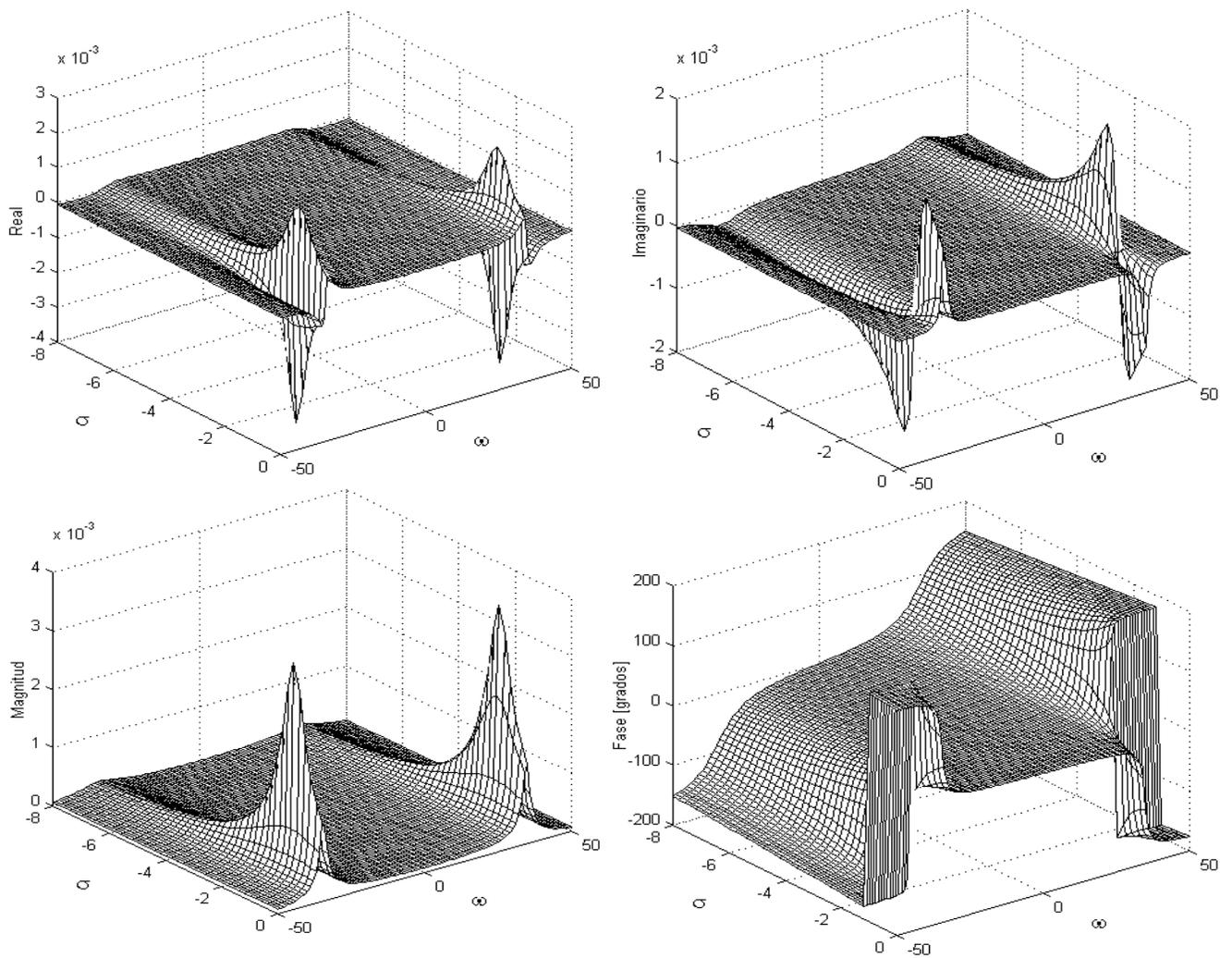


Fig. 1.3: Función de Transferencia en su parte *real*, *imaginaria*, *magnitud* y *fase* para un sistema de un grado se libertad.

1.4 FUNCIÓN RESPUESTA DE FRECUENCIA

Un caso particular de la función de transferencia definida por la Ec.(1.22), evaluada a lo largo del eje $j\omega$, esto es $s = j\omega$, es la *Función Respuesta de Frecuencia* o *FRF*

$$[\mathbf{H}(s)]|_{s=j\omega} = [\mathbf{H}(j\omega)] = \frac{\{X(j\omega)\}}{\{F(j\omega)\}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{[R_i]}{(j\omega - s_i)} + \frac{[R_i^*]}{(j\omega - s_i^*)} \right), \quad \frac{m}{N} \quad (1.26)$$

donde $[\mathbf{H}(j\omega)] =$ Matriz función respuesta de frecuencia.

Sabiendo que la matriz residuo es un valor complejo al igual que los polos, la expresión de la FRF puede ser reducida a la forma:

$$[\mathbf{H}(j\omega)] = \sum_{i=1}^N \frac{A_i + j\omega B_i}{(\omega_i^2 - \omega^2) + 2j\xi_i \omega_i \omega}, \quad (1.27)$$

donde $A_i = -2[\text{Re}(R_i)\text{Re}(s_i) + \text{Im}(R_i)\text{Im}(s_i)]$, y $B_i = 2\text{Re}(R_i)$.

Esta FRF (al igual que la función de transferencia) puede ser interpretada como la suma de las respuestas individuales de simples grados de libertad dentro del modelo de N grados de libertad (Fig.1.4),

donde cada respuesta ó término de la sumatoria tiene como polo $s_i = -\omega_i \xi_i + \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$; $i = 1, \dots, N$.

Evaluando la FRF en $\omega = \omega_i$, desde la Ec. (1.27), la magnitud y fase de la *Constante Modal* (numerador de la FRF) estará dada por:

$$C_i = \sqrt{A_i^2 + \omega_i^2 B_i^2}, \text{ y } \phi_i = \text{tg}^{-1} \frac{\omega_i B_i}{A_i} \quad (1.28)$$

La constante modal es un número complejo que define el movimiento relativo (magnitud y fase) entre dos coordenadas de una estructura en resonancia. A través de este parámetro, es posible determinar el patrón de deformación (*Forma Modal*) de una estructura en cada frecuencia natural [7], que tomará diferentes formas dependiendo de cual frecuencia es usada por la fuerza excitadora [3].

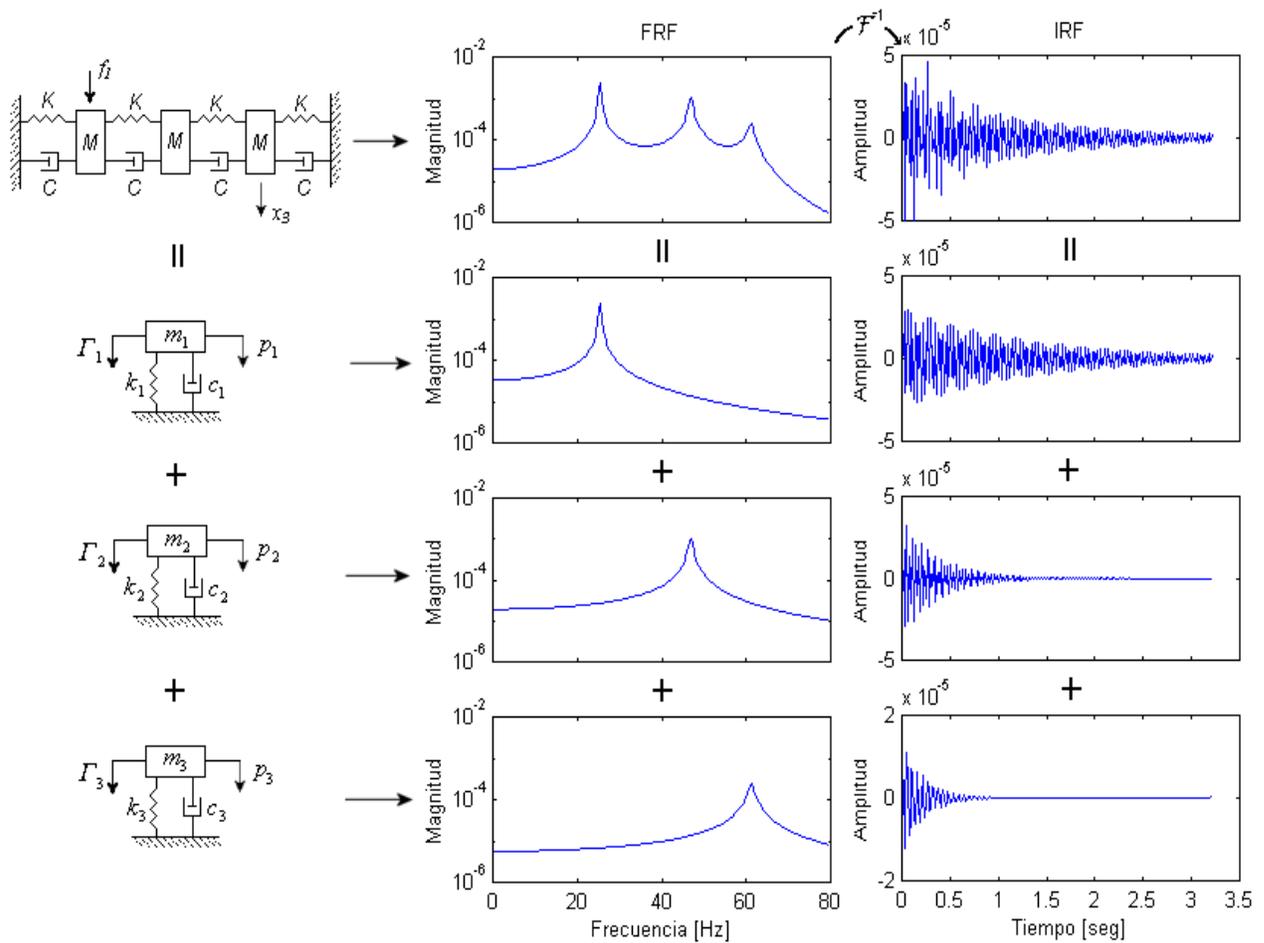


Fig.1.4: Ilustración de la FRF e IRF analítica (respuesta en x_3 debido a una fuerza excitadora de tipo transiente en f_1) para un sistema de 3 grados de libertad con amortiguación viscosa ($M = 0.3\text{kg}$, $C = 0.8\text{Ns/m}$, $K = 13000\text{N/m}$) representada como la suma de respuestas individuales de simples grados de libertad.

Puesto que las matrices de masa, amortiguación y rigidez son matrices simétricas, la matriz FRF también es simétrica. Esto implica que $H_{pq}(j\omega) = H_{qp}(j\omega)$, lo cual es llamado *Reciprocidad* (supuesto básico N^o 3). De este modo, no es necesario obtener todos los términos de la matriz FRF para obtener la forma modal del sistema. A modo de ejemplo, observemos la forma de la matriz FRF para el sistema de 3 grados de libertad mostrado en Fig.1.5, donde los sub-índices de cada término de la matriz FRF indican localización de salida y entrada, respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ X_3(\omega) \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} H_{1,1}(\omega) & H_{1,2}(\omega) & H_{1,3}(\omega) \\ H_{2,1}(\omega) & H_{2,2}(\omega) & H_{2,3}(\omega) \\ H_{3,1}(\omega) & H_{3,2}(\omega) & H_{3,3}(\omega) \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad (1.29)$$

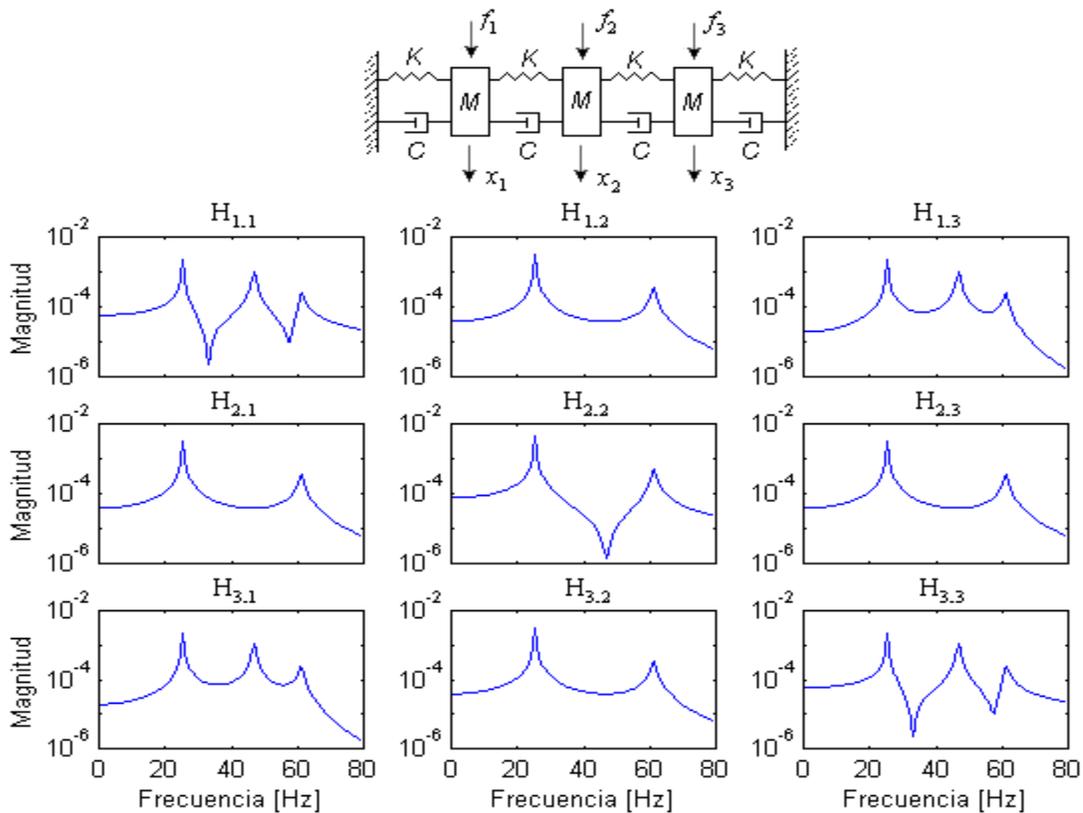


Fig.1.5: Ilustración de la matriz FRF de un sistema de 3 grados de libertad con amortiguación viscosa ($M = 0.3\text{kg}$, $C = 0.8\text{Ns/m}$,

$K = 13000\text{N/m}$).

Debido a la reciprocidad de la matriz FRF, basta con obtener sólo una fila o columna de esta matriz. Así es posible excitar un grado de libertad solamente (por ejemplo, con un *shaker*), y medir la respuesta (por ejemplo, con un *acelerómetro*), en todos los otros grados de libertad (ver Fig. 1.6 (a)). Alternativamente, es posible medir la respuesta en un grado de libertad solamente y excitar (por ejemplo, con un *martillo de impacto*), todos los otros grados de libertad (ver Fig. 1.6 (b)). Para este último caso, la matriz FRF (con respuesta en x_3), es de la forma:

$$\{X_3(\omega)\} = \begin{bmatrix} H_{3,1}(\omega) & H_{3,2}(\omega) & H_{3,3}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

Para obtener las formas modales de este sistema, se deben calcular las magnitudes y las fases de las constantes modales de la matriz FRF en Ec. (1.30). El primer modo es formado por las primeras constantes modales de cada FRF, el segundo modo es formado por las segundas constantes modales de cada FRF y así sucesivamente, donde la magnitud representa la amplitud, y la fase representa la dirección de cada grado de libertad, como se muestra en la Fig. 1.7.

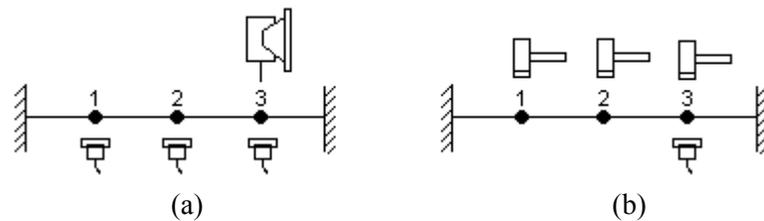


Fig. 1.6: Configuración de las posibles formas de medición, (a) con un shaker, y (b) con un martillo de impactos.

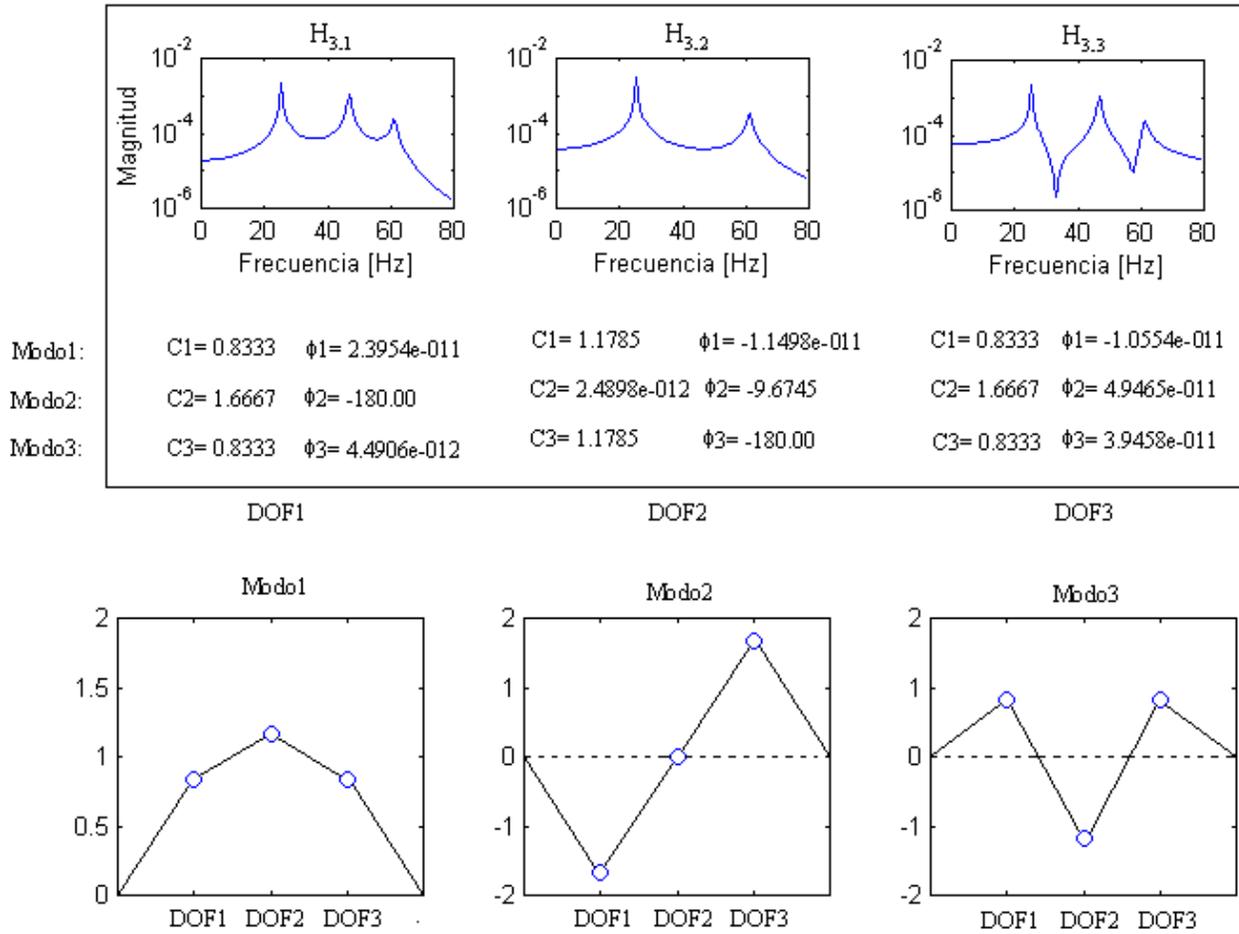


Fig.1.7: Las formas modales representan los patrones de deformación característicos para cada frecuencia natural y ésta es obtenida evaluando las constantes modales de cada FRF. En esta ilustración son obtenidas las formas modales del sistema de 3 grados de libertad mostrado en la Fig. 1.5.

1.4.1 FORMAS ALTERNATIVAS DE FRF

La función respuesta de frecuencia, $[H(j\omega)]$, definida como la razón entre la respuesta de desplazamiento armónica y la fuerza de excitación armónica, es llamada *Receptancia* (Ec.(1.26)). Pero

también puede seleccionarse la velocidad de respuesta como salida y así definir una función alternativa de respuesta de frecuencia llamada *Mobilidad*,

$$[M(j\omega)] = \frac{\{\dot{X}(j\omega)\}}{\{F(j\omega)\}} = j\omega [H(j\omega)] \quad \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{N}}. \quad (1.31)$$

Del mismo modo se puede seleccionar la aceleración de respuesta como salida y definir una tercera función respuesta de frecuencia llamada *Acelerancia*,

$$[A(j\omega)] = \frac{\{\ddot{X}(j\omega)\}}{\{F(j\omega)\}} = -\omega^2 [H(j\omega)] \quad \frac{\text{ms}^{-2}}{\text{N}}. \quad (1.32)$$

Receptancia, Mobilidad y Acelerancia representan los principales formatos de representación de la FRF (Fig. 1.8), aunque existen más posibilidades de representar la FRF a través del inverso de estas funciones, llamada *Rigidez Dinámica*, *Impedancia Mecánica* y *Masa Aparente*, respectivamente. Para modelación, la receptancia es la FRF generalmente ocupada; para mediciones experimentales la FRF ocupada es la acelerancia, puesto que un acelerómetro es el transductor más conveniente de usar.

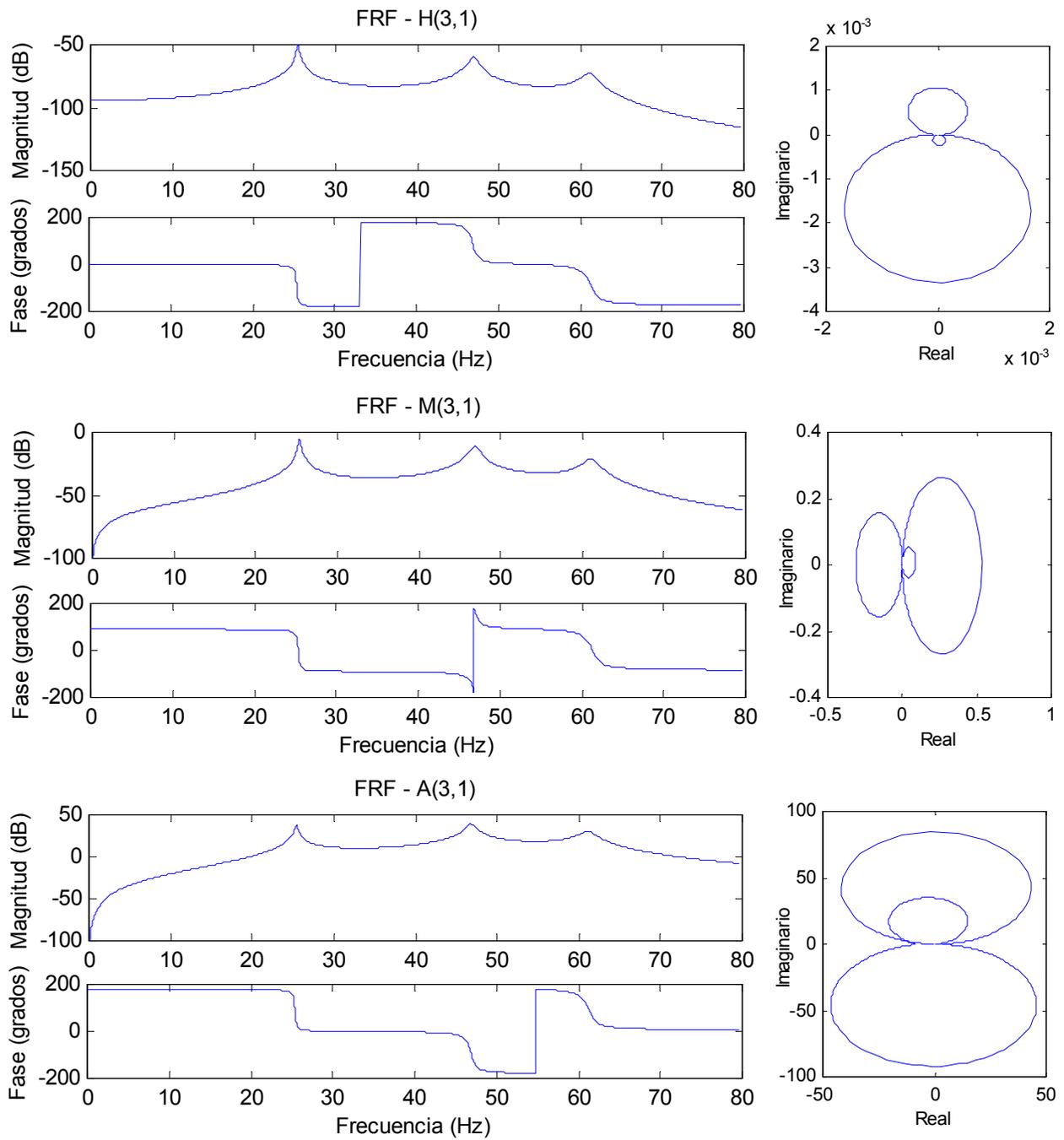


Fig. 1.8: Ilustración de la FRF también llamado *Diagrama de Bode* (magnitud y fase) y *Diagrama de Nyquist* (real vs imaginario) en formato receptancia, movilidad y acelerancia para el sistema de 3 grados de libertad mostrado en la Fig. 1.4.

2.1 INTRODUCCIÓN

La más importante medición necesaria para el análisis modal experimental es la función respuesta de frecuencia ó FRF. La FRF es normalmente usada para describir la relación de entrada-salida en el dominio de la frecuencia de algún sistema, por ejemplo, sistemas estructurales, eléctricos o acústicos. Puede ser visto como una "caja negra" donde el usuario necesita proveer la excitación análoga de entrada y la señal de respuesta (Fig. 2.1). La obtención de la FRF depende de la transformación desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, a través del uso de la *Transformada de Fourier*.

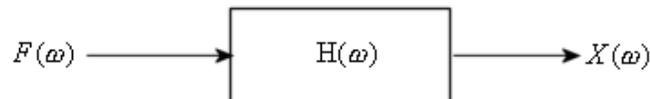


Fig. 2.1: Relación de entrada-salida de un sistema de una simple entrada y una simple salida ó sistema SISO (single input-single output).

Experimentalmente no es posible que la señal análoga a ser transformada sea infinita desde valores negativos a positivos, como lo requiere la transformada integral de Fourier. Más bien se obtiene una señal digitalizada y limitada en el dominio del tiempo. Esta digitalización de la señal, ó conversión de la señal análoga a una correspondiente secuencia de valores digitales que describe las características de variación en el tiempo de la señal de entrada y salida, requiere de técnicas importantes de procesamiento de señal.

En este capítulo se pretende hacer una revisión breve de los temas más importantes en la adquisición de datos para el análisis modal experimental usando la técnica de impacto.

2.2 ADQUISICIÓN DE DATOS

La adquisición de información modal sigue el proceso standard del análisis FFT de dos canales, en donde la excitación y la respuesta son medidas simultáneamente y así ambas señales pueden ser procesadas individualmente combinándose luego para obtener la mejor estimación de la FRF (Fig. 2.2). Esta técnica puede ser extendida a cualquier número de canales, pero esencialmente aquí se referirá al análisis de 2 canales.

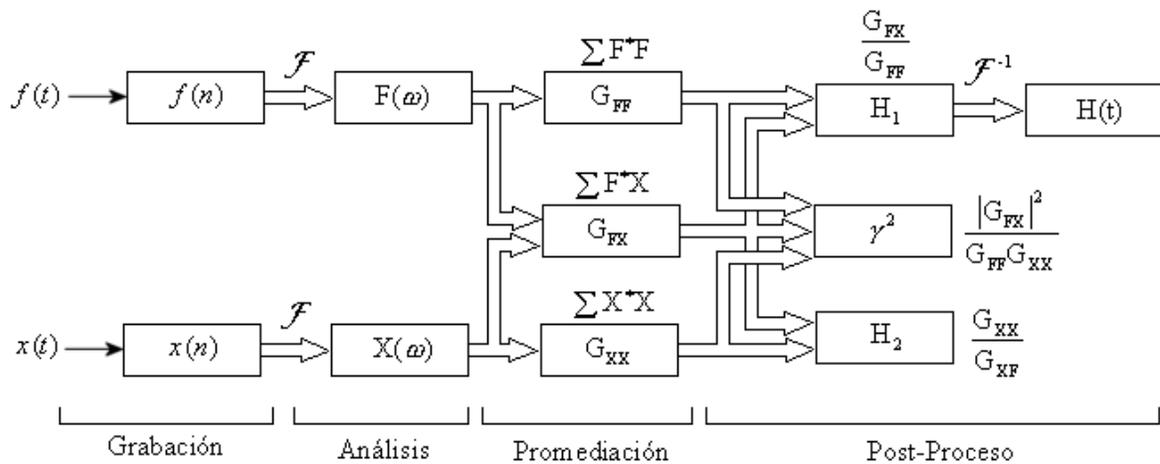


Fig.2.2: Diagrama en bloque de un análisis FFT a 2 canales [18].

El tipo de proceso requerido para cada señal individual, depende de qué método de excitación es usado. La excitación incluye alguna forma de entrada que es usada para crear una respuesta en el sistema mecánico. Esta puede incluir entrada de ambiente ó entrada operacional, como también la entrada de fuerza controlada que es la usada en pruebas de análisis modal. Existen dos métodos de excitación de fuerza controlada que son usadas generalmente, *excitación shaker* y *excitación de impacto*.

2.2.1 EXCITACIÓN DE IMPACTO

Una señal de impacto es una señal determinística transiente, la cual es formada aplicando un pulso de entrada a una sistema por sólo un período muy corto de tiempo. Este tipo de señal tiene la forma de una mitad de onda seno en el dominio del tiempo con período T y en cuanto a su espectro, este es esencialmente plano sobre un rango de frecuencias de cero a una frecuencia de corte f_c [7].

El rango de frecuencia de cero a f_c , es llamado *rango de operación*, donde f_c es el valor en frecuencia donde la magnitud del espectro a decaído de 10 a 20 dB.

2.2.1.1 MARTILLO DE IMPACTO

El instrumento requerido para la prueba de impacto es un *martillo de impactos*. Está constituido por un impactador, usualmente con un conjunto de puntas y cabezas, los cuales sirven para extender el rango de frecuencias y nivel de fuerza de operación en una variedad de diferentes estructuras, y un transductor de fuerza el cual detecta la magnitud de la fuerza ejercida por el impactador (Fig. 2.3).

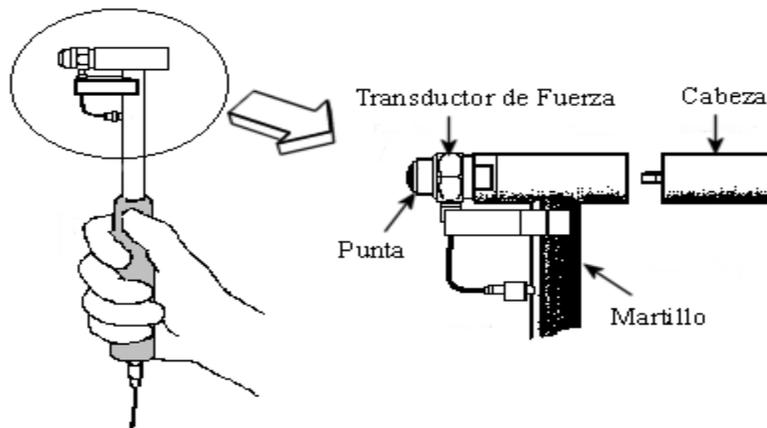


Fig. 2.3: Detalles de un martillo de impactos [18].

El rango de frecuencia de operación está controlado por la rigidez de la superficie de contacto del objeto de prueba y la masa del martillo de impacto. Como no es posible cambiar la rigidez del objeto de prueba, el rango de frecuencia de operación es controlado variando la rigidez de la punta del martillo (Fig. 2.4).

El nivel de amplitud de la energía aplicada a la estructura está determinado por la masa del martillo y la velocidad del martillo cuando golpea la estructura. Puesto que es difícil controlar la velocidad del martillo, el nivel de fuerza es usualmente controlado variando la masa de la cabeza [20].

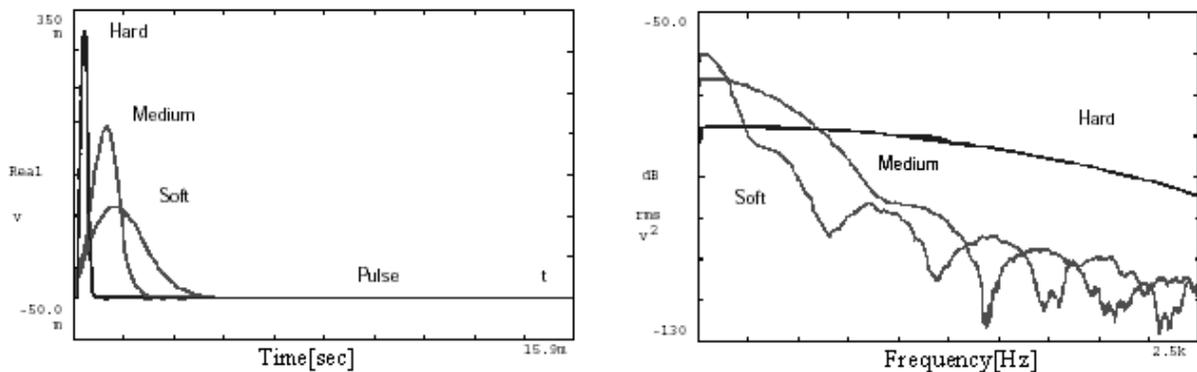


Fig. 2.4: Contenido en frecuencia de varios tipos de pulsos [20].

2.2.1.2 RESPUESTA DE SALIDA

El *acelerómetro piezoeléctrico* es el transductor más usado en las pruebas de análisis modal. El principio básico de operación es la generación de una carga eléctrica entre las superficies del piezoeléctrico debido a un esfuerzo mecánico. La fuerza ejercida en el cristal piezoeléctrico es la fuerza inercial de la masa sísmica que incorpora el acelerómetro (Fig. 2.5). De este modo, la salida del transductor será proporcional a la aceleración de éste cuerpo y por tanto de la estructura a la cual esta adherida [7,20].

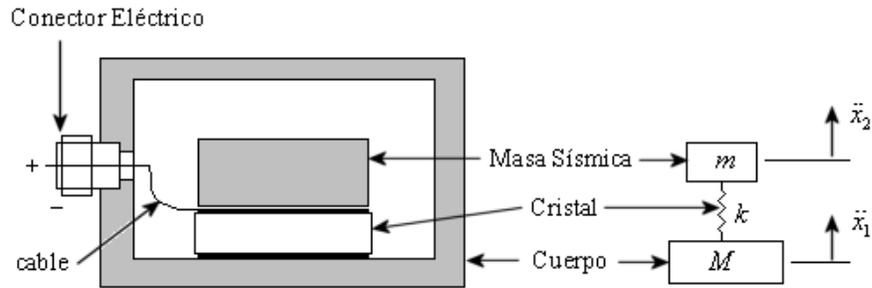


Fig. 2.5: Corte de una configuración de acelerómetro [21].

La frecuencia de resonancia del acelerómetro, la cual marcará el rango de trabajo de éste, es función de sus características de masa y rigidez. Sin embargo, la verdadera frecuencia de resonancia depende del método usado para adherir el acelerómetro a la estructura bajo prueba. Se muestra el efecto de varios métodos de montaje en Fig. 2.6 [9].

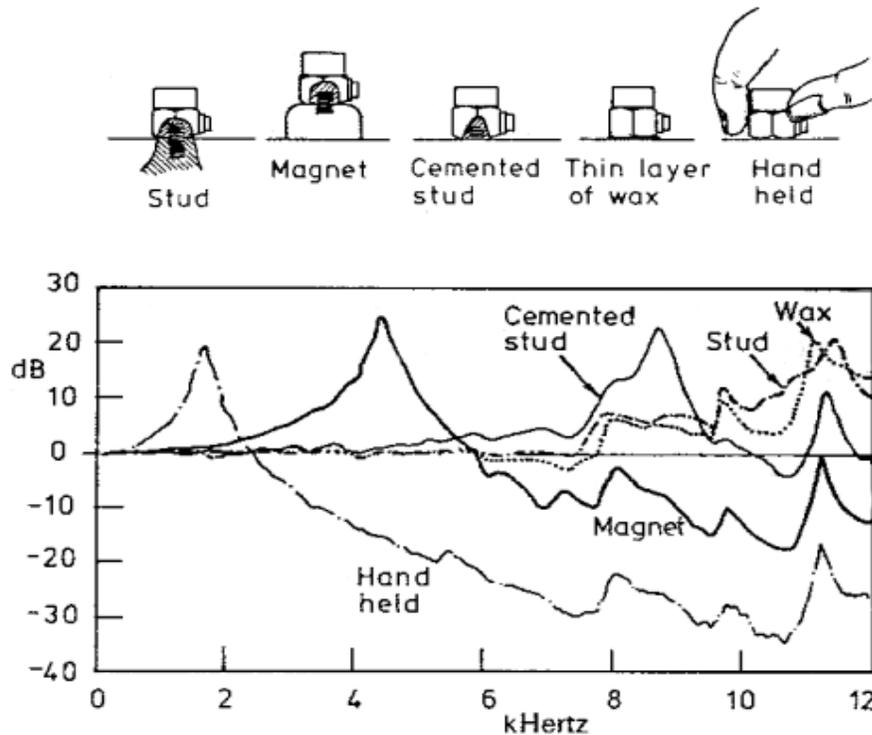


Fig. 2.6: Frecuencia de corte de distintos métodos de montaje de acelerómetros [9].

Otra importante consideración es el efecto de la carga estructural causada por el montaje del transductor, el cual puede alterar la masa, rigidez o amortiguación del sistema. El principal efecto es la carga de masa, que tiende a disminuir la medición de la frecuencia de resonancia. Para evitar esto, el uso de transductores livianos en estructuras livianas se consigue un mínimo de carga [20].

2.2.2 CONVERSIÓN ANÁLOGO-DIGITAL

El proceso de representar una señal análoga en una serie de valores digitales es conocido como conversión análogo-digital. Este proceso de conversión envuelve 2 conceptos: *discretización* y *cuantización*.

La discretización ó muestreo, es el proceso de grabación de la señal a una secuencia de valores digitales. Este proceso de discretización introduce una forma de error conocida como *Aliasing* que introduce energía de alta frecuencia en bajas frecuencias. Para garantizar que el aliasing no existirá se usan filtros anti-aliasing antes de ser discretizada la señal a una frecuencia mayor a 2 veces la más alta frecuencia de interés.

La cuantización, es la conversión de un específico valor análogo de amplitud al valor más cercano disponible en el convertidor análogo-digital. Puesto que solamente algunos valores discretos están disponibles en la conversión, la amplitud será frecuentemente un error. Este error es normalmente conocido como *Error de Distribución Gaussiana* [7].

La descripción detallada de estos procesos puede ser encontrada en cualquier libro sobre procesamiento digital de señales, por ejemplo en la referencia [25].

2.2.3 FUNCIÓN VENTANA

Una vez que la información está disponible en forma digital, la transformación de la información desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia es llevada a cabo por la DFT (Discrete Fourier Transform). Puesto que éste algoritmo incluye información discreta sobre un intervalo limitado de tiempo, esto puede introducir un potencial problema denominado *Leakage (Fuga)*.

El leakage es un problema básicamente debido a la violación de la suposición básica de la DFT. Esta suposición indica que la señal a ser discretizada es periódica en un intervalo de tiempo T . Si este no fuera el caso, es decir, la señal no es periódica o no decae completamente en el intervalo de tiempo usado (Fig. 2.7), se presentará un error de información llamado leakage cuando la respuesta en el dominio del tiempo sea transformada al dominio de la frecuencia, usando la Transformada Discreta de Fourier.

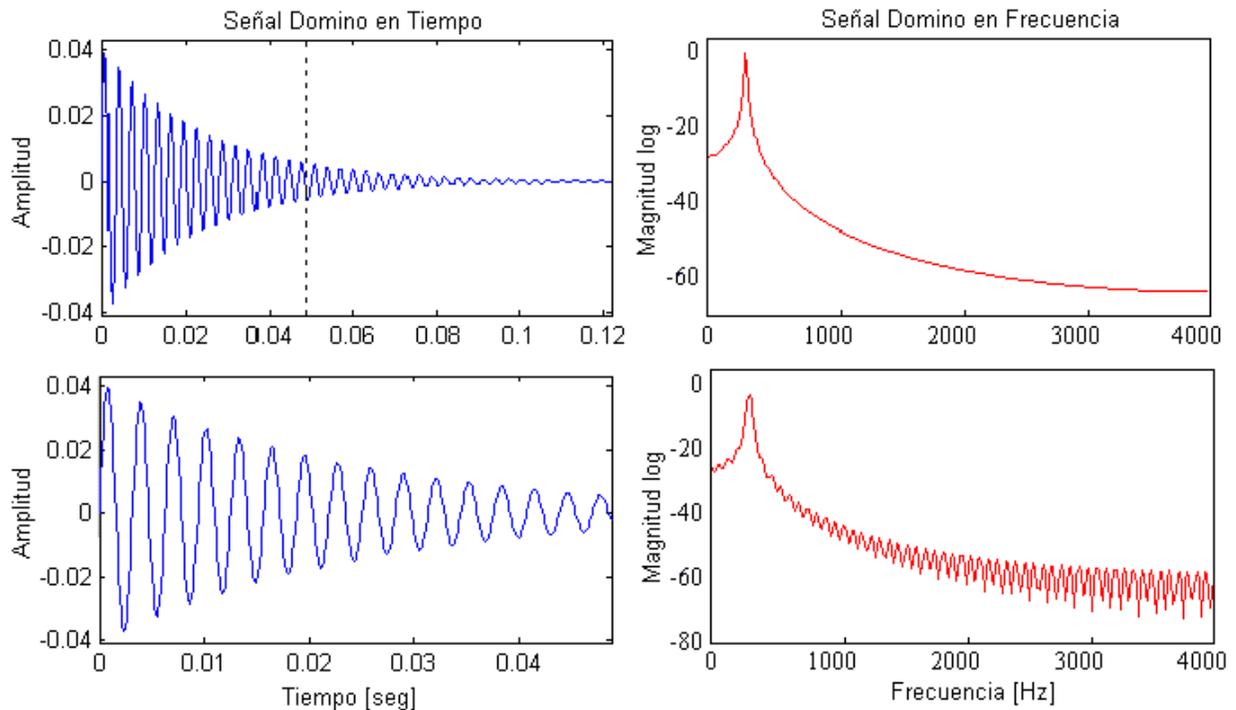


Fig.2.7: Efectos del leakage de la libre respuesta de un sistema simple grado de libertad.

Este error puede ser eliminado a través de dos formas cuando se usa prueba de impacto para obtener la FRF. La primera y la más conveniente, es conseguir un tiempo lo suficientemente largo para capturar la completa señal de respuesta. Esto es preferible porque no se necesita el uso de funciones ventanas que causan distorsión de la señal. La segunda, es aplicar una ventana de decaimiento exponencial.

Existen dos típicas situaciones donde se requeriría el uso de ventana exponencial [7]:

- (a) Estructuras débilmente amortiguadas, donde su respuesta no decae completamente al final del período de tiempo.
- (b) Estructuras fuertemente amortiguadas, donde la respuesta decae muy rápidamente a cero en un período muy corto de tiempo. Si el tiempo de grabación es mucho más largo que el tiempo de decaimiento, la razón señal-ruido será muy pobre y la medición se contaminará con ruido.

2.2.3.1 VENTANA DE DECAIMIENTO EXPONENCIAL

Este tipo de ventana es aplicada en el dominio del tiempo multiplicando la señal de respuesta medida $x(t)$ por la función ventana $w(t)$, esto es

$$x'(t) = x(t)w(t) , \tag{2.1}$$

donde $x'(t)$ = Función respuesta modificada, $x(t)$ = Función respuesta original y $w(t)$ = Función ventana.

La ecuación de la ventana exponencial es de la forma [22]:

$$w(t) = e^{-t/\tau} = e^{-\sigma_0 t} , \tag{2.2}$$

donde τ = Constante de tiempo exponencial [seg] y σ_0 = Factor de amortiguamiento $\left(\frac{1}{\tau}\right)$ [rad/seg].

Cuando la función ventana es aplicada, esta atenúa la amplitud de la señal de respuesta exponencialmente desde un factor de 1.0 hasta un valor pequeño. Esto implica la suma de amortiguación adicional a cada modo de vibración. Esta amortiguación adicional puede solamente ser removida luego de encontrar el factor de amortiguamiento modal para cada modo.

La forma de corregir la extra amortiguación es a través del uso de la IRF. La IRF para un sistema de N grados de libertad (Ec.1.24) multiplicado por la función ventana, es de la forma:

$$e^{-\sigma_0 t} \mathbf{H}(t) = \sum_{i=1}^{2N} A_i e^{(-\sigma_0 - \sigma_i + j\omega_i) t}, \quad (2.4)$$

donde el factor de amortiguación aparente σ_k del modo i -ésimo está dado por: $\sigma_k = \sigma_0 + \sigma_i$.

Si se conoce cuanta amortiguación es sumada a cada, se puede calcular la actual amortiguación para cada modo usando la siguiente relación,

$$\sigma_i = \sigma_k - \sigma_0 \quad (2.5)$$

donde σ_k = Factor de amortiguamiento aparente y σ_0 = Factor de amortiguamiento función ventana.

2.2.4 ESTIMACIÓN DE LA FRF

Teóricamente, la obtención de la FRF está dada por la razón entre el espectro de la fuerza de excitación y el espectro de la señal de respuesta. Sin embargo, en la práctica se presentan ruido mecánico en la estructura y ruido eléctrico en la instrumentación. Para minimizar estos problemas, la más común aproximación para la estimación de la FRF es usar la técnica de mínimos cuadrados. Esta es una técnica standard para la estimación de parámetros en presencia de ruido. El método de mínimos cuadrados

minimiza el cuadrado de la magnitud del error y así calcula la mejor estimación de la magnitud de la FRF [7].

Existen tres distintas estimaciones de la FRF asumiendo donde entra ruido, estas son: Ruido en la entrada, Ruido en la salida y Ruido en la entrada y la salida. La Fig. 2.8 representa el modelo de las situaciones de medición para un sistema SISO (una entrada-una salida).

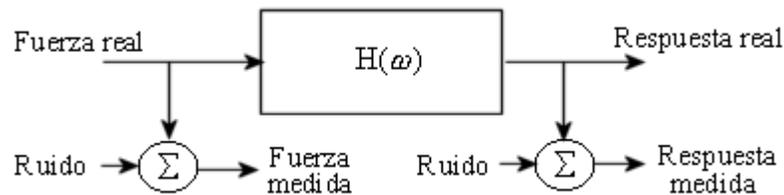


Fig.2.8: Modelo de estimación de la FRF para un sistema SISO [18].

Para pruebas de impacto, el ruido en la entrada no es un problema debido al bajo nivel de ruido eléctrico de los martillos de impacto, pero la señal de respuesta no solamente contiene la respuesta debido a la excitación, además contiene la repuesta debido a excitación randómica de ambiente. En consecuencia, la mejor estimación de la FRF con excitación de impacto es con el modelo Ruido en la Salida [7,8,18,25].

Usando el principio del método de mínimos cuadrados para minimizar el ruido en la salida, se encuentra que la mejor estimación de la FRF está dada por:

$$H_1(\omega) = \frac{\sum_1^{N_{prom}} F^*(\omega)X(\omega)}{\sum_1^{N_{prom}} F^*(\omega)F(\omega)} = \frac{G_{FX}(\omega)}{G_{FF}(\omega)} \quad (2.6)$$

Esta estimación es denominada H_1 , la cual es igual al *Espectro Cruzado* entre la respuesta y la fuerza, G_{FX} , dividido por el *Autoespectro* de la fuerza, G_{FF} (Ec. 2.6), donde N_{prom} es el número de auto espectros y espectros cruzados que son promediados juntos para estimar la FRF.

2.2.4.1 TIPOS DE ERRORES

La exactitud de la adquisición de la FRF depende en gran medida de la minimización de los errores que incluye el procesamiento digital de la señal. Estos errores son generalmente agrupados dentro de dos categorías: *randómico* y *bias*.

El error randómico (aleatorio) es debido a la desviación randómica de cada función sampleadora. Estadísticamente, si suficientes funciones sampleadoras son evaluadas (promedios), la estimación promediada será aproximada a la función esperada con un alto grado de confiabilidad.

El error de bias se debe a las características del sistema o a procedimientos de medición que resultan en una incorrecta estimación. Ejemplo de esto son los sistemas no lineales o los errores en la digitalización como aliasing y leakage [7].

2.2.5 FUNCIÓN DE COHERENCIA

La función de coherencia indica la dependencia lineal entre dos señales en función de la frecuencia. Cuando se realizan mediciones de FRFs es asumiendo que el sistema bajo prueba es lineal, por lo tanto, la función de coherencia puede ser usada para determinar la linealidad de una medición de FRF [7,8,18,23,25].

La función de coherencia es de la forma:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|G_{FX}|^2}{G_{FF}G_{XX}}, \quad (2.7)$$

donde G_{XX} es el autoespectro de la respuesta.

El valor de γ^2 para cualquier frecuencia puede tener un valor entre 0 y 1. Cuando la coherencia es 1, existe una perfecta relación lineal entre la entrada y la salida. Si la coherencia es menor que 1 puede ser debido a:

- (a) Una relación de no linealidad entre excitación y respuesta, por ejemplo sistema no lineal.
- (b) Leakage.
- (c) Presencia de antiresonancia, donde la razón señal-ruido sea pobre.

Las frecuencias donde la coherencia es baja son frecuentemente las mismas frecuencias donde la FRF tiene un máximo o un mínimo en magnitud. Esto indica la presencia de leakage.

2.3 CALIBRACIÓN

Muchos transductores son suministrados con certificados de calibración. Pero para asegurar una correcta implementación del procedimiento de análisis, es necesario tener presentes los siguientes puntos [18]:

- (a) Comprobar la integridad de los transductores y detectar cualquier error en los cables conectores.
- (b) Comprobar que todas las ganancias, polaridad y atenuación en el sistema sean los correctos.
- (c) Comprobar que los transductores usados tengan un rango de operación en la banda de frecuencia de interés.

Una forma de calibrar el sistema completo es medir la FRF de una estructura simple. Esta estructura simple está compuesta de una masa conocida con un acelerómetro adherido (Fig. 2.9).

Se sabe que la segunda Ley de Newton es:

$$Fuerza = Masa \times Aceleracion ,$$

y reemplazando en la definición de Acelerancia, se tiene:

$$A(\omega) = \frac{Aceleracion}{Fuerza} = \frac{1}{Masa} \quad (2.8)$$

Conociendo la masa, la acelerancia para cualquier frecuencia tiene amplitud $\frac{1}{Masa}$ y una fase de 0° .

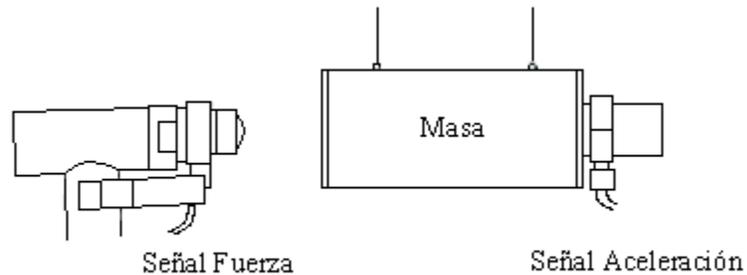


Fig.2.9: Calibración para técnica de impacto [18].

CAPÍTULO 3 EXTRACCION DE PARAMETROS MODALES

3.1 CLASIFICACIÓN DE LOS METODOS DE IDENTIFICACION

Existen varios métodos de extracción de los parámetros modales, dependiendo si usan el dominio del tiempo o el dominio de la frecuencia.

Métodos en el dominio del tiempo y dominio de la frecuencia pueden ser divididos dentro de dos submétodos: *indirecto* y *directo*. El método indirecto significa que la identificación de la FRF está basada en el modelo modal, esto es, en los parámetros modales que están incluidos en la solución característica de la ecuación de equilibrio. El método directo significa que la identificación está basada en el modelo espacial, es decir, basada en la ecuación general matricial de equilibrio.

Respecto al número de modos que pueden ser analizados, podemos tener un grado de libertad (SDOF) y múltiples grados de libertad (MDOF). El uso de estas técnicas, depende básicamente del grado de acoplamiento modal. Ejemplos de FRFs (Fig. 3.1) realizadas en una variedad de diferentes situaciones, para tres grados de libertad pueden ayudar a entender lo anteriormente explicado.

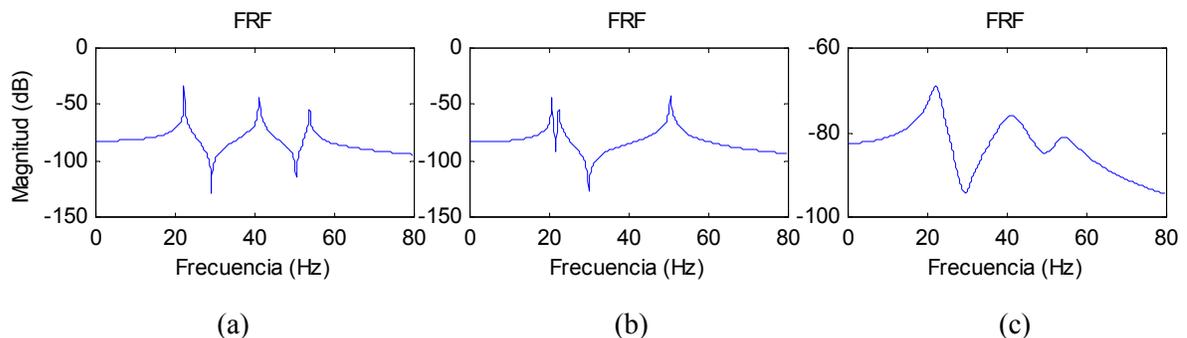


Fig.3.1 : Ejemplos de FRFs con (a) modos bien separados, (b) cercanamente espaciados y (c) modos acoplados.

La Figura 3.1(a) muestra el caso de ligero acoplamiento modal, la información obtenida en la vecindad del peak de la resonancia modal es predominantemente debido al modo y la influencia de otros modos es mínima. Para este caso, el análisis SDOF puede dar resultados exactos. La Fig. 3.1(b) muestra modos cercanamente espaciados con muy ligera amortiguación. Debido a esto el uso de un análisis SDOF podría no ser correcto y comúnmente se utilizaría un análisis MDOF. La Fig. 3.1(c) muestra frecuencias bien separadas pero debido a un fuerte acoplamiento modal, la influencia de las colas de los otros modos no es 'buena'. Así el análisis SDOF sería incorrecto y requeriría un análisis MDOF [3].

En el dominio del tiempo tenemos solamente análisis MDOF, mientras que en el dominio de la frecuencia podemos tener SDOF o MDOF con el método indirecto y sólo MDOF con el método directo.

La FRF que obtenemos es el resultado de la excitación de la estructura en un punto seleccionado y la medición de la respuesta en otro punto. Pero cuando se prueba una estructura, la respuesta es medida en varios puntos seleccionados a lo largo de la estructura, por lo que obtenemos un conjunto de FRFs. Algunos métodos de análisis modal sólo pueden procesar una FRF a la vez. Estos son llamados métodos SISO. Otros métodos pueden procesar varias FRF al mismo tiempo, los cuales son llamados métodos SIMO ó métodos globales. Este tipo de método asume teóricamente que las frecuencias naturales y razones de amortiguamiento no varían de una FRF a otra, por lo que es posible obtener los parámetros modales procesando varias FRF simultáneamente. Existe otro método que trabaja con varias excitaciones y varias respuestas. Estos son denominados métodos MIMO ó métodos polireferencia [4].

Dependiendo de que método usan, existen varios algoritmos matemáticos que simplifican la extracción de los parámetros modales. En la Fig. 3.2 se detalla un diagrama donde se clasifican los distintos métodos usados hoy en día. Para resumir el diagrama, se abreviaron los nombres de los algoritmos, que pueden ser encontrados en el Anexo A.

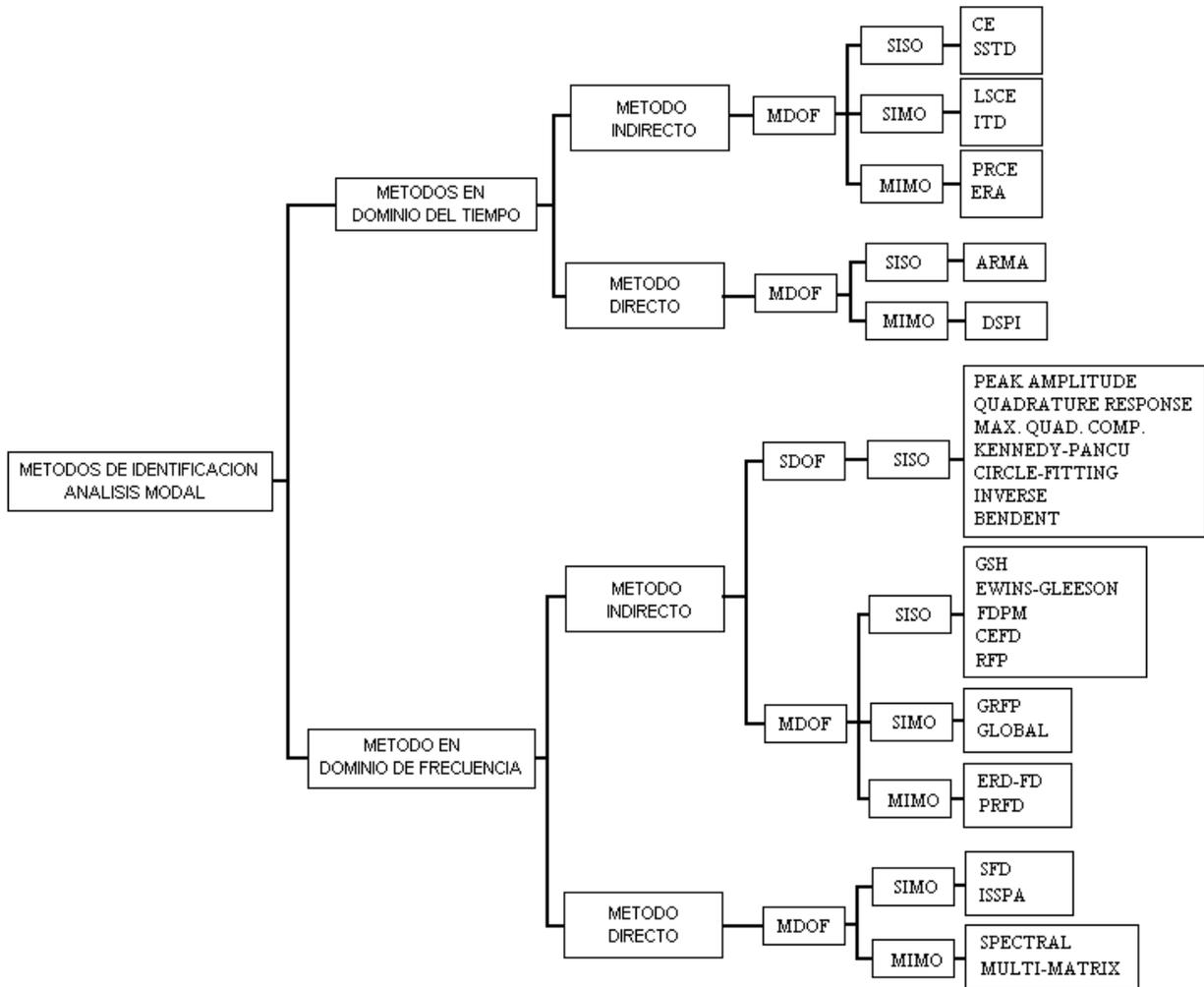


Fig.3.2: Clasificación de las categorías de métodos usados para la extracción de los parámetros modales[4].

3.2 METODO FRACCION RACIONAL POLINOMICA

3.2.1 INTRODUCCION

Este es un método SISO MDOF que trabaja en el dominio de la frecuencia y que fue planteado en 1982. En este método, la FRF es expresada en forma de fracción racional polinómica. Este método está basado en la minimización de la función de error, usando la técnica de mínimos cuadrados. Debido a que el sistema de ecuaciones lineales resultantes es mal acondicionado, la forma de la fracción racional es expresada en términos de polinomios ortogonales. Un completo desarrollo del método puede ser encontrado en las siguientes referencias [4,6,26-30].

3.2.2 TEORIA

La FRF, en términos de receptancia para un sistema lineal de N grados de libertad, con amortiguación viscosa, puede ser modelada en forma de fracción parcial (ver Ec. 1.27), donde A_i y B_i son constantes reales. Esta expresión también puede ser escrita como una razón de dos polinomios

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{2N-1} a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{2N} b_i (j\omega)^i}, \quad (3.1)$$

donde a_i y b_i son las constantes a ser encontradas.

Definimos *Función de Error* como la diferencia entre la $\mathbf{H}(j\omega)$ analítica y la $\mathbf{H}(j\omega)$ experimental, esto es

$$e_j = \frac{\sum_{i=0}^{2N-1} a_i (j\omega_j)^i}{\sum_{i=0}^{2N} b_i (j\omega_j)^i} - \mathbf{He}(j\omega_j) \quad ; j = 1, \dots, L. \quad (3.2)$$

La función de error es linealizada modificando la función de error como

$$e'_j = e_j \sum_{i=0}^{2N} b_i (j\omega_j)^i. \quad (3.3)$$

Así, multiplicando el denominador de la FRF analítica a ambos lados de la Ec. (3.2), tenemos

$$e'_j = \sum_{i=0}^{2N-1} a_i (j\omega_j)^i - \mathbf{He}(j\omega_j) \sum_{i=0}^{2N} b_i (j\omega_j)^i. \quad (3.4)$$

Ahora, haciendo $b_{2N} = 1$ se obtiene

$$e'_j = \sum_{i=0}^{2N-1} a_i (j\omega_j)^i - \mathbf{He}(j\omega_j) \left[\sum_{i=0}^{2N-1} b_i (j\omega_j)^i + (j\omega_j)^{2N} \right]. \quad (3.5)$$

La Ec. (3.5) puede ser escrita en forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (j\omega_1) & (j\omega_1)^2 & \cdots & (j\omega_1)^{2N-1} \\ 1 & (j\omega_2) & (j\omega_2)^2 & \cdots & (j\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (j\omega_L) & (j\omega_L)^2 & \cdots & (j\omega_L)^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2N-1} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{He}(j\omega_1) & \mathbf{He}(j\omega_1)(j\omega_1) & \cdots & \mathbf{He}(j\omega_1)(j\omega_1)^{2N-1} \\ \mathbf{He}(j\omega_2) & \mathbf{He}(j\omega_2)(j\omega_2) & \cdots & \mathbf{He}(j\omega_2)(j\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{He}(j\omega_L) & \mathbf{He}(j\omega_L)(j\omega_L) & \cdots & \mathbf{He}(j\omega_L)(j\omega_L)^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{2N-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{He}(j\omega_1)(j\omega_1)^{2N} \\ \mathbf{He}(j\omega_2)(j\omega_2)^{2N} \\ \vdots \\ \mathbf{He}(j\omega_L)(j\omega_L)^{2N} \end{Bmatrix}, \quad (3.6)$$

ó simplemente

$$\{E\}_{L \times 1} = [P]_{L \times 2N} \{a\}_{2N \times 1} - [T]_{L \times 2N} \{b\}_{2N \times 1} - \{W\}_{L \times 1}, \quad (3.7)$$

donde $\{E\}$ es el vector error que incluye a las L mediciones de frecuencias.

Para calcular los coeficientes polinómicos $\{a\}$ y $\{b\}$, el procedimiento de mínimos cuadrados será usado para minimizar la función de error cuadrática J definida como:

$$J = \sum_{j=1}^L e'_j{}^* \quad e'_j = \{E^*\}^T \{E\}. \quad (3.8)$$

Reemplazando los valores de $\{E\}$ en la Ec. (3.8) y multiplicando sus miembros

$$J = \{a^*\}^T [P^*]^T [P] \{a\} - \{a^*\}^T [P^*]^T [T] \{b\} - \{a^*\}^T [P^*]^T \{W\} - \{b^*\}^T [T^*]^T [P] \{a\} + \{b^*\}^T [T^*]^T [T] \{b\} + \{b^*\}^T [T^*]^T \{W\} - \{W^*\}^T [P] \{a\} + \{W^*\}^T [T] \{b\} + \{W^*\}^T \{W\}. \quad (3.9)$$

Puesto que a y b son vectores reales, entonces $\{a^*\} = \{a\}$ y $\{b^*\} = \{b\}$. También, cada matriz de la Ec. (3.9) es simétrica, por lo que las matrices son iguales a sus transpuestas. La Ec. (3.9) se puede escribir como

$$J = \frac{1}{2} \left(\{a\}^T [P^*]^T [P] \{a\} + \{a\}^T [P]^T [P^*] \{a\} \right) - \{a\}^T [P^*]^T [T] \{b\} - \{a\}^T [P^*]^T \{W\} - \{a\}^T [P]^T [T^*]^T \{b\} + \frac{1}{2} \left(\{b\}^T [T^*]^T [T] \{b\} + \{b\}^T [T]^T [T^*] \{b\} \right) + \{b\}^T [T^*]^T \{W\} - \{a\}^T [P]^T \{W^*\} + \{b\}^T [T]^T \{W^*\} + \{W^*\}^T \{W\}. \quad (3.10)$$

Además, la Ec. (3.10) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2} \{a\}^T \left([P^*]^T [P] + [P]^T [P^*] \right) \{a\} + \frac{1}{2} \{b\}^T \left([T^*]^T [T] + [T]^T [T^*] \right) \{b\} - \\
 & \{a\}^T \left([P^*]^T [T] + [P]^T [T^*] \right) \{b\} - \{a\}^T \left([P^*]^T [W] + [P]^T [W^*] \right) + \\
 & \{b\}^T \left([T^*]^T [W] + [T]^T [W^*] \right) + \{W^*\}^T \{W\} .
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando las identidades

$$\begin{aligned}
 [P^*]^T [P] + [P]^T [P^*] &= 2 RE \left([P^*]^T [P] \right) \\
 [P^*]^T [T] + [P]^T [T^*] &= 2 RE \left([P^*]^T [T] \right) \\
 [T^*]^T [T] + [T]^T [T^*] &= 2 RE \left([T^*]^T [T] \right) \\
 [P^*]^T \{W\} + [P]^T \{W^*\} &= 2 RE \left([P^*]^T \{W\} \right) \\
 [T^*]^T \{W\} + [T]^T \{W^*\} &= 2 RE \left([T^*]^T \{W\} \right)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

y sustituyendo estas igualdades en la Ec.(3.11), se obtiene

$$\begin{aligned}
 J(a,b) = & \{a\}^T RE \left([P^*]^T [P] \right) \{a\} + \{b\}^T RE \left([T^*]^T [T] \right) \{b\} + \{W^*\}^T \{W\} - \\
 & 2 \{a\}^T RE \left([P^*]^T [T] \right) \{b\} - 2 \{a\}^T RE \left([P^*]^T \{W\} \right) + 2 \{b\}^T RE \left([T^*]^T \{W\} \right) .
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para minimizar $J(a,b)$, se deriva la Ec. (3.13) con respecto a $\{a\}$ y $\{b\}$ y se iguala a cero. Entonces, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial \{a\}} &= 2 RE \left([P^*]^T [P] \right) \{a\} - 2 RE \left([P^*]^T [T] \right) \{b\} - 2 RE \left([P^*]^T \{W\} \right) = \{0\} \\
 \frac{\partial J}{\partial \{b\}} &= 2 RE \left([T^*]^T [T] \right) \{b\} - 2 RE \left([T^*]^T [P] \right) \{a\} + 2 RE \left([T^*]^T \{W\} \right) = \{0\} .
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Estas ecuaciones se expresan en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{Y}] & [\mathbf{X}] \\ [\mathbf{X}]^T & [\mathbf{Z}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{G}\} \\ \{\mathbf{F}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}] &= RE\left([P^*]^T [P]\right) & \{\mathbf{G}\} &= RE\left([P^*]^T \{W\}\right) \\ [\mathbf{X}] &= -RE\left([P^*]^T [T]\right) & \{\mathbf{F}\} &= -RE\left([T^*]^T \{W\}\right) \\ [\mathbf{Z}] &= RE\left([T^*]^T [T]\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

La estimación de mínimos cuadrados de $\{a\}$ y $\{b\}$ puede ser obtenida resolviendo la Ec. (3.15). Sin embargo, esta ecuación presenta problemas asociados con su resolución. El problema fundamental reside en las características de las matrices $[T]$ y $[P]$. Estas matrices envuelven polinomios que incrementan su potencia y son de la forma de la *Matriz de Vandermonde*, que son conocidas por ser mal acondicionadas para casos que envuelven rangos anchos de frecuencias y modelos de orden alto [7]. La forma de solucionar el problema es hacer las matrices $[\mathbf{Y}]$ y $[\mathbf{Z}]$ igual a las matriz identidad. Esto significa que $[\mathbf{Y}]$ y $[\mathbf{Z}]$ tendrán que ser el producto de dos matrices ortogonales.

3.2.3 FRF EN TERMINOS DE POLINOMIOS ORTOGONALES

La FRF en forma de fracción racional, dada en términos de polinomios ortogonales complejos es

$$\mathbf{H}(j\omega_i) = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} c_k \Phi_{i,k}}{\sum_{k=0}^{2N} d_k \theta_{i,k}} \quad ; i = 1, \dots, L. \quad (3.17)$$

Usando el mismo procedimiento que para la formulación de polinomios ordinarios, podemos expresar el vector error complejo en términos de polinomios ortogonales, esto es

$$\{E\}_{L \times 1} = [P]_{L \times 2N} \{c\}_{2N \times 1} - [T]_{L \times 2N} \{d\}_{2N \times 1} - \{W\}_{L \times 1}, \quad (3.18)$$

donde ahora

$$[P] = \begin{bmatrix} \Phi_{1,0} & \Phi_{1,1} & \cdots & \Phi_{1,2N-1} \\ \Phi_{2,0} & \Phi_{2,1} & \cdots & \Phi_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{L,0} & \Phi_{L,1} & \cdots & \Phi_{L,2N-1} \end{bmatrix} = [\Phi], \quad (3.19)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \mathbf{He}(j\omega_1) & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & & \mathbf{He}(j\omega_L) \\ \mathbf{0} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1,0} & \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,2N-1} \\ \theta_{2,0} & \theta_{2,1} & \cdots & \theta_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{L,0} & \theta_{L,1} & \cdots & \theta_{L,2N-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{He}(j\omega_i)] [\Theta], \quad (3.20)$$

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{He}(j\omega_1)\theta_{1,2N} \\ \mathbf{He}(j\omega_2)\theta_{2,2N} \\ \vdots \\ \mathbf{He}(j\omega_L)\theta_{L,2N} \end{Bmatrix}. \quad (3.21)$$

3.2.4 PRINCIPIO DE ORTOGONALIDAD

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ reales, continuas y no nulas, se dicen funciones ortogonales sobre un intervalo $a \leq x \leq b$ si:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_k(x)f_j(x)dx &= 0 \quad k \neq j \\ \int_a^b f_k^2(x)dx &= Q_k > 0 \quad k = j. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Normalizando f_k de modo que el correspondiente Q_k sea igual a 1, se define

$$g_k = \frac{f_k(x)}{\sqrt{Q_k}}, \quad (3.23)$$

de modo que

$$\int_a^b g_k(x)g_j(x)dx = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}. \quad (3.24)$$

Si las funciones $g_k(x)$ y $g_j(x)$ son calculadas sobre L puntos discretizados, la integral es reemplazada por la sumatoria sobre el número de puntos medidos. Además, puesto que los polinomios que usamos son polinomios complejos, la propiedad ortogonal queda definida como:

$$\sum_{i=-L}^L \varphi_{i,k}^* \varphi_{i,j} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}. \quad (3.25)$$

3.2.5 POLINOMIOS ORTOGONALES EN TERMINOS DE FUNCIONES POSITIVAS

La FRF exhibe simetría *Hermitiana* cerca del origen del eje de la frecuencia, como se aprecia en Fig. 3.3.

Se define *función Par e Impar*, respectivamente como:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\varphi^-) &= \operatorname{Re}(\varphi^+) \\ \operatorname{Im}(\varphi^-) &= -\operatorname{Im}(\varphi^+). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para preservar las propiedades simétricas de la función cerca del origen, el origen en sí será excluido de nuestro desarrollo. De esta forma, la propiedad ortogonal será:

$$\sum_{i=-L}^{-1} \varphi_{i,k}^* \varphi_{i,j} + \sum_{i=1}^L \varphi_{i,k}^* \varphi_{i,j} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases} \quad (3.27)$$

Como $\varphi = \text{Re}(\varphi) + j \text{Im}(\varphi)$, sustituimos en la Ec.(3.27) y luego de algunas manipulaciones algebraicas se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-L}^{-1} \left[\text{Re}(\varphi_{i,k}^-) \text{Re}(\varphi_{i,j}^-) + \text{Im}(\varphi_{i,k}^-) \text{Im}(\varphi_{i,j}^-) \right] + \\ & \sum_{i=1}^L \left[\text{Re}(\varphi_{i,k}^+) \text{Re}(\varphi_{i,j}^+) + \text{Im}(\varphi_{i,k}^+) \text{Im}(\varphi_{i,j}^+) \right] = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases} \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde

$\varphi_{i,k}^+, \varphi_{i,j}^+ =$ Funciones mitad derecha, definida para $i > 0$.

$\varphi_{i,k}^-, \varphi_{i,j}^- =$ Funciones mitad izquierda, definida para $i < 0$.

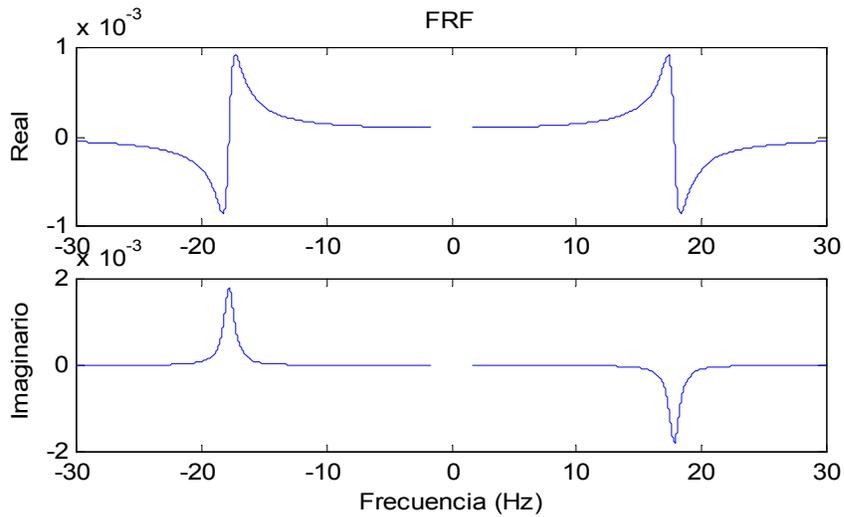


Fig.3.3 : Naturaleza Hermitiana de una función respuesta de frecuencia.

Tomando las definiciones para función par e impar dadas en la Ec. (3.26) y sustituyéndolas en la Ec. (3.28), se obtiene

$$2 \sum_{i=1}^L \left[\operatorname{Re}(\varphi_{i,k}^+) \operatorname{Re}(\varphi_{i,j}^+) + \operatorname{Im}(\varphi_{i,k}^+) \operatorname{Im}(\varphi_{i,j}^+) \right] = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases} \quad (3.29)$$

ó

$$\sum_{i=1}^L (\varphi_{i,k}^+)^* (\varphi_{i,j}^+) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1/2 & k = j \end{cases} \quad (3.30)$$

Para el polinomio θ_i , el procedimiento es igual al anterior y difiere del polinomio del numerador φ_i , puesto que debe satisfacer una condición diferente de ortogonalidad, la cual contiene una función de ponderación,

$$\sum_{i=1}^L (\theta_{i,k}^+)^* (\theta_{i,j}^+) |\mathbf{He}(j\omega_i)|^2 = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1/2 & k = j \end{cases} \quad (3.31)$$

Debido a que la función de ponderación (magnitud cuadrada de la FRF experimental) será distinta para cada FRF evaluada, los coeficientes $\{d\}$ buscados no serán iguales para todas las FRFs, aunque las frecuencias naturales y razones de amortiguamiento si serán iguales. Esto presenta un problema al tratar de extender este método para uso global [28-30].

Observando las expresiones de las Ecs. (3.30) y (3.31), se toma ventaja de las propiedades de simetría de los polinomios para escribir las condiciones de ortogonalidad en términos de frecuencias sólo positivas.

3.2.6 GENERACIÓN DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES φ Y θ . MÉTODO DE FORSYTHE

La fórmula para el caso general es presentada usando la notación γ en lugar de φ y θ , donde $k=3,\dots,N$ e $i=1,\dots,L$.

$$\begin{aligned}
 \gamma_{-1}(\omega_i) &= 0 \\
 \gamma_0(\omega_i) &= 1 \\
 \gamma_1(\omega_i) &= (\omega_i - U_1) \gamma_0(\omega_i) \\
 \gamma_2(\omega_i) &= (\omega_i - U_2) \gamma_1(\omega_i) - V_1 \gamma_0(\omega_i) \\
 &\vdots \\
 \gamma_k(\omega_i) &= (\omega_i - U_k) \gamma_{k-1}(\omega_i) - V_{k-1} \gamma_{k-2}(\omega_i) ,
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

donde

$$\begin{aligned}
 U_k &= \frac{\sum_{i=1}^L \omega_i [\gamma_{k-1}(\omega_i)]^2 q_i}{D_{k-1}} , \\
 V_{k-1} &= \frac{\sum_{i=1}^L \omega_i \gamma_{k-1}(\omega_i) \gamma_{k-2}(\omega_i) q_i}{D_{k-1}} , \text{ y} \\
 D_k &= \sum_{i=1}^L [\gamma_k(\omega_i)]^2 q_i .
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Si las sumatorias de la Ec. (3.33) son expandidas desde $-L$ hasta L , la función U_k pasa a ser una función impar y V_k una función par de ω . Así, la sumatoria de U_k dará cero y las sumatorias en V_k y D_k serán $2 \sum_{i=1}^L$ en lugar de $\sum_{i=-L}^L$.

Los polinomios γ_k^+ deben ser normalizados dividiéndolos por $\sqrt{D_k^+}$. De este modo, siguiendo las simplificaciones para este método dadas la en referencia [26], la Ec. (3.32) tomará la siguiente forma donde, $k = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \gamma_{-1}^+(\omega_i) &= 0 \\ \gamma_0^+(\omega_i) &= \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^L q_i}} \\ &\vdots \\ \gamma_k^+(\omega_i) &= \frac{S_k^+(\omega_i)}{D_k^+}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde

$$\begin{aligned} S_k^+(\omega_i) &= \omega_i \gamma_{k-1}^+(\omega_i) - V_{k-1}^+ \gamma_{k-2}^+(\omega_i), \\ V_{k-1}^+ &= 2 \sum_{i=1}^L \omega_i \gamma_{k-1}^+(\omega_i) \gamma_{k-2}^+(\omega_i) q_i, \text{ y} \\ D_k^+ &= \sqrt{2 \sum_{i=1}^L [S_k^+(\omega_i)]^2 q_i}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dos importantes simplificaciones son realizadas: primero, la variable U_k ha sido removida, y segundo, todas las sumatorias son expandidas sólo para frecuencias positivas.

Puesto que los polinomios γ_k^+ calculados son polinomios reales, es necesario multiplicarlos por j^k ($j = \sqrt{-1}$), para poder generar los polinomios complejos. Además, estos polinomios ortogonales complejos generados encontrarán problemas numéricos si la frecuencia no es escalada de alguna manera. Así, el rango de frecuencia de interés es escalado dividiendo todas las frecuencias por el máximo valor considerado en el intervalo. De esta manera, la máxima frecuencia tendrá valor 1.

Aplicando la Ec. (3.34), los polinomios $\varphi^+(\omega_i)$ y $\theta^+(\omega_i)$ son calculados haciendo $q_i = 1$ ó $q_i = |\mathbf{H}e(j\omega_i)|^2$, respectivamente. De este manera, es posible calcular las matrices $[P]$ y $[T]$ dadas por las Ecs. (3.19) y (3.20), donde los polinomios φ y θ deben ser entendidos como φ^+ y θ^+ .

La Ec. (3.15), en términos de polinomios ortogonales, es simplificada de la forma

$$\begin{bmatrix} [I_1] & [\mathbf{X}'] \\ [\mathbf{X}'^T & [I_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{c\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{G}'\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (3.36)$$

donde

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}'] &= 2[\mathbf{X}] \\ \{\mathbf{G}'\} &= 2\{\mathbf{G}\} \\ [I_1] \text{ y } [I_2] &= \text{Matrices identidad} \\ \{0\} &= \text{Vector cero.} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Comparando la Ec. (3.36) con la Ec. (3.16), es claro que el uso de polinomios ortogonales causa dos significativos cambios en la solución de la ecuación: primero, las dos matrices $[\mathbf{Y}]$ y $[\mathbf{Z}]$ en Ec. (3.16) son reemplazadas ahora por matrices identidad, y segundo, la Ec. (3.36) puede ser escrita como un conjunto de ecuaciones desacopladas con respecto a los vectores desconocidos $\{c\}$ y $\{d\}$.

Resolviendo la Ec. (3.36), se tiene:

$$\{d\} = -\left([I] - [\mathbf{X}'^T [\mathbf{X}']\right)^{-1} [\mathbf{X}'^T \{\mathbf{G}'\}, \quad (3.38)$$

$$\{c\} = \{\mathbf{G}'\} - [\mathbf{X}']\{d\}. \quad (3.39)$$

3.2.7 CALCULO DE LOS PARAMETROS MODALES

Para calcular los parámetros modales, la Ec. (3.17) debe ser escrita en términos de los coeficientes $\{a\}$ y $\{b\}$. Es posible encontrar una relación lineal entre $\{a\}$ y $\{c\}$, y entre $\{b\}$ y $\{d\}$, de modo de poder transformar los coeficientes de los polinomios ortogonales generados a coeficientes de los polinomios ordinarios.

Conociendo los valores de $\{b\}$, estos pueden ser introducidos dentro del polinomio complejo para calcular las raíces, los cuales están directamente relacionados con las frecuencias de resonancias y razones de amortiguamiento.

Sabemos que el par de raíces esta dado por:

$$s_{i,i^*} = -\omega_i \xi_i \pm j\omega_i d_i, \quad (3.40)$$

donde $\text{Re}(s_i) = -\omega_i \xi_i$ y $\text{Im}(s_i) = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$

de este modo se obtiene:

$$\omega_i = \sqrt{\text{Re}^2(s_i) + \text{Im}^2(s_i)} \quad \text{y} \quad \xi_i = -\frac{\text{Re}(s_i)}{\omega_i}. \quad (3.41)$$

Conociendo los valores de $\{a\}$ y las raíces de los polinomios complejos (Ec. (3.40)) los residuos pueden calcularse usando el método de fracciones parciales. En términos prácticos, cada coeficiente R_i es calculado removiendo el factor $(s - s_i)$ en el denominador y evaluando la ecuación para $s = s_i$.

4.1 INTRODUCCIÓN

Dos tipos de análisis fueron realizados en esta investigación para determinar la exactitud del método fracción racional polinómica en la estimación de la frecuencia natural, razón de amortiguamiento y constante modal de una medición de FRF. El primer análisis fue hecho con información teórica, con valores conocidos para simular dos tipos de FRF y la segunda fue información experimental. Ambas informaciones fueron procesadas usando un código escrito para *MatLab*TM, que ejecuta el procedimiento descrito en el capítulo anterior.

4.2 DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

Para ejecutar el método RFP se implementó un procedimiento automático incorporado dentro de un programa computacional para MatLab versión R.11 ó superior. Este programa consiste en un archivo principal llamado RATIONAL, donde está definido todo el entorno gráfico usado y que es de fácil manejo para el usuario. Su funcionamiento sigue el proceso mostrado por el diagrama de flujo de la Fig. 4.1 con todas las opciones que este contiene.

La entrada de datos puede ser teórica o experimental. Los datos teóricos son usados para evaluar el método bajo distintas opciones, como se mostrará luego en la Sección 4.3. Posterior a la entrada y visualización de los datos, es necesario especificar el rango de frecuencias L y el orden del modelo N de los modos seleccionados para ser estimados. El proceso designado por la función RFP.M y ORTOGONAL.M ejecuta el método descrito en el Capítulo 3. Los polos y residuos son calculados usando una rutina definida en MatLab que descompone la razón de dos polinomios en una suma de fracciones simples.

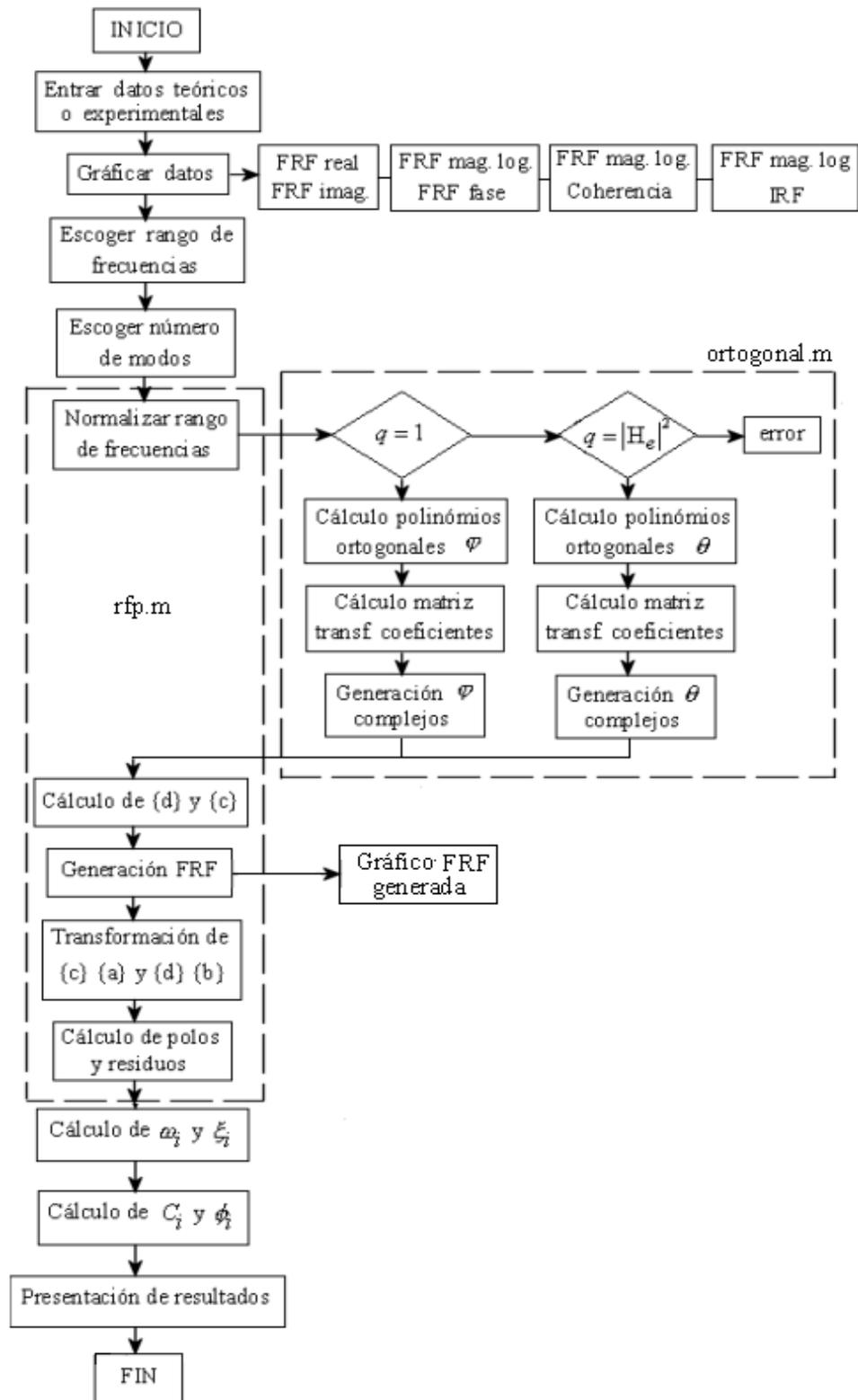


Fig.4.1: Diagrama de flujo del programa computacional.

A partir de estos resultados, son obtenidas primero la frecuencia natural y razón de amortiguamiento para cada modo y luego son obtenidos la magnitud y el ángulo de fase de la constante modal.

4.3 EVALUACIÓN TEÓRICA DEL MÉTODO

Para la evaluación del método fracción racional polinómica fueron generadas 2 FRF para una sistema de 3 grados de libertad con amortiguamiento viscoso (Capítulo 1). La primera FRF fue generada con dos modos cercanamente espaciados. La segunda FRF fue generada con un fuerte acoplamiento modal entre sus modos. Ambas FRF fueron generadas: a) sin ruido, b) con un nivel reducido de ruido y c) con un nivel elevado de ruido tipo randómico. La generación de la FRF teórica con ruido fue realizada obteniendo la IRF de cada simulación y sumada con ruido tipo randómico con un determinado factor de ruido, según la función definida en MatLab. Posterior a la generación de la señal con ruido, se calculó la razón señal-ruido medida en dB. Luego se transformó la IRF generada a la FRF. Cada simulación tiene como frecuencia máxima 79.5774 Hz a una resolución de 0.1554 Hz.

La elección de estos modelos fue fundamentalmente para explorar y evaluar las capacidades del método bajo diferentes circunstancias. Por ejemplo, cuando dos modos se encuentren relativamente cerca y cuando la amortiguación de los modos sea exagerada, ambas sin ruido para demostrar la exactitud del método y con ruido a modo de representar un modelo cercano a una medición experimental de FRF.

4.4 EVALUACIÓN EXPERIMENTAL DEL MÉTODO

4.4.1 EQUIPAMIENTO

El siguiente equipamiento fue usado para realizar el análisis modal experimental (ver Fig. 4.2):

1. Tarjeta de Adquisición de Señales Dinámicas NI-4452.
2. Conector de Tarjeta de Adquisición BNC-2140.
3. PC IBM.
4. Martillo de Impacto PCB 208B02.
5. Acelerómetro PCB 353B15.
6. Unidad de Poder SKF CMSS603A-3.
7. Fuente de Alimentación/Amplificador KP 482811.
8. Software de Adquisición de Datos LabVIEW v6.
9. Software de Visualización y procesado de Datos MatLab vR.12.
10. Estructura de Prueba: Viga de Aluminio empotrada en un extremo.

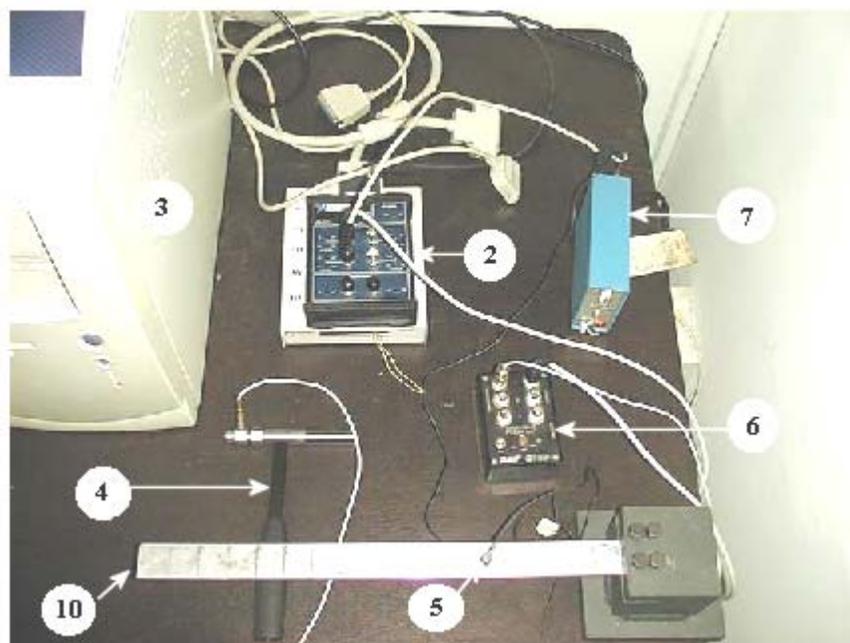


Fig.4.2: Fotografía del montaje de análisis modal experimental.

4.4.2 CONFIGURACIÓN

La estructura ensayada es una viga de aluminio de $425 \times 30 \times 5 \text{ mm}^3$ (largo \times ancho \times alto), empotrada con cuatro pernos a una estructura sólida. La viga se dividió en 9 puntos, donde el punto 1 corresponde al extremo libre y los siguientes puntos fueron marcados a una distancia de 50mm cada uno. El acelerómetro PCB 353B15 que mide la respuesta de salida se fijó con cera al punto marcado como 7 (Fig 4.3), y conectó al preamplificador KP 482811. A su vez este se conectó al canal 1 de la tarjeta de adquisición. La excitación de entrada es proporcionada por el martillo de impacto PCB 208B02, el cual se conectó a la unidad de poder SKF CMSS603A-3. La salida se conectó al canal 0 de la tarjeta de adquisición. Un diagrama de la configuración de las conexiones realizadas se muestra en la Fig. 4.3.

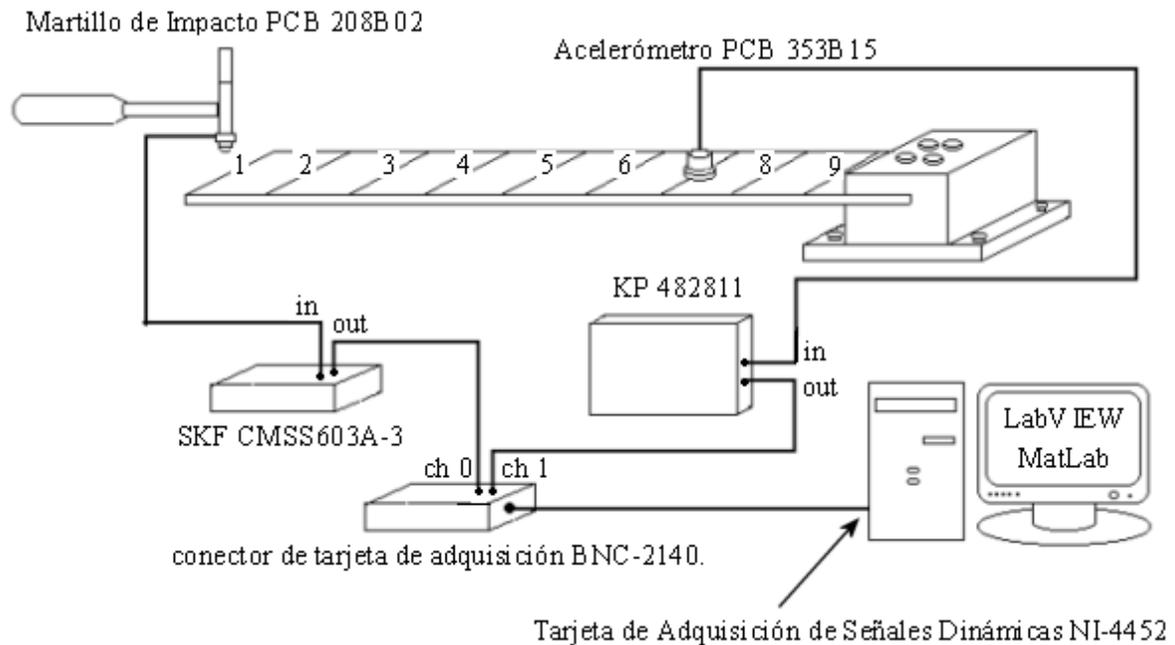


Fig. 4.3: Diagrama de la configuración experimental.

4.4.3 PROCEDIMIENTO

El procedimiento de medición se efectuó fijando el acelerómetro en el punto 7 (Fig 4.3) y golpeando la viga bajo prueba con el martillo en forma perpendicular a cada punto marcado (punto 1 al punto 9). La adquisición de datos se realizó por un programa de adquisición escrito en *LabVIEW*. Este programa está provisto de un trigger que sirve como punto de partida para empezar a medir datos de entrada (martillo) y salida (acelerómetro). Cada medición fue cortada en 1 kHz tomando 1024 muestras, con una resolución de 0.9766 Hz.

Los datos ingresados al programa son promediados 5 veces en modo RMS. Esto es, cada excitación del martillo en cada punto es realizada 5 veces. Completada esta promediación, el programa provee la estimación de la FRF con ruido en la salida (Ec. 2.6) y Coherencia (Ec. 2.7). La función ventana Hanning es ocupada para la señal de salida.

Después de obtenidos los datos de la FRF, estos son guardados como columnas en formato ASCII, la parte real de la FRF en un archivo y la parte imaginaria de la FRF en otro archivo para cada medición. El rango de frecuencias y la Coherencia, también son guardados como columnas en formato ASCII para cada medición. Una vez que todas las mediciones han sido almacenadas en un diskette, estas son enviadas al software MatLab para su visualización y posterior proceso. Este proceso consiste en reunir la parte real y la parte imaginaria, multiplicada por j ($j = \sqrt{-1}$), de cada una de las mediciones y sumarlas a modo de obtener un número complejo. Esta transformación de las 9 mediciones realizadas en total es almacenada como una correspondiente fila. Este proceso es realizado también para la coherencia y para el rango de frecuencias. El rango de frecuencias se almacena sólo una vez, ya que es el mismo valor para todas las mediciones. Todas estas matrices generadas son guardadas en un archivo llamado NUM_EXP.MAT.

5.1 CASO TEÓRICO

5.1.1 MODOS CERCANAMENTE ESPACIADOS

Se sintetizó una FRF para un sistema de 3 grados de libertad con amortiguamiento viscoso con los valores de masa, amortiguación y rigidez representados en la Fig 5.1 y con los respectivos valores teóricos para la frecuencia natural, razón de amortiguamiento, magnitud y ángulo de fase de la constante modal para cada modo, indicados en la Tabla 5.1.

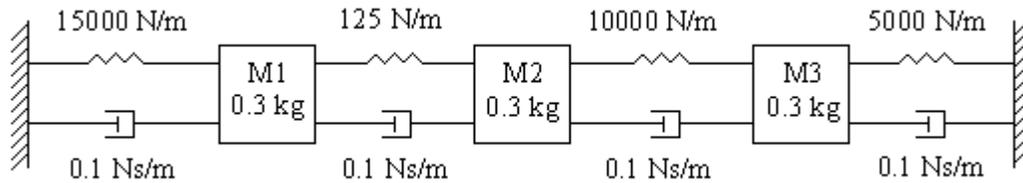


Fig.5.1: Sistema de 3 grados de libertad para simular modos cercanamente espaciados.

Frecuencias Naturales (Hz)	Razones de Amortiguamiento	Constantes Modales	
		Magnitudes	Fases (grados)
$\omega_1 = 20.5469$	$\xi_1 = 0.0009$	$C_1 = 1.4871$	$\phi_1 = 1.7223$
$\omega_2 = 21.0034$	$\xi_2 = 0.0032$	$C_2 = 1.1756$	$\phi_2 = 357.7313$
$\omega_3 = 50.3503$	$\xi_3 = 0.0015$	$C_3 = 0.6721$	$\phi_3 = 0.1737$

Tabla 5.1: Valores teóricos de ω , ξ , C y ϕ para modos cercanamente espaciados.

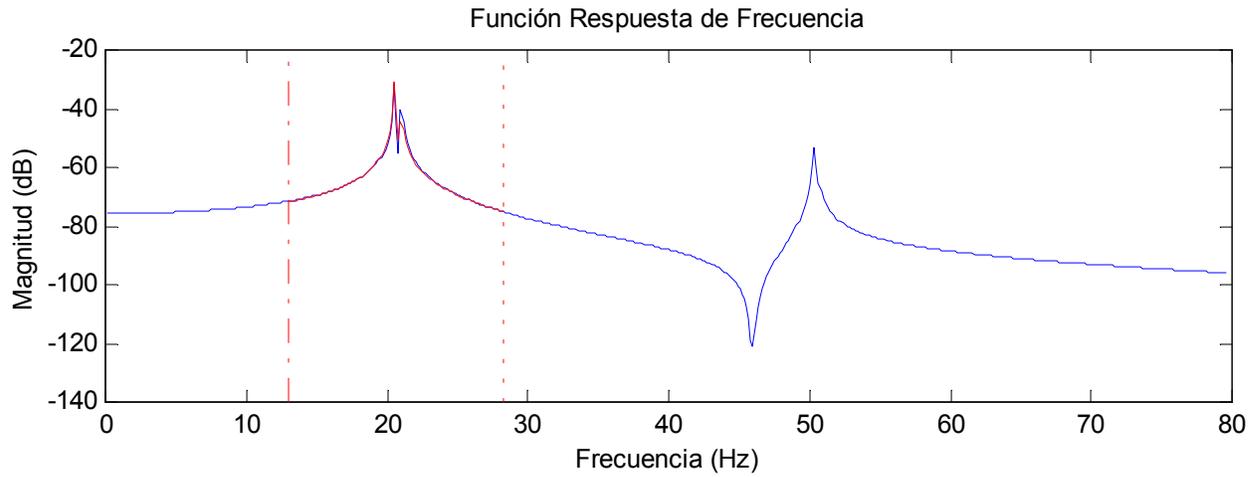
Para la evaluación del método, se simuló la FRF debido a una fuerza excitadora de tipo transiente en la masa M2 y la respuesta en la misma masa M2.

Los procedimientos de evaluación fueron los siguientes:

1. Se escogió un rango de frecuencia delimitado por $f_{\min} = 13.0557$ Hz y $f_{\max} = 28.2873$ Hz alrededor de los 2 modos cercanos y se realizó una estimación para $N=2$ y $N=3$. Se repitió este procedimiento manteniendo el mismo rango de frecuencia para la FRF con 47.14 dB de nivel señal-ruido y para la FRF con 33.05 dB de nivel señal-ruido.
2. Se escogió un rango de frecuencia delimitado por $f_{\min} = 13.0557$ Hz y $f_{\max} = 58.7506$ Hz alrededor de los 3 modos presentes en la FRF y se realizó una estimación para $N=3$ y $N=4$, se repitió este procedimiento manteniendo el mismo rango de frecuencia para la FRF con 47.14 dB de nivel señal-ruido y para la FRF con 33.05 dB de nivel señal-ruido.

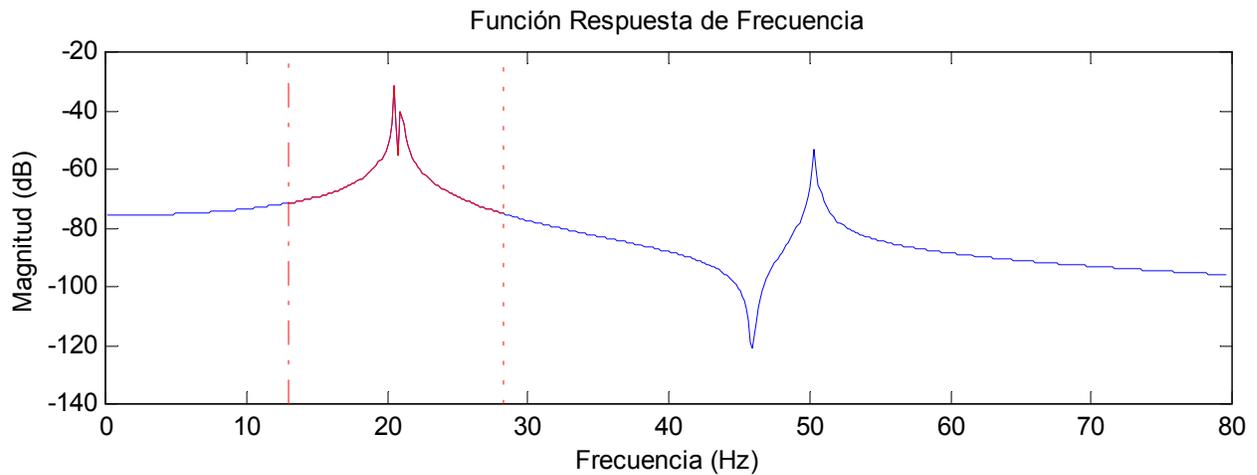
Los resultados de las estimaciones para modos cercanamente espaciados son presentados en las siguientes figuras donde se representan las respectivas FRFs simuladas (en azul) , dos líneas perpendiculares que indican la frecuencia mínima y la frecuencia máxima del rango de frecuencia escogido y la FRF generada (en rojo). Los valores estimados son presentados en una tabla, donde el valor entre paréntesis indica el *porcentaje de error* del valor estimado con respecto al valor teórico.

Caso A1-1:



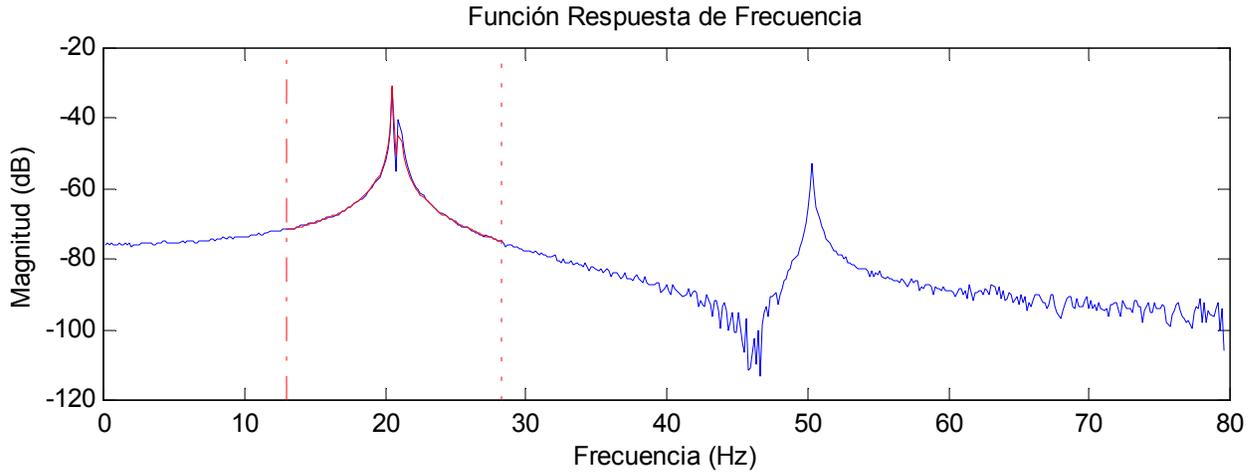
	Frec.min = 13.0557 [Hz] Frec.max = 28.2873 [Hz]	$N = 2$		num1_512-A11.fig
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	20.5549 (0.0389%)	0.0011 (22.2222%)	2.1043 (41.5036%)	359.1077 (20750%)
2	21.0106 (0.0343%)	0.014 (337.5%)	0.5229 (55.5206%)	3.8073 (98.9357%)

Caso A1-2:



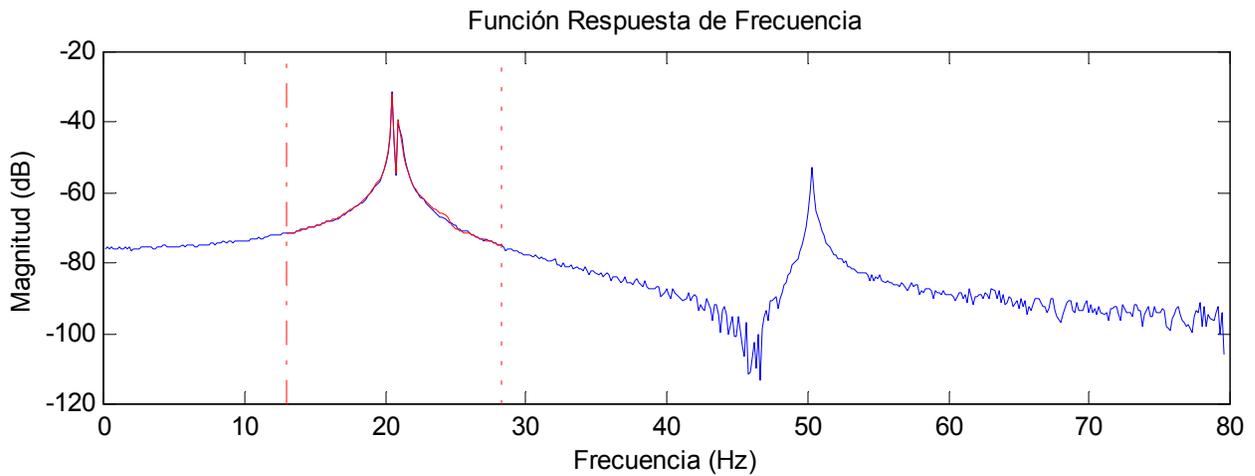
		$N = 3$		num1_512-A12.fig
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	20.5469 (0%)	0.0009 (0%)	1.4871 (0%)	1.7223 (0%)
2	21.0034 (0%)	0.0032 (0%)	1.1756 (0%)	357.7313 (0%)
3	50.3503 (0%)	0.0015 (0%)	0.6721 (0%)	0.1737 (0%)

Caso A1-3:



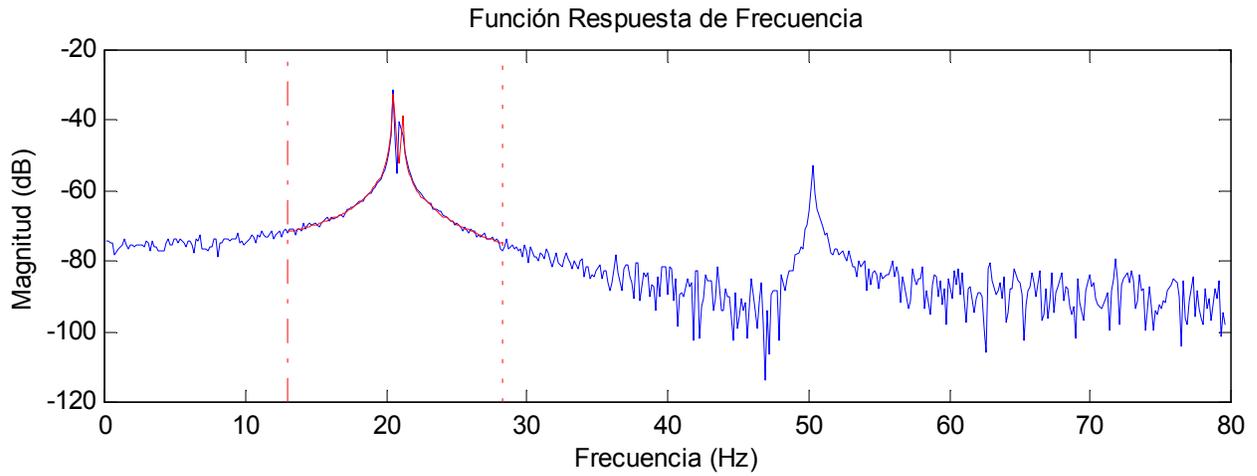
	$\text{Frec.min} = 13.0557 \text{ [Hz]}$ $\text{Frec.max} = 28.2873 \text{ [Hz]}$	$N = 2$		num1_512-A13.fig
modo	$\omega \text{ [Hz]}$	ξ	C	ϕ
1	20.5558 (0.0433%)	0.0012 (33.3333%)	2.0805 (39.9032%)	359.5106 (20774%)
2	21.0133 (0.0471%)	0.0015 (53.1250%)	0.5501 (53.2069%)	2.5995 (99.2733%)

Caso A1-4:



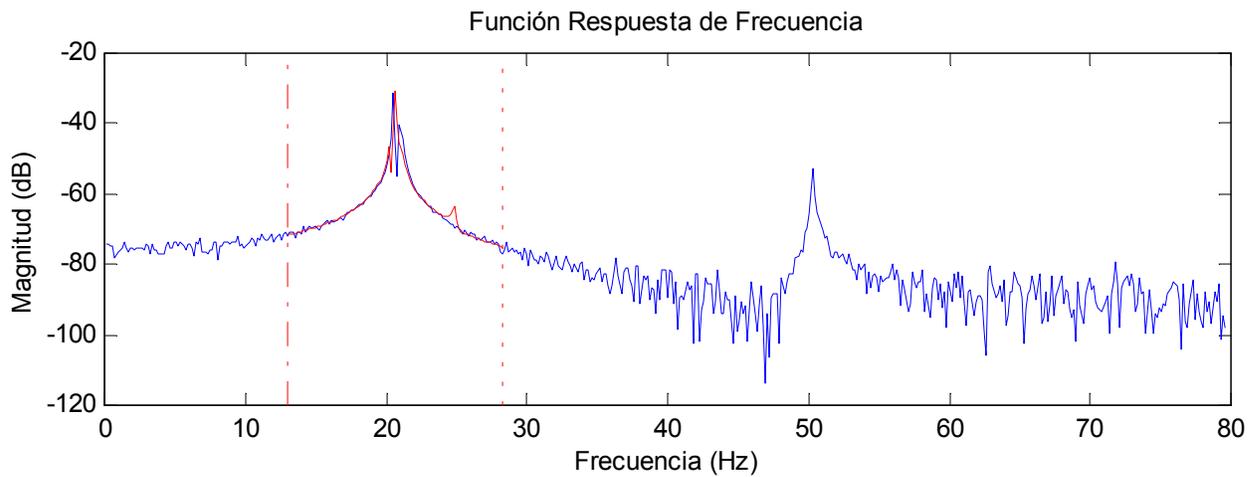
		$N = 3$		num1_512-A14.fig
modo	$\omega \text{ [Hz]}$	ξ	C	ϕ
1	20.5537 (0.0331%)	0.0007 (22.2222%)	1.6146 (8.5737%)	357.0118 (20629%)
2	20.9575 (0.2185%)	0.0030 (6.25%)	1.1291 (3.9554%)	4.7386 (98.6754%)
3	24.5382 (51.2650%)	0.0153 (920%)	0.0682 (89.8527%)	172.5033 (99211%)

Caso A1-5:



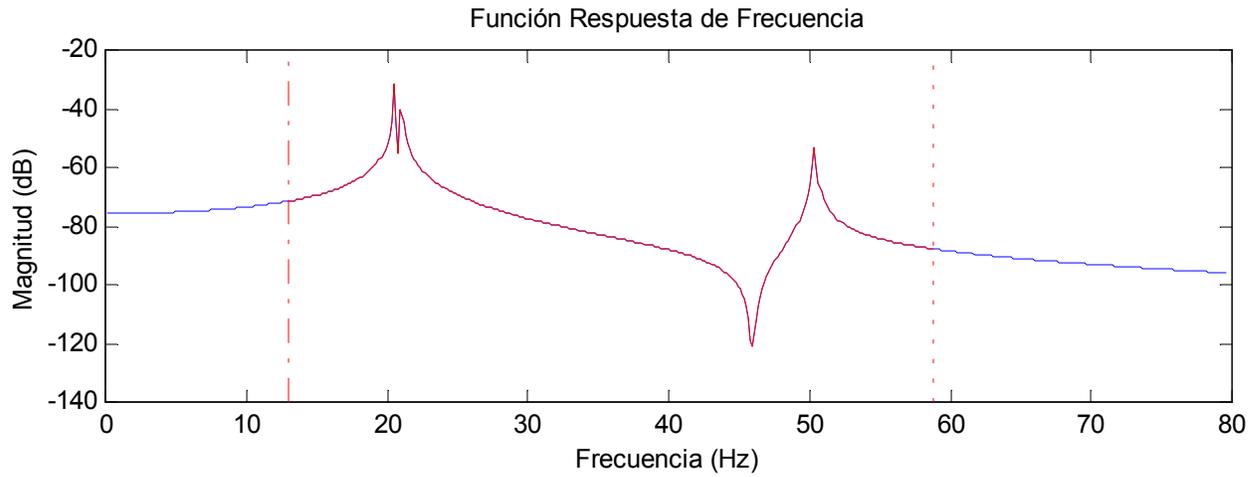
Frec.min = 31.8621 [Hz]		$N = 2$	num1_512-A15.fig	
Frec.max = 28.2873 [Hz]				
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	20.5618 (0.0725%)	0.0017 (88.8889%)	2.1827 (46.7756%)	7.5291 (337.1538%)
2	21.1175 (0.5432%)	0.0013 (59.3750%)	0.5329 (54.67%)	332.0746 (7.1721%)

Caso A1-6:



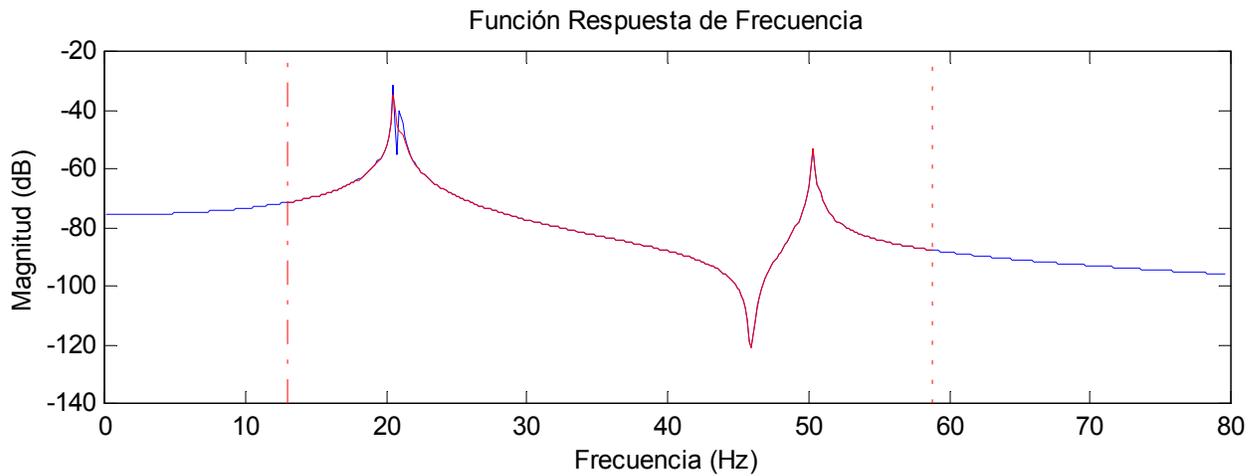
		$N = 3$	num1_512-A16.fig	
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	20.3156 (1.1257%)	0.0003 (66.6667%)	0.3121 (79.0128%)	325.9615 (18826%)
2	20.6961 (1.4631%)	0.0022 (31.25%)	2.4591 (109.1783%)	8.4194 (97.6464%)
3	24.8744 (50.5973%)	0.0054 (260%)	0.0869 (87.0704%)	234.179 (134720%)

Caso A2-1:



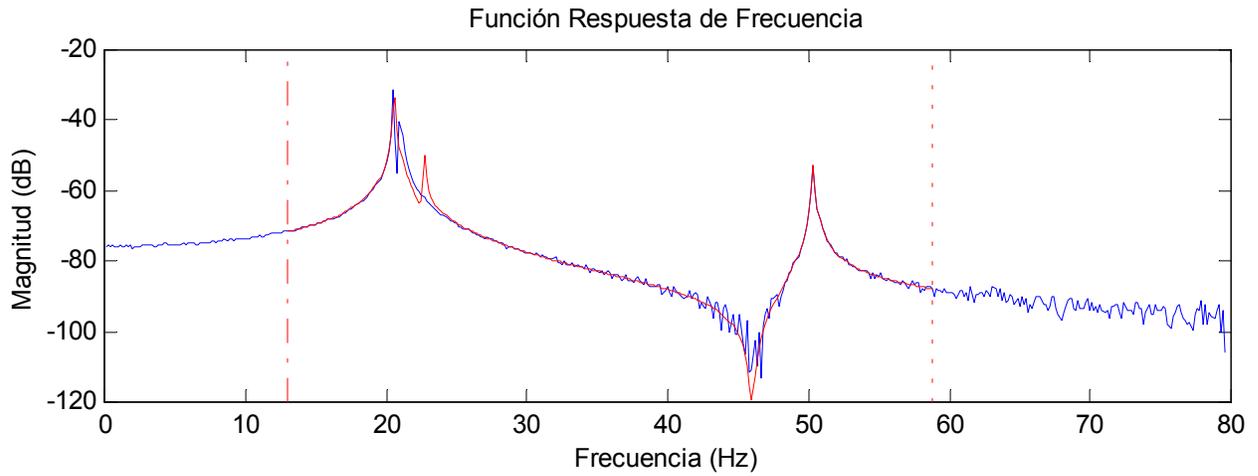
Frec.min = 13.0557 [Hz]		$N = 3$	num1_512-A21.fig	
Frec.max = 58.7506 [Hz]				
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	20.5469 (0%)	0.0009 (0%)	1.4871 (0%)	1.7223 (0%)
2	21.0034 (0%)	0.0032 (0%)	1.1756 (0%)	357.7313 (0%)
3	50.3503 (0%)	0.0015 (0%)	0.6721 (0%)	0.1737 (0%)

Caso A2-2:



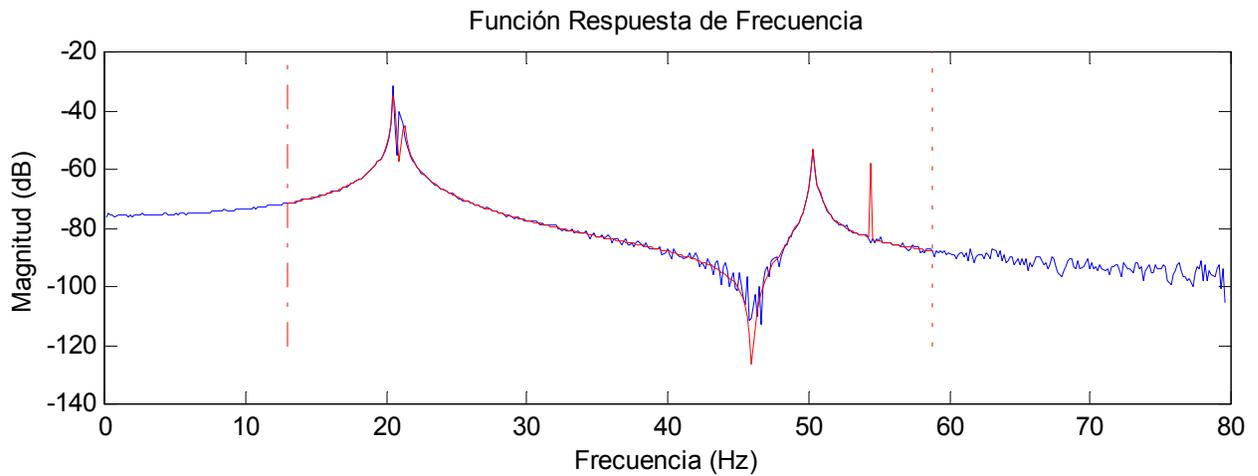
		$N = 4$	num1_512-A22.fig	
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	20.5723 (0.1236%)	0.0018 (100%)	1.8804 (28.4474%)	15.0298 (772.6587%)
2	21.0097 (0.033%)	0.0131 (309.3750%)	0.9722 (17.3018%)	329.0809 (8.0089%)
3	50.3490 (0.0026%)	0.0015 (0%)	0.6722 (0.0298%)	0.1887 (8.6356%)
4	65.7631	-0.3802	0.0014	248.469

Caso A2-3:



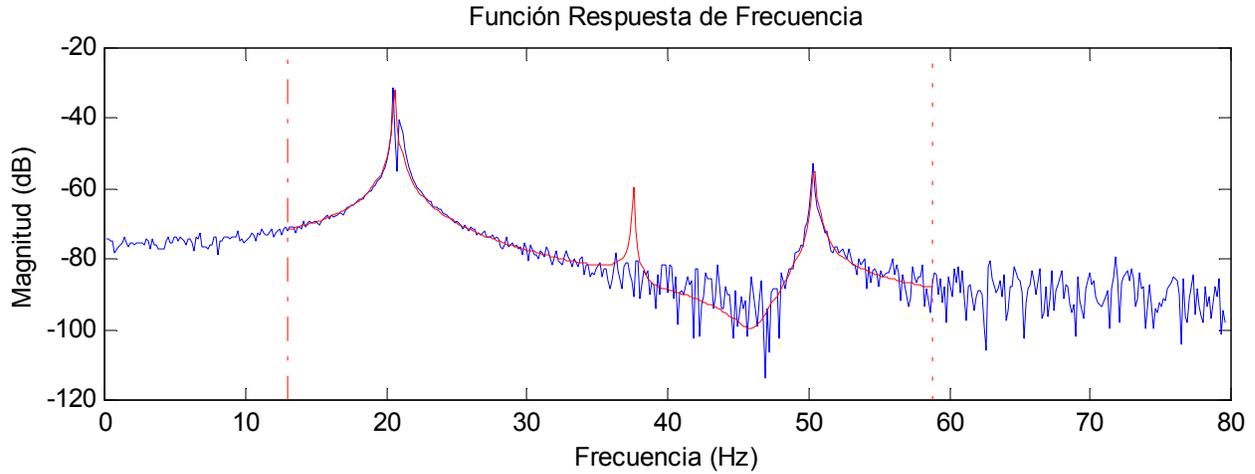
	$\text{Frec. min} = 13.0557 \text{ [Hz]}$			
	$\text{Frec. max} = 58.7506 \text{ [Hz]}$			
		$N = 3$		num1_512-A23.fig
modo	$\omega \text{ [Hz]}$	ξ	C	ϕ
1	20.6157 (0.3348%)	0.0021 (133.3333%)	2.4795 (66.7339%)	3.6993 (114.7884%)
2	22.7138 (8.1434%)	0.0018 (46.25)	0.2360 (79.9251%)	320.758 (10.3355%)
3	50.3531 (0.0056%)	0.0014 (2.4029%)	0.6649 (1.0713%)	0.4459 (156.7070%)

Caso A2-4:



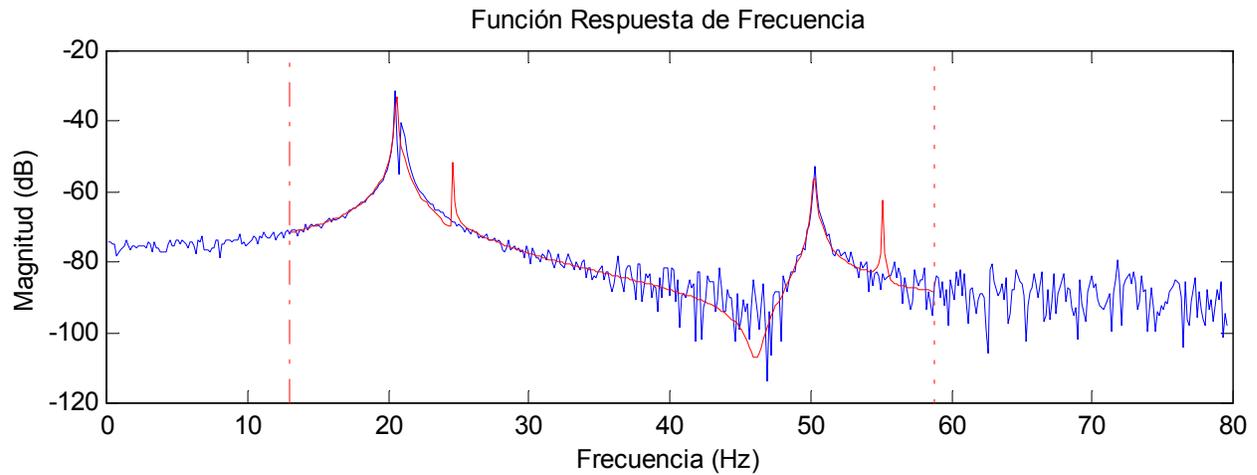
		$N = 4$		
				num1_512-A24.fig
modo	$\omega \text{ [Hz]}$	ξ	C	ϕ
1	20.5762 (0.1426%)	0.0013 (44.4444%)	1.8870 (26.8913%)	2.1653 (25.7214%)
2	21.1987 (0.9298%)	0.0028 (12.5%)	0.7837 (33.3362%)	354.9419 (0.7797%)
3	50.3479 (0.0048%)	0.0015 (0%)	0.6663 (0.8630%)	0.3034 (74.6690%)
4	54.4	-1.8978e-005	0.0085	106.6769

Caso A2-5:



Frec.min = 13.0557 [Hz] Frec.max = 58.7506 [Hz]		$N = 3$	num1_512-A25.fig	
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	20.6286 (0.3976%)	0.0024 (166.6667%)	2.6449 (77.8562%)	3.2863 (90.8088%)
2	37.5761 (78.9048%)	0.0009 (71.8750%)	0.1564 (86.6962%)	123.5328 (65.4677%)
3	50.4341 (0.1664%)	0.0011 (26.6667%)	0.6539 (2.7079%)	1.8477 (963.7306%)

Caso A2-6:



		$N = 4$	num1_512-A26.fig	
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	20.6203 (0.3572%)	0.0024 (166.6667%)	2.5750 (73.1558%)	3.9067 (126.8304%)
2	24.5771 (17.0149%)	0.0004 (87.5%)	0.1144 (90.2688%)	313.7047 (12.3072%)
3	50.2848 (0.1301%)	0.0015 (0%)	0.6438 (4.2107%)	10.5389 (5961.5%)
4	55.2010	-3.4872e-005	0.0801	118.8846

5.2.2 MODOS FUERTEMENTE ACOPLADOS

Se sintetizó una FRF para un sistema de 3 grados de libertad con amortiguamiento viscoso con los valores de masa, amortiguación y rigidez representados en la Fig. 5.2 y con los respectivos valores teóricos para la frecuencia natural, razón de amortiguamiento, magnitud y ángulo de fase de la constante modal para cada modo, indicados en la Tabla 5.2.

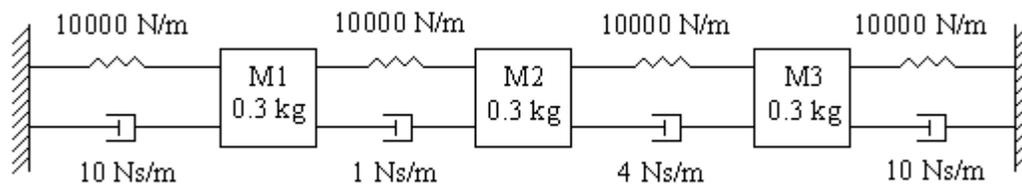


Fig.5.2: Sistema de 3 grados de libertad para simular modos fuertemente acoplados.

Frecuencias Naturales (Hz)	Razones de Amortiguamiento	Constantes Modales	
		Magnitudes	Fases (grados)
$\omega_1 = 22.2587$	$\xi_1 = 0.0622$	$C_1 = 0.8350$	$\phi_1 = 357.1565$
$\omega_2 = 41.1247$	$\xi_2 = 0.0807$	$C_2 = 1.6712$	$\phi_2 = 4.4710$
$\omega_3 = 53.6050$	$\xi_3 = 0.0607$	$C_3 = 0.8436$	$\phi_3 = 355.2357$

Tabla 5.2: Valores teóricos de ω , ξ , C y ϕ para modos fuertemente acoplados.

Para la evaluación del método de simuló la FRF debido a una fuerza excitadora de tipo transiente en la masa M1 y la respuesta en la misma masa M1.

Los procedimientos de evaluación son los siguientes:

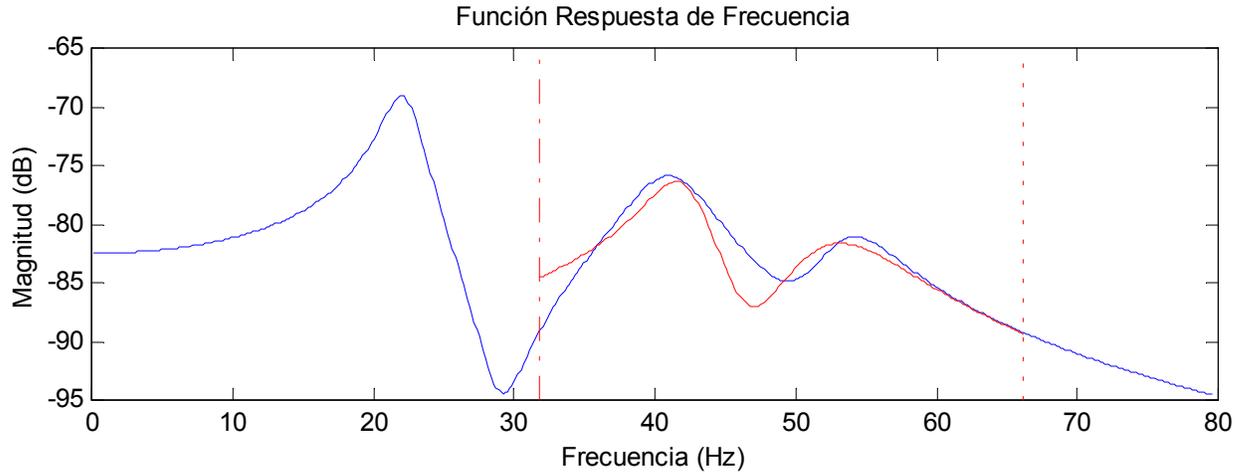
1. Se escogió un rango de frecuencia delimitado por $f_{\min} = 31.8621$ Hz y $f_{\max} = 66.2109$ Hz alrededor de los 2 modos acoplados y se realizó una estimación para $N=2$ y $N=3$. Se repitió este procedimiento

manteniendo el mismo rango de frecuencia para la FRF con 37.83 dB de nivel señal-ruido y para la FRF con 24.067 dB de nivel señal-ruido.

2. Se escogió un rango de frecuencia delimitado por $f_{\min} = 11.8123$ Hz y $f_{\max} = 66.2109$ Hz alrededor de los 3 modos presentes en la FRF y se realizó una estimación para $N=3$ y $N=4$. Se repitió este procedimiento manteniendo el mismo rango de frecuencia para la FRF con 37.83 dB de nivel señal-ruido y para la FRF con 24.067 dB de nivel señal-ruido.

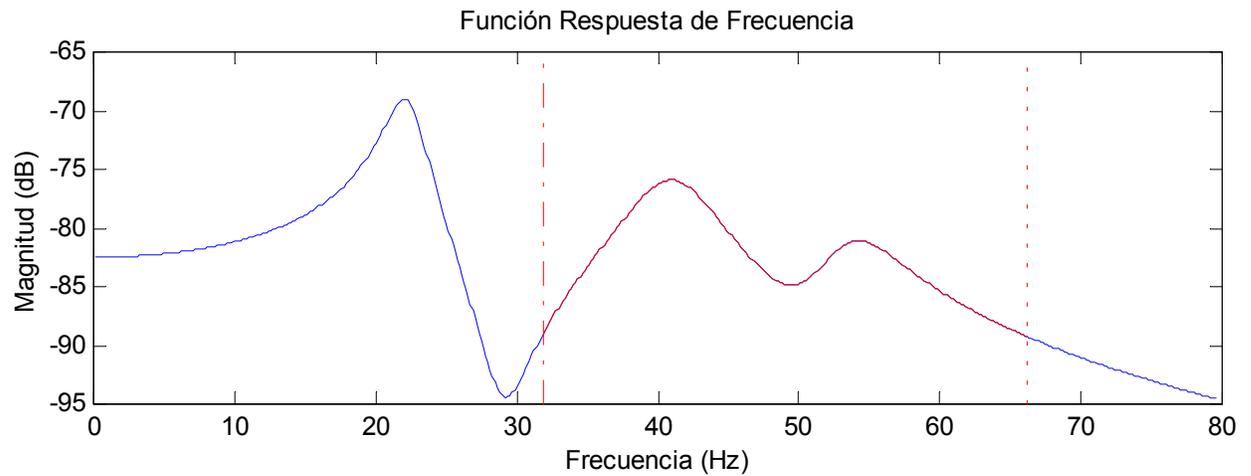
Los resultados de las estimaciones para modos fuertemente acoplados son presentados en las siguientes figuras donde se representan las respectivas FRFs simuladas (en azul), dos líneas perpendiculares que indican la frecuencia mínima y la frecuencia máxima del rango de frecuencia escogido y la FRF generada (en rojo). Los valores estimados son presentados en una tabla, donde el valor entre paréntesis indica el *porcentaje de error* del valor estimado con respecto al valor teórico.

Caso B1-1:



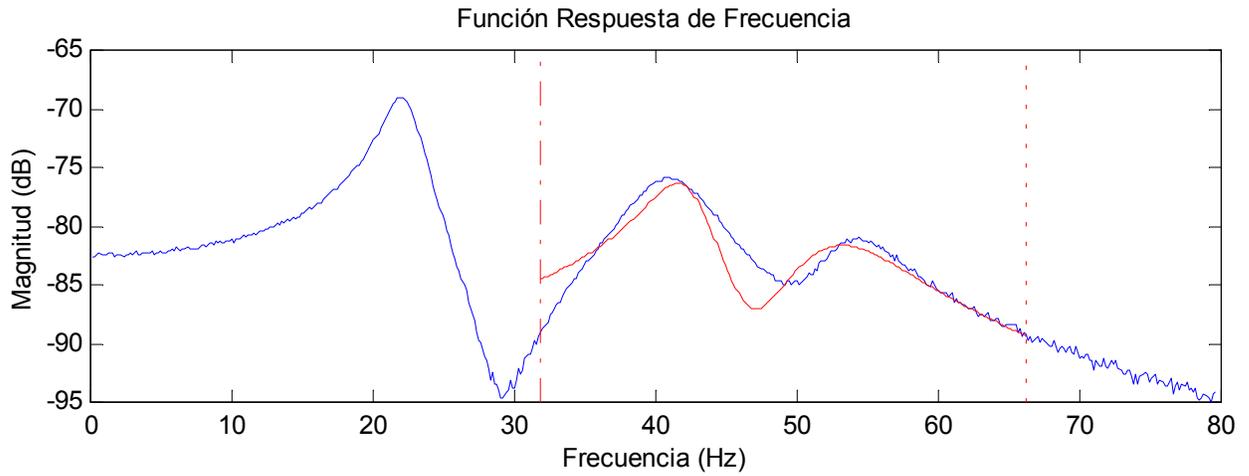
		Frec.min = 31.8621 [Hz] Frec.max = 66.2109 [Hz]	N = 2	num1_512-B11.fig	
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ	
2	42.2049 (2.6266%)	0.0568 (29.6159%)	1.1218 (32.8746%)	334.8746 (7389.9%)	
3	52.3378 (2.3640%)	0.0970 (59.8023%)	1.7602 (108.6534%)	359.6909 (1.8274%)	

Caso B1-2:



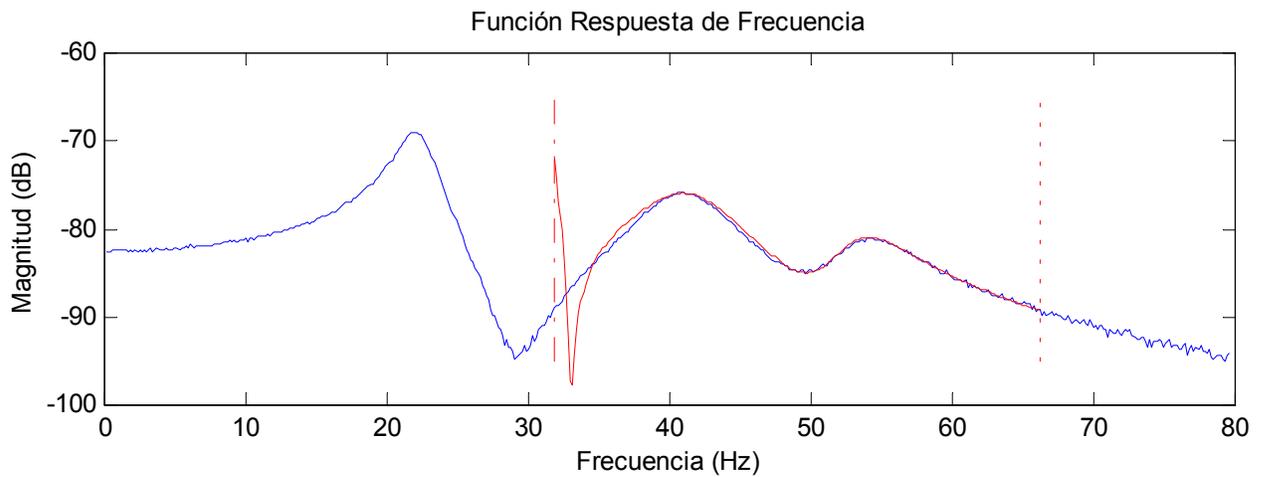
		N = 3	num1_512-B12.fig	
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	22.2587 (0%)	0.0622 (0%)	0.8350 (0%)	357.1565 (0%)
2	41.1247 (0%)	0.0807 (0%)	1.6712 (0%)	4.4710 (0%)
3	53.6050 (0%)	0.0607 (0%)	0.8436 (0%)	355.2357 (0%)

Caso B1-3:



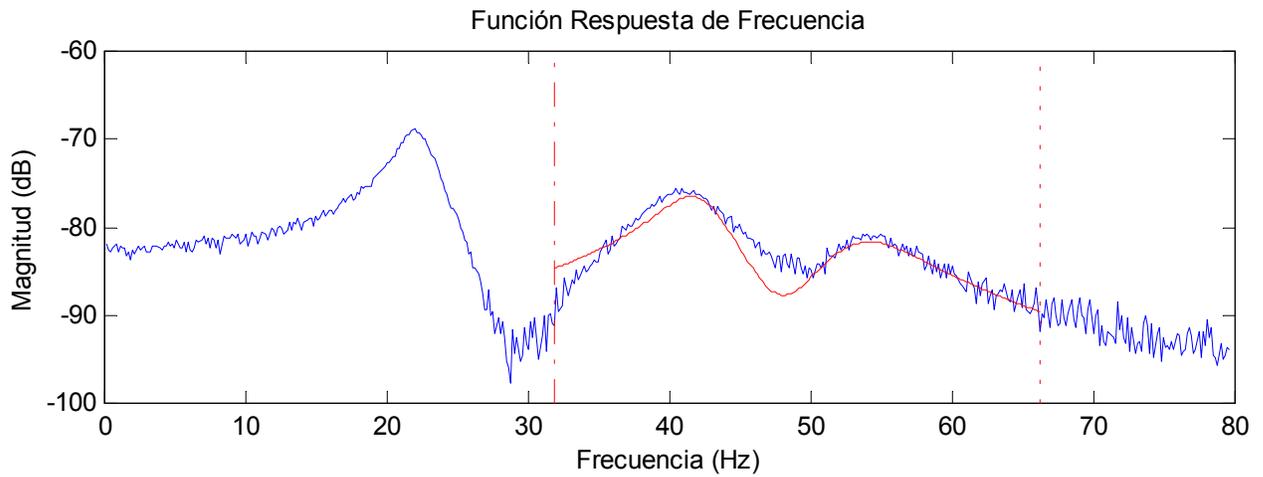
	Frec.min = 31.8621 [Hz] Frec.max = 66.2109 [Hz]	$N = 2$		num1_512-B13.fig
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
2	42.2105 (2.6403%)	0.0568 (29.6159%)	1.1236 (32.7669%)	335.0054 (7392.9%)
3	52.3507 (2.3399%)	0.0970 (59.8023%)	1.7594 (108.5586%)	135.6909 (1.8274%)

Caso B1-4:



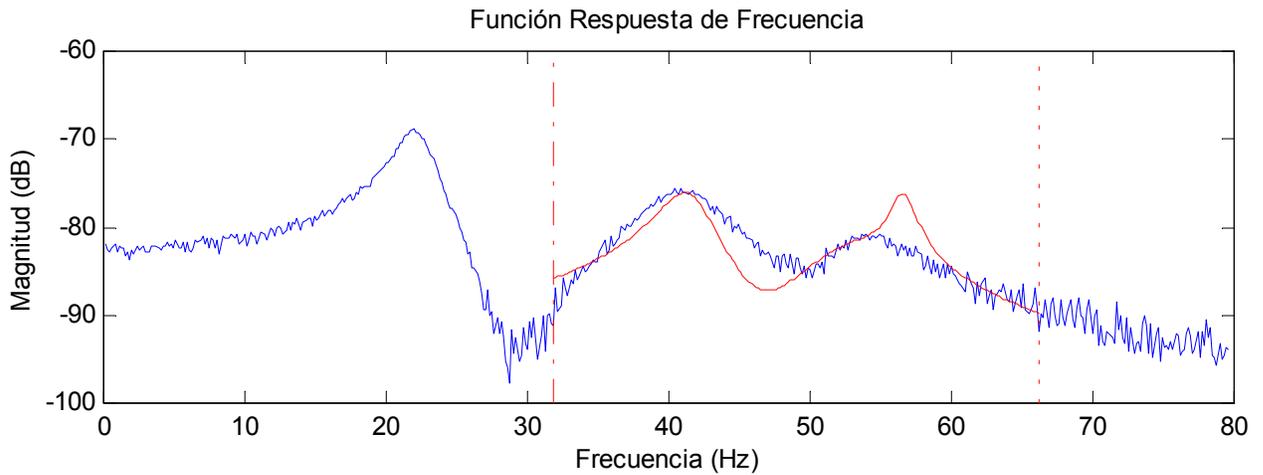
		$N = 3$		num1_512-B14.fig
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	31.7831 (42.7896%)	-0.0127 (120.418%)	0.2836 (66.0359%)	349.3741 (2.1790%)
2	41.3845 (0.6317%)	0.0964 (19.4548%)	2.0641 (23.5101%)	358.0187 (7907.6%)
3	53.3569 (0.4628%)	0.0580 (4.4481%)	0.8467 (0.3675%)	2.9950 (99.1521%)

Caso B1-5:



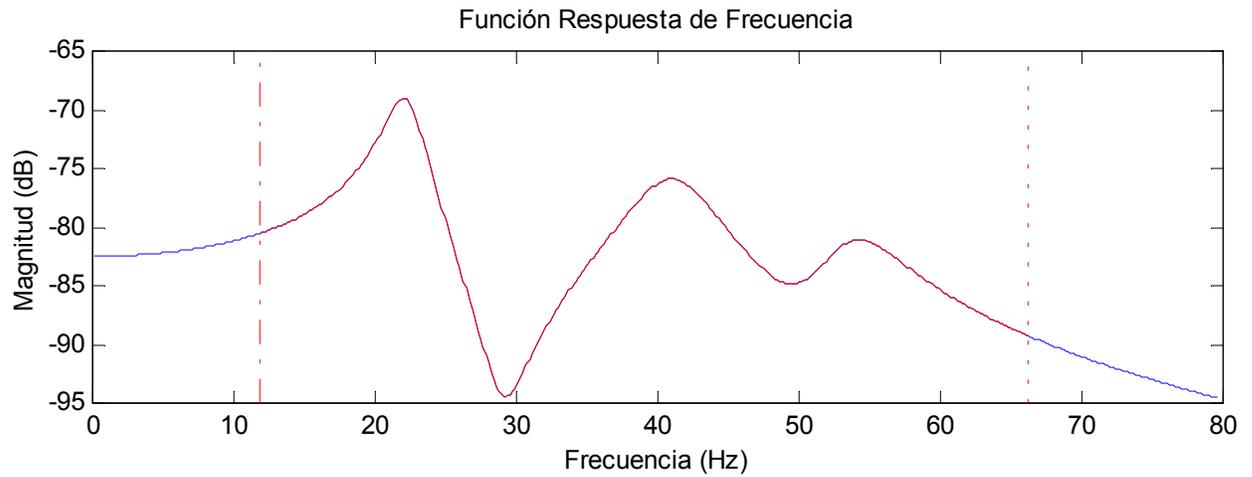
		Frec.min = 31.8621 [Hz] Frec.max = 66.2109 [Hz]	$N = 2$		num1_512-B15.fig
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ	
2	42.1383 (2.4647%)	0.0637 (21.0657%)	1.2574 (24.7607%)	341.1535 (75304%)	
3	53.3188 (0.5339%)	0.0804 (32.4547%)	1.4164 (67.8995%)	357.1592 (1.1107%)	

Caso B1-6:



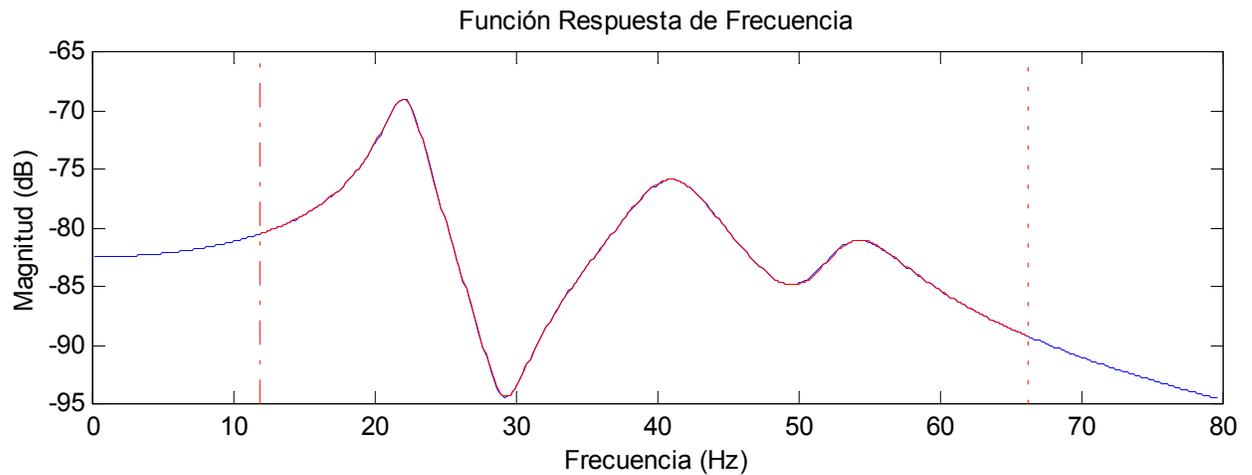
		$N = 3$		num1_512-B16.fig
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	41.5196 (86.5320%)	0.0476 (23.4727%)	0.9236 (10.6108%)	339.812 (4.8563%)
2	53.0129 (28.9077%)	0.0924 (14.4981%)	1.6375 (2.0165%)	336.6476 (7429.6%)
3	56.5883 (5.5653%)	-0.0166 (127.3476%)	0.3371 (60.0403%)	109.6447 (68.9599%)

Caso B2-1:



Frec.min = 11.8123 [Hz] Frec.max = 66.2109 [Hz]		N = 3		num1_512-B21.fig
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	22.2587 (0%)	0.0622 (0%)	0.8350 (0%)	0357.1565 (0%)
2	41.1247 (0%)	0.0807 (0%)	1.6712 (0%)	4.4710 (0%)
3	53.6050 (0%)	0.0607 (0%)	0.8436 (0%)	355.2357 (0%)

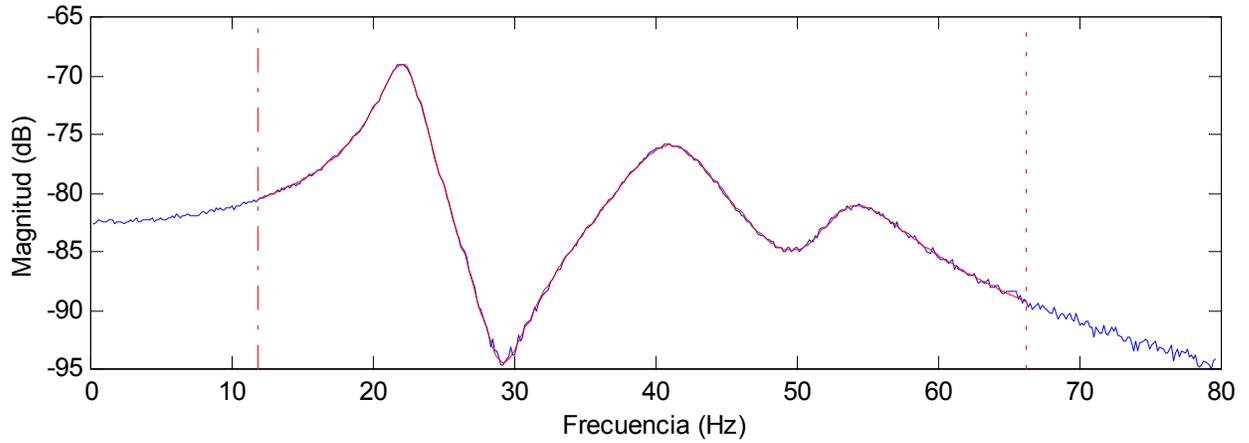
Caso B2-2:



		N = 4		num1_512-B22.fig
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	22.2476 (0.0499%)	0.0630 (1.2862%)	0.0873 (89.5449%)	357.3998 (0.0681%)
2	41.0990 (0.0625%)	0.0805 (0.2478%)	1.6655 (0.3411%)	5.0377 (12.6750%)
3	53.6930 (0.1642%)	0.0596 (1.8122%)	0.8301 (1.6003%)	354.1971 (0.2722%)
4	63.1490	-0.0473	0.0021	106.0889

Caso B2-3:

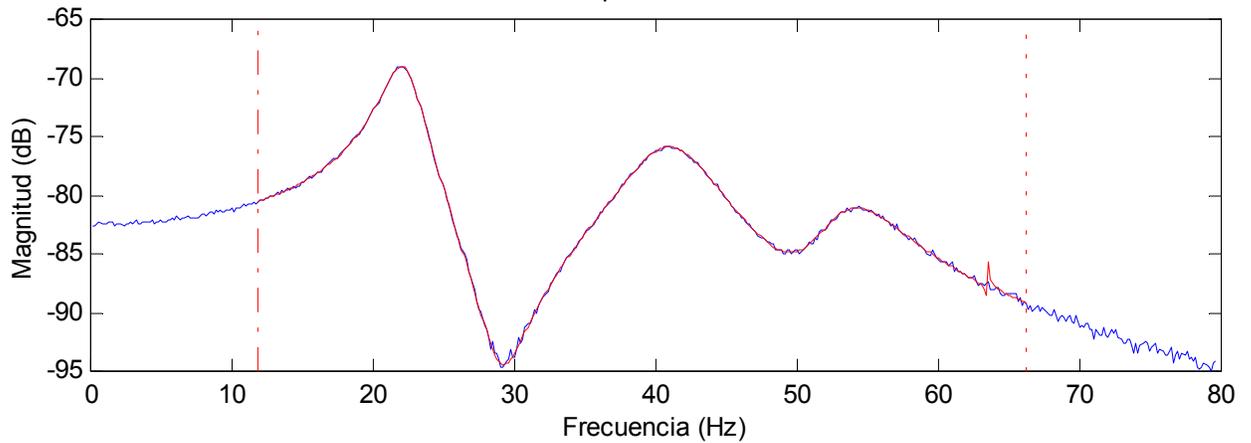
Función Respuesta de Frecuencia



Frec.min = 11.8123 [Hz]		N = 3		num1_512-B23.fig	
Frec.max = 66.2109 [Hz]					
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ	
1	22.2698 (0.0499%)	0.0620 (0.3215%)	0.8347 (0.0359%)	356.9071 (0.0690%)	
2	41.1879 (0.1537%)	0.0821 (1.7348%)	1.7073 (2.1601%)	4.0967 (8.3717%)	
3	53.6145 (0.0177%)	0.0594 (2.1417%)	0.8269 (1.9796%)	356.3863 (0.8919%)	

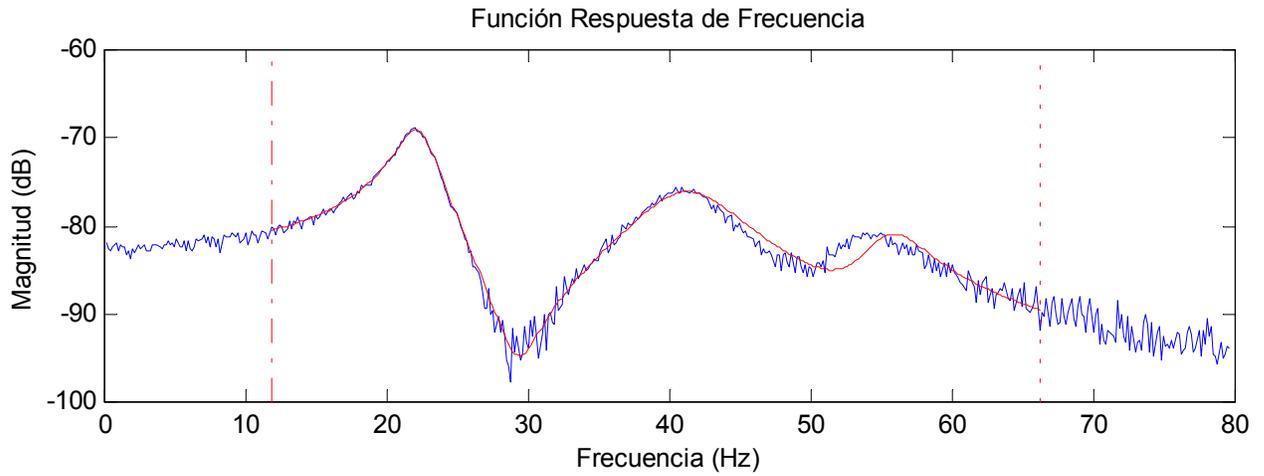
Caso B2-4:

Función Respuesta de Frecuencia



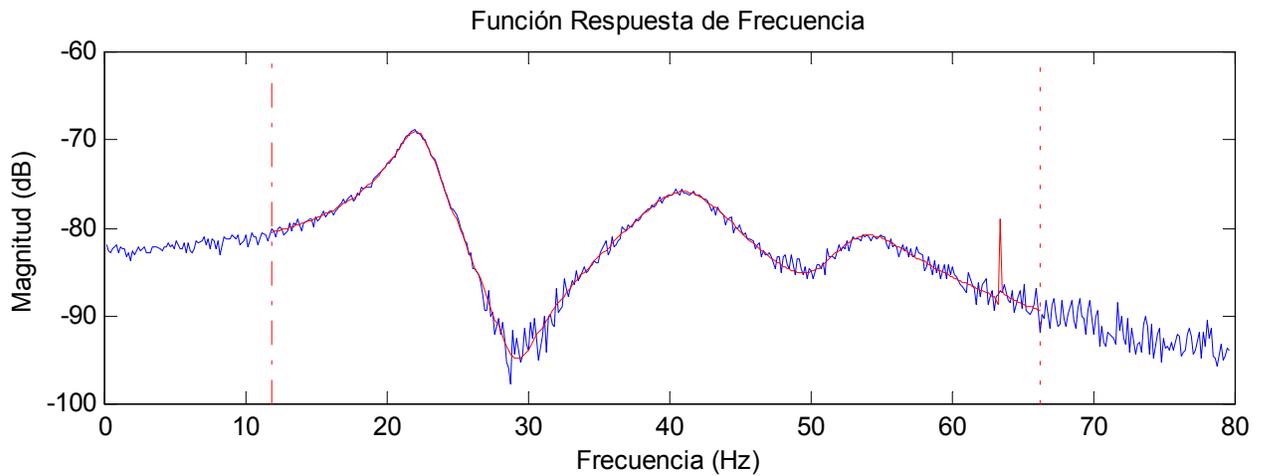
		N = 4		num1_512-B24.fig	
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ	
1	22.2544 (0.0193%)	0.0622 (0%)	0.8345 (0.0599%)	357.2424 (0.0241%)	
2	41.1202 (0.0109%)	0.0807 (0%)	1.6704 (0.0479%)	4.6176 (3.2789%)	
3	53.6148 (0.0183%)	0.0604 (0.4942%)	0.8403 (0.3912%)	355.0613 (0.5168%)	
4	63.5531	4.2523e-004	0.0028	11.4542	

Caso B2-5:



Frec.min = 11.8123 [Hz]		N = 3	num1_512-B25.fig	
Frec.max = 66.2109 [Hz]				
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	22.3066 (0.2152%)	0.0639 (2.7331%)	0.8562 (2.5389%)	357.2745 (0.0330%)
2	41.2829 (0.3847%)	0.0904 (12.0198%)	1.8644 (11.5606%)	9.7781 (118.7005%)
3	55.5402 (3.6101%)	0.0432 (28.8303%)	0.5937 (29.6230%)	339.3211 (3.9392%)

Caso B2-6:



		N = 4	num1_512-B26.fig	
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ
1	22.2638 (0.0229%)	0.0626 (0.6431%)	0.83.95 (0.5389%)	356.6262 (0.1485%)
2	41.0915 (0.0807%)	0.0809 (0.2478%)	1.6878 (0.9933%)	4.7941 (7.2266%)
3	53.4086 (0.3664%)	0.0556 (8.4020%)	0.8027 (4.8483%)	356.8169 (1.0138%)
4	63.3980	-4.5532e-005	0.0073	311.1914

5.2.3 DISCUSIÓN RESULTADOS TEÓRICOS

Modos Cercanamente Espaciados

Se obtienen mejores resultados para la FRF sin ruido y con bajo nivel de ruido si se especifica la contribución de otro modo al escoger un rango de frecuencia alrededor de los dos modos cercanamente espaciados. Como es de esperarse, una perfecta similitud se encuentra en la FRF simulada sin ruido (Caso A1-2). Incluso, este es capaz de identificar el modo fuera del rango de frecuencias escogido. En presencia de bajo nivel de ruido (Caso A1-4), el método no es capaz de identificar el modo fuera de rango, pero los valores estimados para las frecuencias naturales de los modos cercanos son aceptables, no es el mismo caso para los otros parámetros estimados, los cuales presentan considerables errores. En presencia de alto nivel de ruido (Caso A1-6), no es capaz de identificar claramente los modos cercanos ni tampoco de identificar el tercer modo fuera de rango. Para este caso, especificando sólo los modos presentes en el rango de frecuencia, el método da mejores resultados en identificar los modos cercanos, aunque los valores estimados para las razones de amortiguamiento, magnitud y fase de las constantes modales tienen considerables errores.

Escogiendo un rango de frecuencias que contenga los tres modos presentes en la FRF y especificando el correcto número de modos presentes, da resultados exactos para la FRF simulada sin ruido (Caso A2-1) como es de esperarse, aunque en presencia de bajo nivel (Caso A2-3) y alto nivel de ruido (Caso A2-5), el método puede identificar la primera y la tercera frecuencia natural pero no es capaz de reconocer los dos modos cercanos. Además, los errores son considerables para la estimación de las razones de amortiguamiento, la magnitud y fase de las constantes modales. Al sobre estimar el número de modos, se guía el cálculo de modos computacionales con parámetros incorrectos (Caso A2-2, A2-4 y A2-6), aunque el método es capaz de reconocer los modos acoplados incluso para bajo nivel de ruido, pero con errores considerables para los otros parámetros.

En resumen, para una medición experimental de FRF con bajo nivel de ruido que contenga modos cercanamente espaciados, es preferible escoger un rango de frecuencias alrededor de los modos cercanos, especificando la contribución de otros modos presentes en la medición, aunque la estimación para los modos fuera de rango puede ser errónea. Ciertamente, la capacidad de reconocer dos modos cercanos decrece con el incremento del nivel de ruido.

Modos Fuertemente Acoplados

Escogiendo un rango de frecuencias alrededor de los modos acoplados, indicando la contribución de otro modo, se obtienen mejores resultados para la FRF simulada sin ruido y con bajo nivel de ruido. La estimación de valores para la FRF simulada sin ruido (Caso B1-2) da resultados exactos, pero la estimación de valores de la FRF con bajo nivel de ruido (Caso B1-4), el método no es capaz de identificar el otro modo. Incluso guía al cálculo de modos computacionales con parámetros incorrectos. Con alto nivel de ruido (Caso B1-6), los modos 2 y 3 los identifica como 1 y 2, generando gran cantidad de error. En este caso, especificando sólo el número de modos presentes en el rango da mejores resultados para las frecuencias naturales, aunque los otros parámetros estimados tienen considerables errores.

Como habría de esperarse, escogiendo una rango de frecuencias que contenga todos los modos y especificando el correcto número de modos presentes da resultados exacto. Inclusive con los valores estimados para la FRF con bajo nivel (Caso B2-3) y alto nivel de ruido (Caso B2-5) los resultados son aceptables. Sobre estimando el número de modos presentes se guía al cálculo de modos computacionales con parámetros incorrectos, pero los valores estimados para la FRF con bajo nivel (Caso B2-4) y alto nivel de ruido (Caso B2-6) son mejores que especificando el número de modos presentes en el rango.

En resumen, para una medición experimental que contenga un fuerte acoplamiento modal entre sus modos, es preferible escoger una rango de frecuencia que contenga todos los modos presentes en la

medición y sobre estimar el número de modos presentes. Sin embargo, esto guiará al cálculo de modos computacionales que deberán ser eliminados, pero los valores estimados serán aceptables.

En presencia de ruido en el caso general, son encontradas algunas dificultades. La ejecución del método muestra dependencia si el rango de frecuencia escogido es cambiado. Empíricamente se encontró que considerando un rango ancho de frecuencias alrededor de los modos a ser estimados, se obtienen mejores resultados que sólo escogiendo un rango estrecho de frecuencias. Esto se debe a que un rango ancho de frecuencias incluye puntos que pueden proveer más información acerca de los modos fuera de rango.

5.2 CASO EXPERIMENTAL

Puesto que el método RFP descrito es un método SISO-MDOF sólo puede procesar una FRF a la vez. Además, la estructura bajo prueba es una estructura continua y homogénea, y asumiendo teóricamente que los parámetros modales son los mismos en cada FRF, se hace innecesario evaluar todas las mediciones que se obtuvieron experimentalmente. Para demostrar la naturaleza global de la frecuencia modal y el amortiguamiento modal, en la fig 5.3 se muestra la magnitud de la FRF para las 9 mediciones realizadas en la viga de aluminio. Se observa un peak en la misma frecuencia en cada medición, indicando la naturaleza global de la frecuencia modal. Por otro lado, el ancho del peak modal para cada modo es aproximadamente igual para cada medición, lo que nuevamente indica la naturaleza global del amortiguamiento del modo respectivo.

La forma de decidir que medición usar es observando la Coherencia de las señales y decidir cual presenta mejor linealidad. Al evaluar la Coherencia de cada una de las mediciones, se encontró la mejor linealidad en la medición número 3, esto es, fuerza excitadora en punto 3 y respuesta de salida en punto 7,. Esta medición es representada por H(7,3). La FRF escogida para ser estimada se muestra en la Fig. 5.4

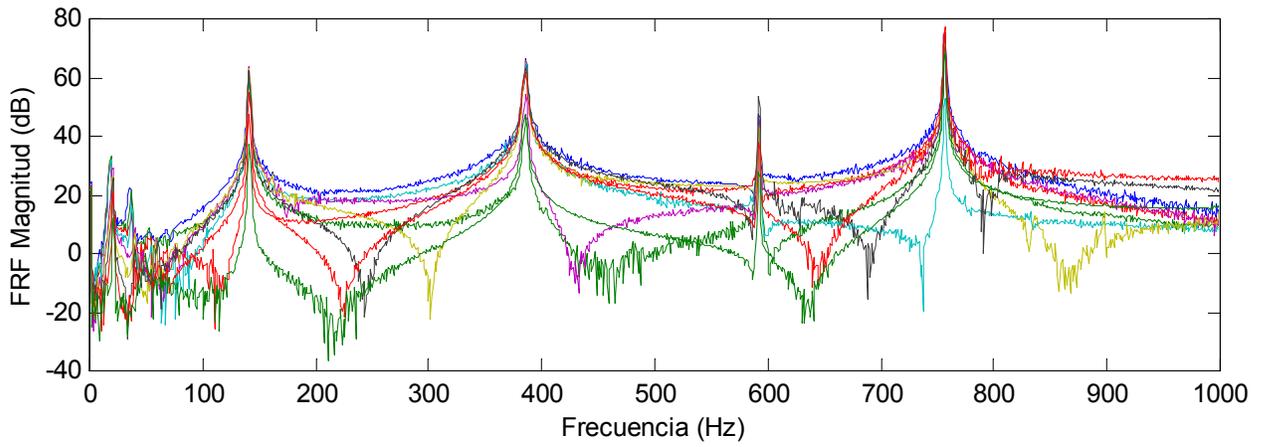


Fig. 5.3: Magnitud de la FRF para las 9 mediciones realizadas para el análisis modal experimental.

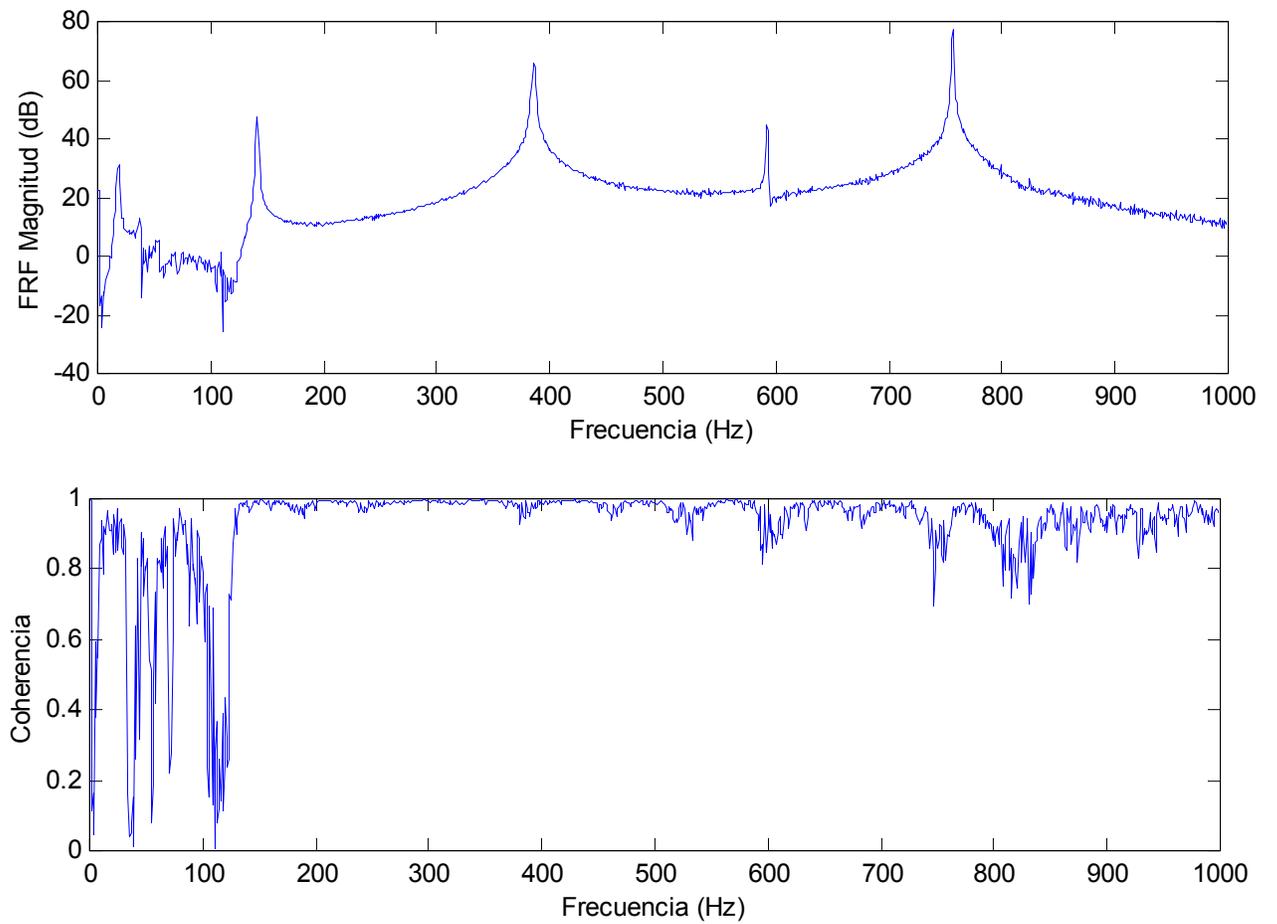


Fig.5.4: Magnitud de la FRF y Función de Coherencia de la medición H(7,3).

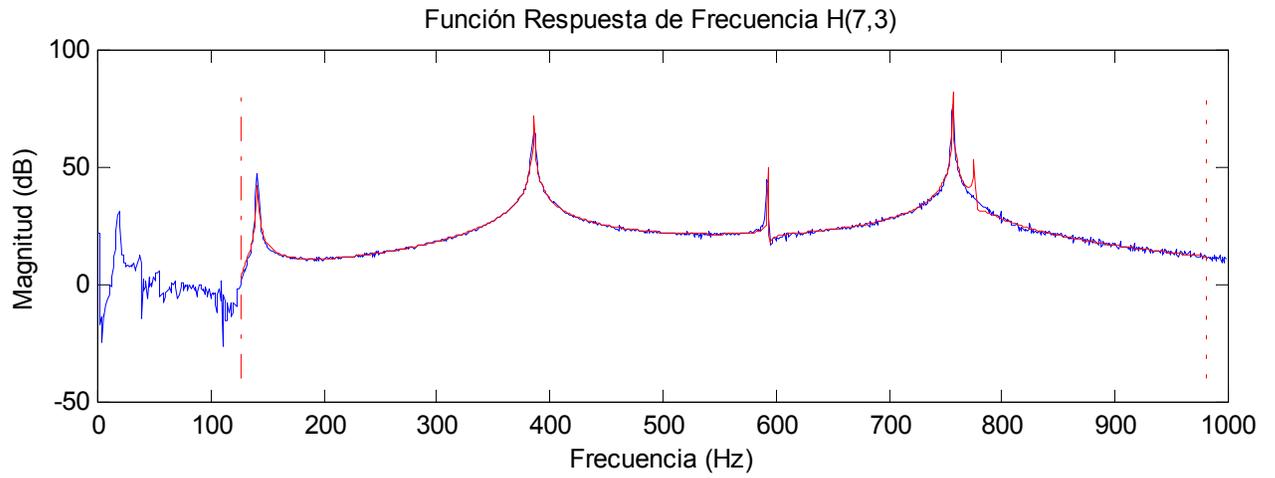
con su correspondiente función de Coherencia. Esta FRF en su forma de receptancia tiene como frecuencia máxima 999.023 Hz con 1024 puntos a una resolución de 0.9756 Hz.

El rango de frecuencia escogido para la evaluación de la FRF corresponde al rango de linealidad presentado por la Coherencia. Se puede observar que la linealidad de la Coherencia para bajas frecuencias es baja. Esto puede ser causado por varios factores como leakage, presencia de nodos o sistema no lineal, por lo que éste rango de frecuencias bajas no será considerado en el análisis.

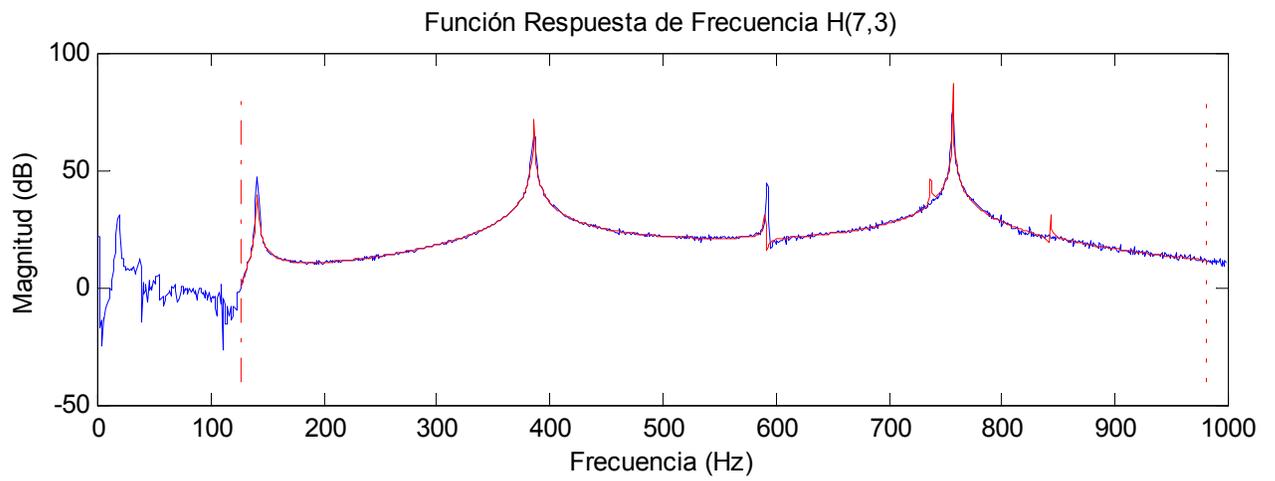
Como la FRF $H(7,3)$ obtenida experimentalmente presenta modos espaciados bien definidos y con un leve amortiguamiento modal, se estableció de antemano la existencia de 4 modos. El procedimiento de evaluación de la medición experimental fue de acuerdo a los resultados que obtuvimos teóricamente para el caso de modos fuertemente acoplados, esto es, escoger un rango de frecuencia que contenga todos los modos presentes en la medición y sobre-especificar el número de modos presentes. Como el método es muy sensible al cambio del rango de frecuencia, se mantuvo el rango de frecuencias constante y se sobre-especificó el número de modos del orden de 6 hasta 9. Debido a que asignar más modos que los presentes en el intervalo de frecuencias escogido guía al cálculo de modos falsos no presentes en el intervalo, como también de modos computacionales, estos fueron eliminados manualmente de los resultados obtenidos. Los valores estimados obtenidos son promediados y presentados con la *desviación standard de la media* para cada modo.

Los gráficos de las estimaciones para $N=6$ hasta $N=9$ y la tabla de los valores estimados obtenidos se muestran a continuación:

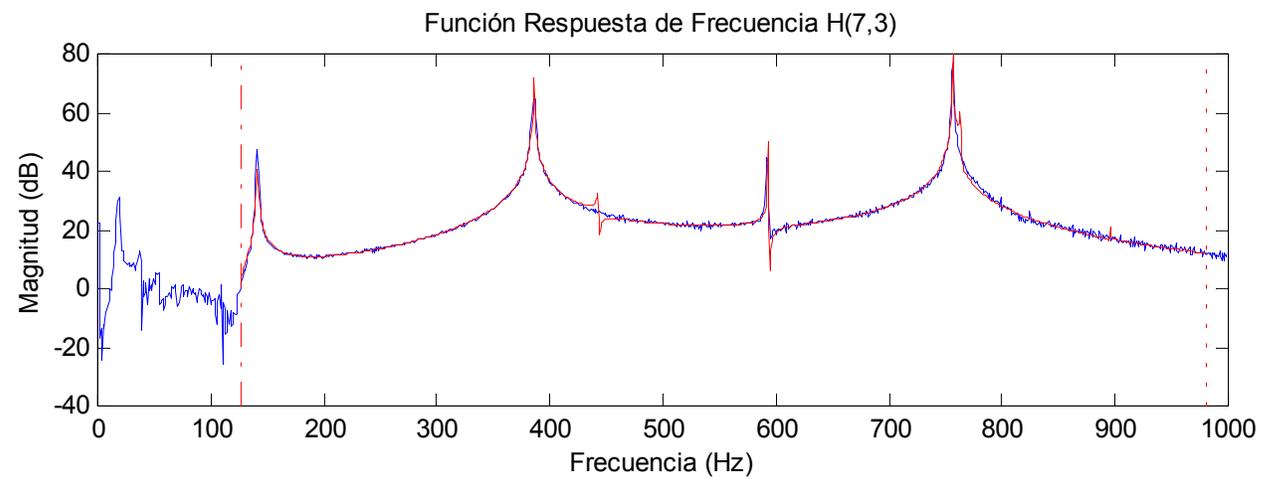
Caso $N=6$:



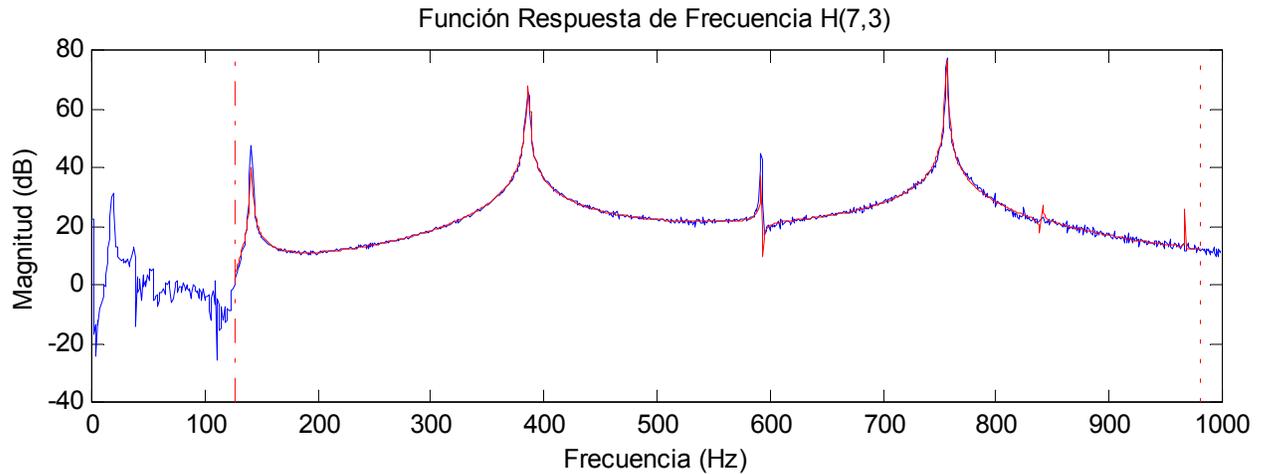
Caso $N=7$:



Caso $N=8$:



Caso $N=9$:



La siguiente tabla muestra los valores experimentales para frecuencia natural, razón de amortiguamiento, magnitud y ángulo de fase de la constante modal, con sus respectivos valores de desviación standard de la media.

Frec.min = 126.953 [Hz] Frec.max = 980.469 [Hz]				
modo	ω [Hz]	ξ	C	ϕ [grados]
1	1.4117e+2 (1.7455e-2%)	3.3844e-4 (1.0752e-5%)	3.9990e+5 (1.1416e+5%)	3.003 (1.5408%)
2	3.8566e+2 (6.58e-2%)	7.0027e-4 (6.0331e-5%)	7.9444e+7 (9.2516e+5%)	185.28 (4.1636%)
3	5.9200e+2 (4.8555e-1%)	3.6411e-5 (6.6097e-6%)	8.1538e+5 (8.7142e+4%)	338.759 (7.4746%)
4	7.5683e+2 (7.8938e-2%)	7.6128e-5 (1.1385e-5%)	8.7865e+7 (5.0925e+6%)	348.588 (13.242%)

Tabla 5.3: Valores experimentales de ω , ξ , C y ϕ . Estos valores fueron obtenidos promediando todos los valores estimados para los casos $N=6,7,8$ y 9 y con un grado de incertidumbre a través de la desviación standard de la media.

5.2.1 DISCUSIÓN RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los resultados obtenidos para la curva generada con menos de 6 modos no son adecuados y presentan errores considerables. Las curvas generadas para la estimación de 6 a 9 modos son bastante

exactas y conservan un gran parecido con la original. Al sobre estimar del número de modos, el método identifica modos muy cercanos en los modos verdaderos (los que están presentes en la medición), dificultando su identificación manual si no es especificada una tolerancia a seguir para la frecuencia natural.

Las curvas generadas son bastante parecidas a la curva original. Los valores de la desviación standard de la media (indica el grado de incertidumbre correspondiente a los valores entre paréntesis en la Tabla 5.3) para las frecuencias naturales son bastantes pequeños, estos presentan un mayor valor para el tercer modo, pero este valor es menor que la resolución ocupada, lo que resulta en una muy buena estimación. Para las razones de amortiguamiento de los modos 1,2 y 3, los errores son aceptables pero es considerable para el modo 4 encontrándose un porcentaje de error de 14.95% (valor de desviación standard comparado con el valor promediado). Los valores para las magnitudes de las constantes modales presentan las mayores discrepancias. Observando los gráficos de las estimaciones, se encuentra que la magnitud de la curva estimada no representa la magnitud de la curva experimental en cada modo. Debido a que la magnitud de cada modo está relacionado con la magnitud de la constante modal, era de esperarse que este parámetro contuviera gran cantidad de error. Los valores estimados para las fases de las constantes modales contienen errores aceptables.

La inconsistencia en los valores obtenidos por las constantes modales se debe a la distorsión que presenta la FRF, lo que deriva en una incorrecta estimación. Aunque el método trabaja extremadamente bien en pruebas con FRF simuladas, las mediciones experimentales de estructuras reales son usualmente muy diferentes de las FRF analíticas. Existen múltiples factores de inexactitud para la FRF experimentales realizadas. Entre estos se incluyen la selección de la función ventana durante el procesamiento de señal. Como la señal de respuesta no fue completamente contenida en el intervalo de tiempo sampleado, la función ventana Hanning fue ocupada para minimizar el leakage. Este tipo de ventana no es la indicada para este tipo de respuesta, con lo que la medición de la FRF tiene gran cantidad de error, debido al leakage que distorsiona la información y con esto sus parámetros modales.

5.3 CONCLUSIONES

Las mediciones de FRF son siempre realizadas sobre un limitado rango de frecuencias por excitación de la estructura con alguna señal de banda ancha. Las mediciones típicamente contendrán los efectos residuales de resonancias, los cuales se encuentran fuera del rango de frecuencia de la medición. Como solamente se realiza una estimación con un rango limitado de frecuencias alrededor de los máximos de los modos, para obtener resultados exactos la forma de compensar los efectos residuales de otras resonancias es especificando términos adicionales de modos a la medición. Sin embargo, esto admite frecuentemente parámetros incorrectos cuando la FRF contiene mucho ruido o es sobrestimado el número de modos presentes. Así, los resultados son difíciles de interpretar debido a que los modos computacionales son mezclados con los modos verdaderos.

Aunque el método trabaja extremadamente bien en pruebas con FRF simuladas, mediciones de análisis modal experimental de estructuras reales son muy diferentes de las FRF analíticas. La calidad de la estimación de los parámetros modales depende de la calidad de la medición de la FRF. La inexactitud puede incluir múltiples razones, las cuales incluyen los supuestos con que trabaja el método RFP. Dentro de este punto, el error más frecuente es asumir la estructura como lineal. Una estructura presenta comportamiento no lineal cuando su respuesta depende del nivel de excitación usado. Debido a la falta de control del nivel de fuerza durante el proceso de medición, la prueba de impacto es una de las peores técnicas de excitación para la medición de la FRF de estructuras no lineales. Otra fuente de inexactitud de la FRF son los problemas de medición, como la precisión de los transductores ya sea para la entrada o la salida, e incluso la posición del transductor de salida, el cual puede estar muy cerca de un punto de antiresonancia o *punto nodal* lo que haría difícil realizar una medición para ese modo en particular. La de mayor influencia en la exactitud de la medición de la FRF es el sistema de adquisición y procesamiento de datos o análisis espectral. Cualquier error de estos procesos provocará dificultades y errores en el proceso de estimación de la curva, que se traduce en errores de estimación de los parámetros

modales. Tal caso se presentó en las mediciones experimentales realizadas. El uso de una inadecuada función ventana (Hanning) para la respuesta de salida, resultó en una medición de FRF con ruido.

Como conclusión general, se obtuvieron resultados exactos con FRF simuladas sin ruido o en otras palabras con mediciones "*perfectas*". Obviamente, si el método RFP no es capaz de producir resultados exactos con mediciones perfectas no sería necesario su uso en mediciones de estructuras reales. En presencia de ruido, el método RFP resultó ser dependiente del rango de frecuencias escogido, pero empíricamente se obtuvieron mejores resultados al incluir más puntos. Los resultados obtenidos de la FRF experimental son aceptables en la estimación de la frecuencia natural y la razón de amortiguamiento, aunque no fue el mismo caso en la estimación de la constante modal, ya que esta fue afectada por el ruido que presentaba la FRF debido a incorrectos procedimientos en la adquisición.

El método RFP, desde su primera aparición en 1982 [26] a cobrado gran popularidad con los años, debido a su rapidez y relativa exactitud el cual ha sido implementado en una variedad de productos comerciales para análisis modal como Hewlett Packard, SMS y Vibrant Technologies Inc. Las aplicaciones del método RFP para la extracción de parámetros modales incluyen la evaluación experimental de cualquier estructura de ingeniería como aviones, automóviles, telescopios, satélites, puentes, discos duros, recintos acústicos, etc.

ARMA	-autoregressive moving-average.
CE	-complex exponential.
CEFD	-complex exponential frequency domain.
DOF	-degree-of-freedom.
DSPI	-direct system parameter identification.
EMA	-experimental modal analysis.
ERA	-eigensystem realization algorithm.
ERA-ID	-eigensystem realization algorithm in the frequency domain.
FDFM	-frequency domain Prony method.
FEM	-finite element method.
GHS	-Gaukroger-Heron-Skingle.
GRFP	-global rational fraction polynomial.
ISSPA	-identification of structural system parameters.
ITD	-Ibrahim time domain.
LSCE	-least-squares complex exponential.
MAC	-modal assurance criterium.
MCF	-modal confidence factor.
MDOF	-multi degree-of-freedom.
MIMO	-multi input multi output.
PRCE	-polyreference complex exponential.
PRFD	-polyreference frequency domain.
RFP	-rational fraction polynomial.
SDOF	-single degree-of-freedom.
SFD	-simultaneous frequency domain.
SIMO	-single input multi output.
SISO	-single input single output.
SSTD	-single-station time domain.
SVD	-singular value decomposition.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Richardson, M.H. "Measurement and Analysis of the Dynamics of Mechanical Structures", Conference for Automotive and Related Industries, Detroit, MI. October, 1978.
- [2] Richardson, M.H. "Structural Dynamics Measurements", SD2000. April, 1999.
- [3] Avitabile, Peter. "Experimental Modal Analysis - A simple NonMathematical Presentation", Sound and Vibration. January, 2001.
- [4] Mendes, N.M. "Extraction of Valid Modal Properties from Measurements Data in Structural Vibrations", Thesis Submitted to the University of London, London, U.K. December, 1988.
- [5] Avitabile, Peter. Lectures Notes, Modal Analysis I & II, University of Massachusetts Lowell. March/April, 1999.
- [6] Iglesias, A.M. "Investigating Various Modal Analysis Extraction Techniques to Estimate Damping Ratio", Thesis submitted to Faculty of the virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, Virginia. June 29, 2000.
- [7] Randall, J.Allemang,. "Vibrations & Experimental Modal Analysis", Structural Dynamics Research Laboratory, Department of Mechanical Industrial and Nuclear Engineering, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio. March, 1999.
- [8] Randall, J.Allemang,. "Analytical and Experimental Modal Analysis", Structural Dynamics Research Laboratory, Department of Mechanical Industrial and Nuclear Engineering, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio. February, 1999.
- [9] Ewins, D.J. "Modal Testing: Theory and Practice", John Wisley & Sons INC, New York, Chichester, 1984.
- [10] Fahy, F.J. and Walker. J.G. "Fundamentals of Noise and Vibration", E & FN Spon, London, 1998.
- [11] T,UHL. "Application of Modal Analysis for Monitoring and Diagnostics of Mechanical Structures", University of Mining and Metallurgy, Department of Mechanical Engineering and Robotics, Krakón, Poland.
- [12] Hutin, Claudie. "Modal Analysis Using Appropriated Excitation Techniques", Sound & Vibrations, October 2000.
- [13] Reix, Tombini, Gerard, Strobbe & Dascote. "Updating the Damping Matrix Using Frequency Response Data", Dynamics solutions. 1995.
- [14] Vibrant Technologies. "Building and Analyzing a Mass-Spring-Damper system", ME'scopeVES Application note #7. , INC. 1999.
- [15] Ramsey, K.A. "Effective Measurement for Structural Dynamics Testing, part I-II", Sound and Vibration, november, 1975.
- [16] Spiegel, Murray R. "Cálculo Superior", McGraw-Hill, INC. 1991.
- [17] Stroud, R.C. "Excitation, Measurement and Analysis Methods for Modal Testing", Sound and Vibration. August, 1987.
- [18] Dossing, Ole. "Structural Testing, part 1: Mechanical Mobility Measurements", Büel & Kjaer Technical Review. March,1988.

- [19] Dossing, Ole. "Structural Testing, part 2: Modal Analysis and Simulation", Buel & Kjaer Technical Review. March, 1988.
- [20] Hellett Packard. "The Fundamentals of Modal Testing, Application note 243-3", USA. October, 1997.
- [21] PCB Piezotronics. "Shock and Vibration Sensors Catalog", Copyright 1999, Piezotronics, INC.
- [22] Formenti, D. and McMillan. "The Exponential Window", Sound and Vibration. February, 1999.
- [23] Formenti, D. "What is the Coherence Function?", Sound and Vibration. December, 1999.
- [24] Richardson, Mark. "Fundamentals of the Discrete Transform", Sound and Vibration Magazine. March, 1978.
- [25] Randall, R.B. "Frequency Analysis", Brüel & Kjaer, Dhaerum, Denmark, 1987.
- [26] Richardson, M.H. "Parameter Estimation from Frequency Response Measurements Using Rational Fraction Polynomials", 1^o IMAC Conference, Orlando, FL., USA. November, 1982.
- [27] Richardson, M.H. "Global Curve Fitting of Frequency Response Measurements using the Rational Fraction Polynomial Method", 3^o IMAC Conference, Orlando, FL., USA. January, 1985.
- [28] Friswell, M.I. and Penny, J.E.T. "Technical Note: The Choice of Orthogonal Polynomials in the Rational Fraction Polynomial Method", The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis", V8 N3. July, 1993. 257-262.
- [29] Newman, N.D., Friswell, M.I. and Penny, J.E.T. "The Parallel Implementation of the Rational Polynomial Method", 11^o IMAC Conference, Kissimmee, FL., USA. 1993.
- [30] Newman, N.D., Friswell, M.I. and Penny, J.E.T. "The Effect of Using Different Orthogonal Polynomials in the Rational Fraction Polynomial Method", 5^o International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics. Volume I. University of Southampton, England. July, 1994.

CANONICAL.M

```

function [FRF,w,f,ra,Ci,Oi]=canonical(M,C,K,Wmax,n_puntos,resp,inp)

% Función que obtiene la FRF (Receptancia) de un sistema lineal de N grados de
% libertad con amortiguación viscosa.
%
% Sintaxis: [FRF,w,f,ra,Ci,Oi]=canonical(M,C,K,Wmax,n_puntos,resp,inp)
%
% M           = Matriz de masa.
% C           = Matriz de amortiguación.
% K           = Matriz de rigidez.
% Wmax        = Frecuencia máxima [rad/seg].
% n_puntos    = Número de puntos de frecuencia.
% resp        = Localización de respuesta de salida.
% inp         = Localización de excitación de entrada.
% FRF         = Función repuesta de frecuencia.
% w           = Rango de frecuencias [rad/seg].
% f,ra,Ci,Oi = frec.nat.,raz.amort.,Mag.const.modal,Fase const.modal de la
%              FRF.

pi = 3.141592654;
dw = Wmax/n_puntos; %resolución [rad/seg]
[N,c] = size(M);
cero = zeros(N,N); %matriz vacia

A = [C,M;M,cero]; %representación espacio-estado
B = [K,cero;cero,-M];
[V,D] = eig(B,-A); %(help eig) D=soluciones propias ;V=vectores propios
    lambda = diag(D);
    [Y,I] = sort(imag(lambda));
    polos = lambda(I); %solución característica
    psi = V(:,I); %matriz modal
a = psi.'*A*psi; %modal A

%generación FRF
FRF = 0;
for n = 1:N
    w = [dw:dw:Wmax];
    Re = psi(1:N,N+n)*psi(1:N,N+n) ./ a(N+n,N+n);
    H = Re(resp,inp) ./ (j.*w-polos(N+n))+conj(Re(resp,inp)) ./ (j.*w-
    conj(polos(N+n)));
    %plot(w./(2*pi),20*real(log10(H)),'r'),hold on,
    FRF = FRF+H;
    matrix_Re(n,1) = Re(resp,inp);
end
%plot(w./(2*pi),20*real(log10(FRF)),'b'),hold off,

Fact_Ruido = 0; %cambiar valor para sumar ruido
IRF = ifft(FRF,n_puntos);
max_irf = max(abs(IRF));
ruido = Fact_Ruido*max_irf*randn(size(IRF));
%sprintf('SNR = %0.5g [dB].',20*log10(std(IRF)/std(ruido))),

```

```

IRF = IRF + ruido;
FRF = fft(IRF,n_puntos); %FRF simulada con ruido

polos = polos((length(polos)/2)+1:end,1); %polos complejos
frec_nat = abs(polos)./(2*pi); %frecuencias naturales (Hz)
raz_amort = -real(polos)./abs(polos); %razones de amortiguamiento

Ai = -2*(real(matrix_Re).*real(polos)+imag(matrix_Re).*imag(polos));
Bi = 2*real(matrix_Re);
const_modal = Ai+j.*abs(polos).*Bi; %constantes modales complejas
Ci = abs(const_modal); %magnitudes constantes modales
Oi = angle(const_modal).*180/pi; %fases constantes modales (grados)

f =[frec_nat]; ra = [raz_amort];

```

RFP.M

```

function [alpha,Residuos,Polos]=rfp(rec,omega,N)

% Función que calcula el Método Fracción Racional Polinómica que extrae los
% parámetros modales desde una FRF. Debe utilizarse en conjunto con la función
% Ortogonal.
% Richardson & Formenti (IMAC I, pp. 167-181)
%
% Sintaxis: [alpha,Residuos,Polos]=rfp(rec,omega,N);
%
% rec = Valores de receptancia dentro del rango omega.
% omega = Rango de frecuencias [rad/seg].
% N = Número de modos.
% alpha = FRF generada (receptancia).

[r,c] = size(omega);
if r<c
    omega = omega.'; %omega es una columna
end
[r,c] = size(rec);
if r<c
    rec = rec.'; %rec es una columna
end

om = max(omega);
omega = omega./om; %normaliza el vector {w}

m = 2*N-1; %número de términos numerador
n = 2*N; %número de términos denominador

%Función ortogonal que calcula polinomios ortogonales
[phimatrix,coeff_A]=ortogonal(rec,omega,1,m);
[thetamatrix,coeff_B]=ortogonal(rec,omega,2,n);

[r,c] = size(phimatrix);
Phi = phimatrix(:,1:c); %matriz phi

```

```

[r,c] = size(thetamatrix);
Theta = thetamatrix(:,1:c); %matriz theta
T = sparse(diag(rec))*thetamatrix(:,1:c-1);
W = rec.*thetamatrix(:,c);

X = 2*-real(Phi'*T);
G = 2*real(Phi'*W);

d = -inv(eye(size(X))-X.'*X)*X.'*G;
C = G-X*d; %coeficientes {C} generados

d2N = 1;
D = [d;d2N]; %coeficientes {D} generados

%generación FRF
for n = 1:length(omega)
    numer = sum(C.'.*Phi(n,:));
    denom = sum(D.'.*Theta(n,:));
    alpha(n) = numer/denom;
end

A = coeff_A*C; %generación constantes {A}
[r,c] = size(A);
A = A(r:-1:1).'; %orden de mayor a menor

B = coeff_B*D; %generación constantes {B}
[r,c] = size(B);
B = B(r:-1:1).';

%Residuos y Polos:
[R,P,K] = residue(A,B); %(help residue)
[r,c] = size(R);
for n = 1:(r/2)
    Residuos(n,1) = R(2*n-1);
    Polos(n,1) = P(2*n-1);
end
[r,c] = size(Residuos);
Residuos = Residuos(r:-1:1)*om; %Residuos
Polos = Polos(r:-1:1)*om; %Polos

```

ORTOGONAL.M

```

function [P,coeff]=ortogonal(rec,omega,phitheta,kmax)

% Función que calcula los polinómios ortogonales requeridos por el
% Método Fracción Racional Polinómica.
% Este método fue descrito por Forsythe [1957].
%
% Sintaxis: [P,coeff]=ortogonal(rec,omega,phitheta,kmax)
%
% rec      = Valores de receptancia dentro del rango omega.
% omega    = Rango de frecuencias [rad/seg].
% phitheta = valor 1 ó 2, que indica la función ponderación q.

```

```

% kmax      = Grado del polinomio.
% P        = Matriz de polinómios ortogonales complejos evaluada en el rango
%           omega.
% coeff    = Matriz usada para transformar los coef. de los polinómios
%           ortogonales a los coef. de los polinomios ordinarios.

if phitheta == 1
    q = ones(size(omega)); %función ponderación para phi
elseif phitheta == 2
    q = (abs(rec)).^2; %función ponderación para theta
else
    error('phitheta debe ser 1 ó 2.')
end

R_menos1 = zeros(size(omega));
R_0 = 1/sqrt(2*sum(q)).*ones(size(omega));
R = [R_menos1,R_0]; %polinomios -1 y 0.
coeff = zeros(kmax+1,kmax+2);
coeff(1,2) = 1/sqrt(2*sum(q));

%Generación matriz polinomios ortogonales y matriz transformación
for k = 1:kmax,
    Vkm1 = 2*sum(omega.*R(:,k+1).*R(:,k).*q);
    Sk = omega.*R(:,k+1)-Vkm1*R(:,k);
    Dk = sqrt(2*sum((Sk.^2).*q));
    R = [R, (Sk/Dk)];
    coeff(:,k+2) = -Vkm1*coeff(:,k);
    coeff(2:k+1,k+2) = coeff(2:k+1,k+2)+coeff(1:k,k+1);
    coeff(:,k+2) = coeff(:,k+2)/Dk;
end

coeff = coeff(:,2:kmax+2); %matriz transformación
R = R(:,2:kmax+2); %matriz polinomios ortogonales

for k = 0:kmax,
    P(:,k+1) = R(:,k+1)*j^k; %matriz polinomios ortogonales complejos
    jk(1,k+1) = j^k;
end

coeff = (jk'*jk).*coeff; %matriz transformación compleja

```